O. DZIOBEK

VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN

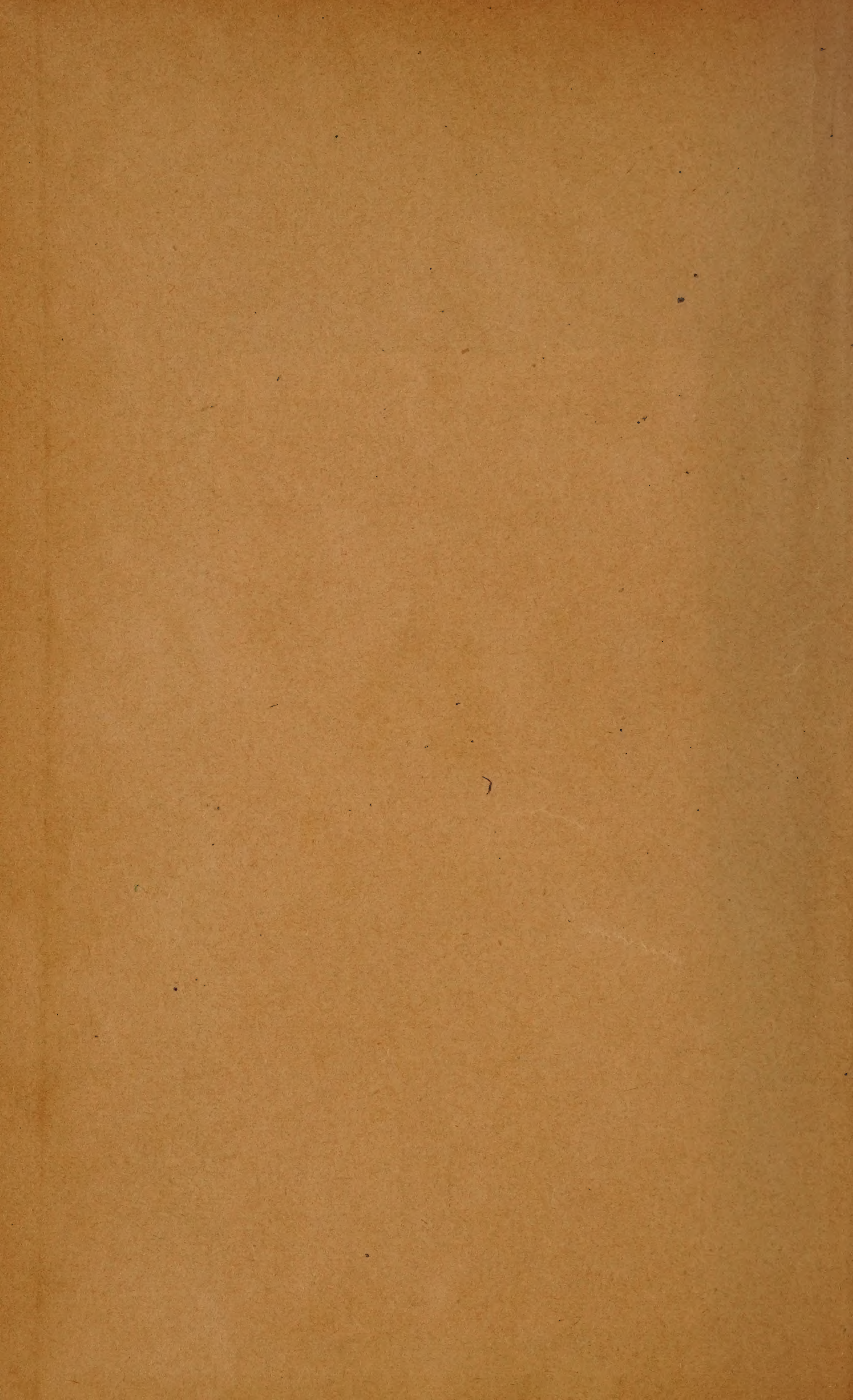
P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematik**, der **Naturwissenschaften** und **Technik** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter dieser Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband Geschichte, Philosophie und Didaktik besprechen wird. Eine **französische**
Ausgabe ... cheinen begonnen.
We ... chen und natur-
wissensc ... nd: Die **Mathe-**
matisch ... itschrift für Ge-
schichte ... **ler Mathematik**
und Phy ... **e der Deutschen**
Mathem ... **tik und Physik**
(Organ f ... **elle des Publi-**
cations ... **hen und natur-**
wissens ... **rwissenschaft-**
lichen B ... **chafts-Biologie,**
die **Mon** ... **nterricht aller**
Schulgat... (die eine unmittelbare Fortführung von Natur und Schule bilden), die **Geographische Zeitschrift, Himmel und Erde** (illustrierte naturwissenschaftliche Monatsschrift) u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner".** Diese jährlich dreimal erscheinenden „Mitteilungen", die in 35000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen. **Die Mitteilungen werden jedem Interessenten auf Wunsch regelmäßig bei Erscheinen umsonst und postfrei von mir übersandt. Das ausführliche „Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften"** 101. Ausgabe, mit eingehender systematischer und alphabetischer Bibliographie und einem Gedenktagebuch für Mathematiker, 10 Bildnissen sowie einem Anhange, Unterhaltungsliteratur enthaltend. [CXXXI, 392 u. 92 S.] gr. 8. 1908 steht Interessenten auf Wunsch umsonst und postfrei zur Verfügung.

LEIPZIG, Poststraße 3. **B. G. Teubner.**



VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

VON

DR. OTTO DZIOBEK

ETATSMÄSS. PROFESSOR AN DER MILITÄRTECHNISCHEN AKADEMIE
UND DOZENT FÜR HÖHERE MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU CHARLOTTENBURG

MIT 150 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

VORREDE.

Der Inhalt dieses Werkes entspricht ungefähr dem Inhalte der von mir seit einer Reihe von Jahren an der Technischen Hochschule gehaltenen Vorlesungen über höhere Mathematik, soweit sie sich auf die Differential- und Integralrechnung und nicht auf die analytische Geometrie beziehen, deren Elemente als bekannt vorausgesetzt werden. Er entspricht auch ungefähr dem Inhalt dessen, was ich nach den Lehrplänen der Militärtechnischen Akademie in den drei ersten Jahrgängen der Waffenabteilung an Differential- und Integralrechnung vorzutragen verpflichtet bin.

Durch das Wort „ungefähr“ will ich mich hauptsächlich nach zwei Seiten hin verwahren. Erstens ist manches ausführlicher behandelt und manches weiter ausgebaut worden, als es der mündliche Vortrag in der gegebenen Zeit erlaubt vor Hörern, die zwar differenzieren und integrieren lernen, aber nicht Mathematiker von Fach werden wollen, wie die Hörer von mathematischen Vorlesungen an einer Universität. Man darf also wohl auch im Durchschnitt keine ganz so scharfe Auslese hinsichtlich der Vorkenntnisse und der mathematischen Veranlagung voraussetzen, was wieder billigerweise im Vortrag berücksichtigt werden muß und auch sehr gut berücksichtigt werden kann, wenn hinter dem „schlechthin“ Notwendigen das „auch“ Wünschenswerte manchmal zurückgestellt wird. Und letzterem ist in diesem Buch doch ein etwas größerer Spielraum gegönnt worden.

Zweitens aber will ich mich gegen den Einwurf verwahren, daß die mündliche Behandlungsweise sich gar nicht immer deckt mit der hier gegebenen Darstellung. Das gesprochene Wort kann sicherlich ungleich lebendiger wirken; dafür ist es aber auch leichter mancherlei Gefahren ausgesetzt. Wenn es nicht augenblicklich ganz erfaßt wird, so geht es wohl im Fluß der Rede verloren und hinterläßt keine Spuren. Oder auch, was noch schlimmer ist, es kann halb verstanden, halb mißverstanden werden. Selbst erfahrene Lehrer der Differential- und Integralrechnung haben alle Kunst anzuwenden, um diese Klippen zu umschiffen, an denen der Erfolg zu scheitern droht. Was aber gedruckt steht, kann sich dem Bedürfnis des Lesers viel mehr anschmiegen. Bringt es ihm nur bekanntes, so mag er leicht darüber

hingehen, bringt es ihm aber völlig neues, so mag er langsam Wort für Wort und Satz für Satz in sich aufnehmen oder wieder und wieder vornehmen, bis es ganz verstanden ist ohne Rest. So sind die obigen Gefahren viel entfernter und deshalb kann, ja deshalb soll die gedruckte Darstellung in mancher Hinsicht anders sein, als der mündliche Vortrag.

Das Werk ist in drei Teile, in drei „Bücher" geteilt. Jedes Buch wieder enthält drei Abschnitte, also daß das Ganze in neun Abschnitte zerfällt. Jeder Abschnitt wieder ist in vier bis fünf Paragraphen mit fortlaufenden Bezeichnungen von § 1 bis § 42 zerlegt. Und jeder Paragraph wieder ist in Nummern geteilt, die auch zur leichteren Bezugnahme auf Früheres oder Späteres fortlaufen von Nr. 1 bis 323. Endlich ist ein Anhang vorhanden, der die Lösungen der in jedem Paragraphen am Schluß gestellten Übungsaufgaben enthält, meist mit kurzer und knapper Angabe des Wegs zur Lösung.

Das erste Buch ist betitelt Einleitung in die Differentialrechnung. Es zerfällt in den ersten, zweiten und dritten Abschnitt.

Der erste Abschnitt enthält eine Einleitung, in welcher manches aus der Elementarmathematik, einschließlich des binomischen Lehrsatzes wiederholt wird. Dann folgen die Grundlagen der sog. Differenzen- und Summenrechnung als einer formalen Vorstufe zur eigentlichen Differential- und Integralrechnung, die aber auch an sich wertvoll und nützlich genug ist. Zu ihr gehören die Differenzen- und Summenformeln, Formeln von Newton und Lagrange usw.

Der zweite Abschnitt bringt eine Überschau über die elementaren Funktionen, welche wohl manchem Leser recht willkommen sein wird, der die meisten zwar schon von der Schule her kennt, aber doch nicht so gründlich und auch nicht in der Weise, wie es dem Funktionsbegriff angemessen ist. Potenzen, Wurzeln, Exponentialfunktionen, Logarithmen, trigonometrische und Arcusfunktionen werden behandelt. Dann folgen die zusammengesetzten und die implizite, sei es durch Umkehrung, durch Gleichungen, durch Parameterdarstellungen oder sonstwie durch Bedingungen gegebenen Funktionen. Zur Ergänzung und trefflichen Abrundung werden auch die Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrungen, die Areafunktionen eingeführt. Den Schluß bilden die Interpolationsformeln von Newton und Lagrange.

Der dritte Abschnitt befaßt sich mit der mathematischen Analyse des Stetigkeitsbegriffs, ohne den es weder Differential- noch Integralrechnung geben kann. Das unendlich Kleine und das unendlich Große, der Grenzwert oder der limes, der unendliche Ausdruck im Gegensatz zum endlichen oder geschlossenen Ausdruck, Konvergenz und Divergenz werden erläutert. Es folgen Konvergenzkriterien für

unendliche Reihen und den Schluß bildet die Ableitung der natürlichen Basis und der zugehörigen Exponentialfunktion.

Das zweite Buch ist betitelt: Differentialrechnung. Es zerfällt in den vierten, fünften und sechsten Abschnitt.

Der vierte Abschnitt kann, da alles zur Einleitung gehörende im ersten Buch vorweggenommen ist, Zug um Zug fortschreiten vom Differential zum Differentialquotienten und zur abgeleiteten Funktion, so daß nach Aufstellung allgemeiner Differentialformeln alsbald die wichtigsten Grundformeln in zwei Tafeln niedergelegt werden können. Nach einfachen Anwendungen auf Analysis und Geometrie werden zum Schluß die partiellen Ableitungen und der Satz vom totalen Differential erläutert.

Der fünfte Abschnitt befaßt sich mit den Hauptanwendungen der Elemente der Differentialrechnung. Größte und kleinste Werte, Theorie der Krümmung, Lösung von Gleichungen durch Annäherungen, Limesrechnungen an unbestimmte Formen anknüpfend, Singularitäten ebener Kurven, Theorie der Hüllkurven und Hüllflächen werden behandelt.

Der sechste Abschnitt befaßt sich mit analytischen Entwickelungen von Funktionen, zunächst gestützt auf den Taylorschen Lehrsatz. Es werden die grundlegenden elementaren Funktionen in Reihen entwickelt und es wird gezeigt, wie sie zur Berechnung der Tafeln von Funktionswerten dienen. Sodann werden die komplexen Zahlen eingeführt; die zugehörigen Rechnungsregeln werden gegeben. Dann folgt die Eulersche Formel über den Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion nebst all den weittragenden Folgerungen dieser glänzenden Entdeckung des großen Mathematikers. Den Schluß bilden die Elemente des Differenzierens der Funktionen komplexer Veränderlicher.

Das dritte Buch ist betitelt: Integralrechnung. Es zerfällt in den siebenten, achten und neunten Abschnitt.

Der siebente Abschnitt stellt die Grundformeln der Integralrechnung auf. Das bestimmte und unbestimmte Integral und ihr Zusammenhang werden erläutert. Alsbald folgen zwei Tafeln zur Integralrechnung, welche durchaus den zwei Tafeln der Differentialrechnung im vierten Abschnitt entsprechen. Nach Erläuterung ihres Gebrauches an zahlreichen Beispielen aus Geometrie und Mechanik, werden die Simpsonsche Formel, die mechanische Quadratur und das Integrieren mittels unendlicher Reihen durchgenommen. Den Schluß bilden die mehrfachen Integrale.

Der achte Abschnitt behandelt die methodische Integration gegebener Funktionen: Zunächst der rationalen Funktionen, dann der irrationalen Funktionen und der transzendenten Funktionen, bei

denen man sich auf besondere Fälle beschränken muß. Recht ausführlich sind dabei die Reduktionsformeln bedacht worden.

Der neunte Abschnitt führt in die Differentialgleichungen ein. Erst wird gezeigt, was eine gewöhnliche oder totale Differentialgleichung erster Ordnung ist und ihre Integration in einfachen Fällen vorgenommen. Ebenso werden dann die totalen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung und die Systeme simultaner Differentialgleichungen behandelt, letztere erläutert an dem klassischen Beispiel der Ableitung der Keplerschen Gesetze aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz. Im letzten Paragraphen endlich wird ganz kurz auf partielle Differentialgleichungen eingegangen.

Dieser Inhaltsangabe seien noch zwei Bemerkungen hinzugefügt.

Erstens: Außer den Übungsaufgaben am Schluß jedes der 42 Paragraphen, an denen der Leser, wenn er will, zum selbständigen Gebrauch der Formeln erstarken kann, sind im Text überall sehr zahlreiche Beispiele verstreut. Sie sollen den Leser, wo es nötig schien, auf Schritt und Tritt begleiten und völliges Verstehen des Sinnes der allgemeinen Entwicklungen nach Möglichkeit sichern. Allerdings haben sie die Seitenzahl wohl verdoppelt, aber sie durften nicht fehlen, da es sich nicht nur auf die Ableitung der Ergebnisse, sondern auch sehr wesentlich um die Unterweisung in ihrem Gebrauch gehandelt hat.

Zweitens: Dem Leser sollten die Elemente der Differential- und Integralrechnung geboten werden, wenn auch in recht weitem Umfange, so doch unter Beschränkung auf elementare Funktionen, wie sie im zweiten Abschnitt zu einem wohlabgeschlossenen Funktionsbereich zusammengestellt sind. Nur ganz vereinzelt und schüchtern ist darüber hinausgegangen worden wie in Nr. 271 bei Berechnung des Wahrscheinlichkeitsintegrals und in Nr. 299 bei Einführung der Gammafunktionen. Dennoch wird man finden, daß bald hier bald da über die gesteckten Grenzen ein Blick geworfen wird auf höher liegende Gebiete, welche erst bei vertieften und gründlichen Fachstudien Zufahrtstraßen erhalten. Es sollten dem Leser die Augen geöffnet werden, daß er nicht etwa meine, die gefestigte Kenntnis der Grundlagen des Differenzierens und Integrierens mache schon den vollendeten Mathematiker aus. Andererseits aber sind diese Grundlagen selbstverständlich auch für den Mathematiker von Beruf unentbehrlich und so nehme ich an, daß auch der Studierende der Mathematik an einer Universität sehr wohl daran tut, sie sich völlig und sicher zu eigen zu machen.

In dieser Annahme glaube ich recht getan zu haben, daß ich einen solchen Studierenden, meinen Sohn, veranlaßt habe, die Hauptarbeit beim Lesen der Korrekturen zu übernehmen. Möge er die bei

der Drucklegung eines mathematischen Buches erst so dichten Scharen von Versehen und Druckfehler so stark, daß sie nur noch vereinzelt übrig geblieben sind, gelichtet haben.

Zum Schluß erfülle ich die angenehme Pflicht, der Verlagsbuchhandlung und insbesondere Herrn Hofrat Dr. Ackermann-Teubner meinen Dank abzustatten für das bereitwillige Entgegenkommen, welches meine dieses Buch betreffenden Wünsche jederzeit fanden, sowie für die freundliche Nachsicht und Geduld, da widrige Umstände sein Erscheinen weit über ein Jahr hinausgeschoben haben.

Charlottenburg, 22. XI. 09.

O. DZIOBEK.

INHALTSVERZEICHNIS.

Fünfter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.

Drittes Buch.

Siebenter Abschnitt.

Achter Abschnitt.

Neunter Abschnitt.

Anhang.

ERSTES BUCH

EINLEITUNG IN DIE DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG



Erster Abschnitt.

Einleitung. Differenzenrechnung.

§ 1. Einleitendes aus der Elementarmathematik. Binomischer Lehrsatz.

1. Die Vorbereitungen zur Differential- und Integralrechnung, mit welchen sich dieses erste Buch befaßt, könnten auch zwischendurch ihre Stelle finden. Vieles würde für letzteres sprechen, ebenso vieles spricht aber auch für ihre Vorwegnahme; so das schärfere Hervortreten ihrer großen Bedeutung an sich und der Wahlspruch „divide et impera“, welcher nicht allein für den Feldherrn, sondern auch für den Lehrer gilt.

Dieser einleitende Paragraph enthält manche in der höheren Analysis viel benutzte Bezeichnungen, Formeln und Entwicklungen, welche zwar „eigentlich“ der Elementarmathematik zuzurechnen wären, aber doch wohl nicht als gleichmäßig „bekannt“ vorausgesetzt werden dürfen, — nach langjähriger Erfahrung des Verfassers.

2. Bedingungsgleichung und Identität. Die Gleichung $3x + 4y = 24$ ist eine Bedingungsgleichung, welche x und y eine Bedingung auferlegt. Die Gleichung $a = a$ ist eine Identität, weil links und rechts identisch dasselbe steht. Auch wenn beide Seiten nur der Form nach verschieden sind, also durch Umformung identisch gemacht werden könnten, ist die Gleichung eine Identität, wie z. B.:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Man hat, um gelegentlich besonders scharf eine Gleichung als Identität hervorzuheben, das Identitätszeichen eingeführt, bestehend aus drei Gleichheitsstrichen.[1])

$$a \equiv a$$

$$a^2 - b^2 \equiv (a - b)(a + b)$$

$$a^n - b^n \equiv (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \equiv (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Die erste dieser vier Identitäten drückt das Axiom aus: „Jede Größe ist sich selbst gleich.“ Die anderen drei bilden mit vielen

1) In der Zahlentheorie jedoch das Zeichen für Kongruenz (von Gauß).

ihresgleichen einen Formelschatz von größter Nützlichkeit für Umformungen aller Art. Je mehr man von ihnen kennt, um so besser.

Übrigens kann sich eine Bedingungsgleichung unter Umständen in eine Identität verwandeln. Berechnet man z. B. aus der Gleichung zu Anfang:

$$y = \frac{24 - 3x}{4}$$

und setzt wieder ein, so folgt:

$$3x + 4\,\frac{24 - 3x}{4} = 24,$$

was eine Identität ist und eine solche sein muß, weil sonst die Lösung fehlerhaft gewesen wäre. So werden ja die meisten Proben gemacht.

3. Das kommutative, das assoziative und das distributive Prinzip.

I. Kommutativ:

$$a + b = b + a.$$

II. Assoziativ:

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c.$$

III. Distributiv:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Kommutativ = untereinander vertauschbar; z. B. die Summanden einer Summe. Assoziativ = gruppenweise zusammenfaßbar, wie die Summanden einer mehrgliedrigen Summe. Distributiv = verteilbar, wie der Faktor vor einer Summe, der auf alle Summanden verteilt werden kann.

Diese drei Prinzipien oder Gesetze erkennt man auch in vielen andern Formeln, z. B.

I. Kommutativ:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

II. Assoziativ:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

III. Distributiv:

$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c.$$

In jedem mathematischen Buch ließen sich leicht Hunderte von weiteren Beispielen auftreiben. So z. B. bei mehrfacher partieller Differentiation das kommutative Gesetz [67], bei dem Beweise des polynomischen Lehrsatzes das assoziative Prinzip [20], bei dem Gebrauch des Symbols Δ vor einer Summe das distributive Gesetz [15 5], usw.

4. Kommutative oder symmetrische und alternierende Ausdrücke. Ausdrücke wie:

$$a + b, \quad a \cdot b, \quad a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c,$$

welche bei Vertauschung der in ihnen enthaltenen Buchstabenzahlen identisch gleich bleiben, nennt man in bezug auf sie kommutativ oder symmetrisch. Tritt aber ein Vorzeichenwechsel ein, so sagt man wohl: „der Ausdruck alterniert“. Das einfachste Beispiel bietet die Differenz, da:

$$(b-a) = -(a-b); \quad (a-b) = -(b-a)$$

ist. Die Kommutativität kann sich auch auf Größenreihen beziehen. So ist z. B.: $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$ kommutativ in bezug auf die beiden Reihen a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2. Ein gleiches gilt für das Alternieren. Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 \\ -a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \end{matrix}$$

wechselt ihr Vorzeichen, wenn irgend zwei der drei Horizontalreihen a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, oder auch irgend zwei der drei Vertikalreihen a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 miteinander vertauscht werden. Dagegen ist sie kommutativ bei Vertauschung der Horizontal- mit den gleichvielten Vertikalreihen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5. Invarianten. Ausdrücke, welche bei gegebenen Umformungen oder Transformationen ihre Form nicht ändern, heißen in bezug auf sie invariant.

Setzt man z. B.:

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \quad y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi, \tag{1}$$

so ergibt eine sehr einfache Rechnung (da $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ ist):

$$x^2 + y^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2. \tag{2}$$

Bekanntlich sind (1) Transformationsformeln zur Drehung eines rechtwinkligen Koordinatensystems um seinen Anfangspunkt O. Der Ausdruck $x^2 + y^2$ ist ebenso bekanntlich das Quadrat des Abstandes des Punktes $P(x, y)$ von O. Seiner Invariabilität im analytischen Sinne entspricht daher die geometrische Invariabilität von O und P, also auch des Abstandes OP.

Aber während $x^2 + y^2$ für (1) eine Invariante vorstellt, gilt dies für die allgemeinere Transformation:

$$x = a_1x_1 + b_1y_1, \quad y = a_2x_1 + b_2y_1, \tag{3}$$

wenn a_1, b_1, a_2, b_2 beliebig sind, nicht mehr. Deshalb wurde ja

vorhin die Bedingtheit hervorgehoben durch die Worte „in bezug auf sie“.

6. Die Formel:

$$a \neq b$$

soll bedeuten „a ist nicht gleich b“. Es wird das Gleichsein durch Ausstreichen des Gleichheitszeichens verneint. Man kann ja auch schreiben:

$$a \gtrless b$$

(a größer oder kleiner als b), aber dies ist erstens nicht so treffend und zweitens bei komplexen Zahlen nicht anwendbar, weil es unmöglich ist, sie der Größe nach in eine Reihe zu ordnen.

7. Striche und Indizes. Oft ist es sehr zweckmäßig, verschiedene Größen, z. B. die verschiedenen Werte, welche man einer Veränderlichen zu geben gedenkt, durch ein und denselben Buchstaben zu bezeichnen. Zur Unterscheidung macht man dann entweder rechts oben Striche:

$$x', \quad x'', \quad x''', \quad \ldots$$

(gesprochen x strich, x zweistrich, ... aber nicht x eins, x zwei ...) oder rechts unten Indizes, sei es als Ziffern:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3; \quad \ldots$$

(gesprochen x eins, x zwei, ... aber nicht: x strich, x zweistrich ...), sei es als Buchstaben:

$$x_a, \quad x_b, \quad x_c, \quad \ldots$$

Zuweilen sind zwei (oder mehr) Indizes angezeigt, z. B. wenn ein Ausdruck von zwei ganzen, sonst aber beliebigen Zahlen abhängt, wie etwa

$$a_{m,n} = 5^m \cdot 3^n.$$

Hier ist die Anordnung in einer Doppelreihe am Platze, etwa so, daß alle Werte mit gleichen m und verschiedenen n nebeneinander, dagegen alle Werte mit gleichen n und verschiedenen m untereinander zu stehen kommen. Fangen beide Indizes mit 0 an und können sie ohne Einschränkung die natürliche Zahlenreihe durchlaufen, so entsteht die Doppelreihe z. B. [17 14]

$$\begin{array}{llll} a_{0,0}; & a_{0,1}; & a_{0,2}; & \cdots \\ a_{1,0}; & a_{1,1}; & a_{1,2}; & \cdots \\ a_{2,0}; & a_{2,1}; & a_{2,2}; & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

8. Zahlen, Größen, Werte. Die reine Analysis, ob elementar oder nicht, kennt nur eine Art von Größen oder Werten, nämlich die

Zahlen. Weil diese aber in den Anwendungen die verschiedensten Bedeutungen, wie Längen, Flächen, Zeiten, Kräfte usw. haben können, so ist es zur Gewohnheit geworden, die Zahl x, die Größe x, den Wert x als einerlei zu betrachten, wenigstens beinahe.

Hiervon abzugehen liegt gar kein Grund vor. Im Gegenteil! Es ist sehr angenehm, mit den Worten Zahl, Wert, Größe wechseln zu können.

9. Absolut und algebraisch. Von den drei Zahlen:

$$5{,}3; \quad +5{,}3; \quad -5{,}3$$

heißt die erste absolut. Die beiden anderen nennt man algebraisch. Eine absolute Zahl hat nie ein Vorzeichen, soll keins haben. Eine algebraische Zahl hat immer ein Vorzeichen, soll es haben. Hat sie das Zeichen $+$, so heißt sie positiv, hat sie das Zeichen $-$, so heißt sie negativ.

Freilich gibt es hier zwei etwas abweichende Auffassungen, von denen bald die eine, bald die andere mehr am Platze ist, wie der Fall gerade liegt. Nach der ersten ist absolut und positiv einerlei, ist 5,3 dasselbe wie $+5{,}3$. Das Vorzeichen $+$ kann fortgelassen werden und wird nur hingesetzt, wo es auf den Gegensatz zu $-$ ankommt. Es ist $7-5=2$; aber es ist $5-7=-2$ und im Gegensatz $7-5=+2$.

Nach der zweiten und von vornherein algebraischen Auffassung vermeidet man, absolut und positiv zu identifizieren. Sind z. B. Anfangspunkt, Längeneinheit und Positivrichtung auf einer zur Abszissenachse gemachten Geraden gewählt, so gibt es wohl einen Punkt P

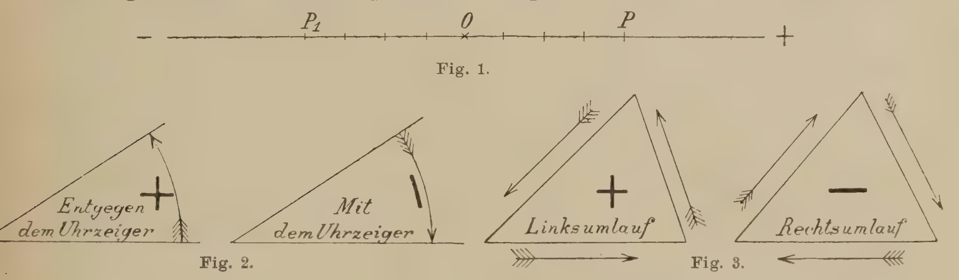


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

mit der Abszisse $+4$ und einen Punkt P_1 mit der Abszisse -4, aber keinen Punkt mit der Abszisse 4. Es wäre nicht in der Ordnung, bei P das $+$ vor der Ziffer 4 fortzulassen, und wer etwa diese üble Angewohnheit angenommen hat, lege sie schleunigst wieder ab. Denn das $+$-Zeichen hat hier einen „Sinn", nämlich einen Richtungssinn, genau so wie das $-$-Zeichen.

In anderen Fällen wird dem Vorzeichen ein anderer Sinn beigelegt, z. B. bei Winkeln, „Drehungssinn" (entgegen und mit dem

Uhrzeiger) und bei ebenen Flächen „Umlaufssinn". (Linksumlauf und Rechtsumlauf.) Die vorstehenden Figuren zeigen an, welcher Sinn in diesem Buch positiv und welcher negativ genommen wird.

10. Auf den Unterschied zwischen absolut und algebraisch achte man mit besonderer Sorgfalt bei Buchstabenzahlen.

Entweder: Der Buchstabe, etwa x, soll eine absolute Zahl bedeuten. Dann schließt dieses x überhaupt kein Vorzeichen ein, sondern steht nur für einen beliebigen absoluten Ziffernwert. Die beiden algebraischen Zahlen mit demselben absoluten Wert sind alsdann $+x$ und $-x$.

Oder: Der Buchstabe, etwa x, soll eine algebraische Zahl bedeuten. Dann schließt dieses x außer dem beliebig gelassenen absoluten Wert auch noch das gleichfalls beliebig gelassene Vorzeichen, als mit dem absoluten Wert zur algebraischen Zahl x vereinigt, mit ein. Dieses Vorzeichen steckt implizite in dem x schon drinn und erscheint explizite überhaupt nicht.

So selbstverständlich es einerseits nach [9] ist, daß das Vorzeichen $+$ oder $-$ bei einer algebraischen Zahl vorgesetzt werden muß, wenn ihr absoluter Wert ziffernmäßig gegeben ist, so selbstverständlich ist es andererseits, daß ein solches Vorzeichen nicht gesetzt werden darf, wenn diese algebraische Zahl selbst mit x bezeichnet wird. Man halte daher das vorige „Entweder — Oder" gegebenen Falles mit unbeugsamer Halsstarrigkeit aufrecht, denn sonst nehmen Verwechslungen und Vorzeichenfehler kein Ende.

Nur wenn man das von Weierstraß eingeführte Zeichen[1]):

$$|x|$$

(gesprochen „Strich x Strich") für den absoluten Wert einer algebraischen Zahl x gebraucht, setze man das Vorzeichen, auch ohne Kenntnis von $|x|$, und schreibe $x = +|x|$, wenn x positiv, $x = -|x|$, wenn x negativ sein soll oder auch $x = \pm|x|$, wenn man sich die Wahl des Vorzeichens noch vorbehält. Die beiden Weierstraßschen Striche dürfen erst fortgelassen werden, wenn für $|x|$ ein bestimmter Zahlenwert, etwa $|x| = 5{,}3$ eingesetzt wird, also daß man $x = \pm 5{,}3$ erhält. Oder auch, wenn man sich entschließt, für $|x|$ einen anderen Buchstaben, etwa a zu setzen, mit der Maßgabe, daß dieses a nur noch absolut sein solle. Auch dann ist selbstverständlich $x = \pm a$.

Auf den Unterschied zwischen absolut und algebraisch ist auch sehr genau bei der Definition von größer und kleiner zu achten. Sind x_1 und x_2 zwei ungleiche algebraische Zahlen, so heißt stets diejenige die größere von beiden, von welcher man die andere abziehen muß, um eine positive Differenz zu erhalten. Wie es in bezug

1) Bei komplexen Zahlen steht es für den Modul § 27.

auf größer und kleiner mit den absoluten Werten von x_1 und x_2 steht, spielt dabei gar nicht mit. Es ist z. B.:

$$\text{a)}\ \begin{matrix} +5 > +3 \\ \text{und} \\ 5 > 3 \end{matrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{matrix} +3 > -3 \\ \text{und} \\ 3 = 3 \end{matrix}, \qquad \text{c)}\ \begin{matrix} -3 > -5 \\ \text{und} \\ 3 < 5. \end{matrix}$$

Im besonderen ist eine positive Zahl > 0, eine negative Zahl < 0. Ist $x_1 > x_2$ und $x_2 > x_3$, so ist erst recht $x_1 > x_3$. Man schreibt dann fortlaufend

$$x_1 > x_2 > x_3 \quad \text{oder} \quad x_3 < x_2 < x_1.$$

Dies gilt auch für *algebraische Zahlen* und erlaubt ihre *Anordnung der Größe nach* von $-\infty$ bis $+\infty$. Sie geht bei Veranschaulichung der x als Abszissen in die Anordnung von Punkten *der Richtung nach* über.

11. *Spielraum und Mittelwerte.* Zwei ungleiche algebraische Zahlen x_1 und x_2 begrenzen einen Spielraum, ein Intervall oder geometrisch eine Strecke zwischen zwei Punkten einer Geraden. Fig. 4.

Fig. 4.

Jede Zahl x innerhalb des Spielraums heißt ein Mittelwert von x_1 und x_2. Es ist je nachdem $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$

$$\text{entweder} \quad x_1 < x < x_2 \quad \text{oder} \quad x_1 > x > x_2.$$

Man kann auch sagen: Wenn x ein Mittelwert von x_1 und x_2 ist, so sind die Differenzen $x - x_1$ und $x_2 - x$ beide positiv oder beide negativ und verhalten sich also wie zwei positive oder wie zwei negative Zahlen n_2 und n_1

$$x - x_1 : x_2 - x = n_2 : n_1.$$

Die Auflösung nach x ergibt die Mittelwertformel:

$$x = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2}{n_1 + n_2}. \tag{1}$$

Es sollen n_1 und n_2 *gleiche Vorzeichen* haben. Setzt man im äußersten Falle $n_2 = 0$ oder $n_1 = 0$, so fällt x mit x_1 oder x_2 selbst zusammen.

Drei viel gebrauchte Mittelwerte sind:

a) *Das arithmetische Mittel:*

$$x_a = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Es entsteht, wenn $n_1 = n_2$ angenommen wird

b) Das geometrische Mittel:

$$x_g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$$

Es existiert nur (als reelle Zahl), wenn x_1 und x_2 gleiche Vorzeichen haben, weil andernfalls der Radikand negativ, also x_g imaginär wird. Außerdem ist anzumerken, daß auch x_g dasselbe Vorzeichen wie x_1 und x_2 zu erhalten hat.

c) Das harmonische Mittel:

$$x_h = \frac{2\,x_1\,x_2}{x_1 + x_2},$$

welches aber nur dann einen Mittelwert gibt, wenn x_1 und x_2 gleiche Vorzeichen haben. Denn nur dann haben die beiden Differenzen:

$$x_h - x_1 = \frac{x_1\,(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2}; \quad x_2 - x_h = \frac{x_2\,(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2}$$

gleiche Vorzeichen.

Aus (1) lassen sich leicht zwei andere viel benutzte Mittelwertformeln ableiten. Man setze dort:

$$\lambda = \frac{n_2}{n_1 + n_2}, \quad \mu = \frac{n_1}{n_1 + n_2},$$

so sind λ und μ positive echte Brüche, da n_1 und n_2 gleiche Vorzeichen haben.

Überdies ist:

$$\lambda + \mu = 1; \qquad (\mu = 1 - \lambda;\ \lambda = 1 - \mu)$$

Gleichung (1) geht über in:

$$x = \mu x_1 + \lambda x_2.$$

Eliminiert man hier erst λ und dann μ, so entstehen die beiden neuen Mittelwertformeln:

$$x = x_1 + \lambda\,(x_2 - x_1), \qquad (1 > \lambda > 0) \quad (2)$$

$$x = x_2 + \mu\,(x_1 - x_2). \qquad (1 > \mu > 0) \quad (3)$$

Aus (1) ergibt sich ferner durch eine sehr naheliegende Verallgemeinerung eine Mittelwertformel für beliebig viele algebraische Zahlen $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, nämlich:

$$x = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_\mu x_\mu}{n_1 + n_2 + \cdots + n_\mu}, \qquad (4)$$

vorausgesetzt, daß die n sämtlich positiv oder sämtlich negativ sind.

Zum Beweise ziehe man in (4) von beiden Seiten eine beliebige Zahl a ab. Es folgt sehr leicht:

$$x - a = \frac{n_1\,(x_1 - a) + n_2\,(x_2 - a) + \cdots + n_\mu\,(x_\mu - a)}{n_1 + n_2 + \cdots + n_\mu}.$$

Wird hier für a die kleinste unter den Zahlen $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ gesetzt, so werden alle Differenzen im Zähler positiv, außer der einen, welche verschwindet (oder den mehreren, falls etwa der kleinste Wert öfter als einmal vorkommen sollte). Da ferner die n alle dasselbe Vorzeichen haben, so ist $x - a$ positiv, d. h. es ist x größer als der kleinste Wert. Ebenso wird gezeigt, daß x kleiner ist als der größte Wert. Mithin ist x wirklich ein Mittelwert.

Sind im besonderen alle n einander gleich, so entsteht das verallgemeinerte arithmetische Mittel:

$$x_a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\mu}{\mu}.$$

Schließlich sei bemerkt, daß bei Gebrauch des Summenzeichens [15] die Formel (4) nach Multiplikation mit dem Nenner und Vertauschung beider Seiten auch so geschrieben werden kann:

$$\sum_\lambda n_\lambda x_\lambda = x \sum_\lambda n_\lambda. \tag{5}$$

Hier können die x_λ irgendwelche algebraische Zahlen sein, wogegen die n sämtlich einerlei Vorzeichen haben sollen. Dann ist x ganz gewiß ein Mittelwert der x_λ.

12. Reelle, imaginäre und komplexe Zahlen. Absolute und algebraische Zahlen heißen reell im Gegensatz zu den (rein) imaginären Zahlen, d. h. Zahlen von der Form: $bi = b\sqrt{-1}$. Komplex nennt man Zahlen von der Form: $a + bi$ mit dem reellen Bestandteil a und dem imaginären Bestandteil bi. Von den komplexen Zahlen wird ernstlich nur der fünfte Abschnitt handeln. Wo sie sonst erwähnt werden, geschieht es nur gelegentlich, da im übrigen stillschweigend nur reelle und zwar in der Regel algebraische Zahlen vorausgesetzt werden.

Der Zahlbegriff hat noch manche anderen Erweiterungen und Umbildungen erfahren (Quaternionen, Vektoren, Mengenlehre usw.). Hierüber sei nur ganz allgemein bemerkt, daß, wer die tiefen Grundgedanken der Differential- und Integralrechnung an den reellen Zahlen wirklich erfaßt hat, auch imstande sein wird, sie auf andere Zahlengattungen anzuwenden, soweit eine solche Möglichkeit vorliegt, was nicht immer der Fall ist.

13. Die Fakultäten. Das Zeichen $n!$ (gespr.: n Fakultät) steht für das Produkt der n ersten ganzen Zahlen. Es soll sein:

$$0! = 1; \quad 1! = 1; \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2; \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6;$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

und allgemein

$$\mathbf{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.} \tag{1}$$

Bekanntlich drückt $n!$ die Anzahl der Permutationen oder Umstellungen aus, welche man mit n Elementen vornehmen kann. Man achte auch auf die Formel:

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+\mu)=\frac{(n+\mu)!}{n!}, \qquad (2)$$

welche das Produkt beliebig vieler aufeinanderfolgender ganzer Zahlen in den Quotienten zweier Fakultäten verwandelt.

14. Rekursionsformeln oder Reduktionsformeln oder Übergangsformeln beziehen sich meistens auf Ausdrücke, in denen eine ganze Zahl n vorkommt. Sie sollen den Übergang von n auf $n+1$ (bzw. von $n-1$ auf n) vermitteln oder auch rückwärts von n auf $n-1$ (bzw. von $n+1$ auf n). Für letzteres bedarf es aber nur einer Umkehrung des ersteren. So gibt es für die Fakultäten offenbar die Rekursionsformel:

$$(n+1)!=(n+1)\cdot n! \quad \text{oder} \quad n!=n(n-1)! \qquad (3)$$

zum Übergang von $n!$ auf $(n+1)!$ oder von $(n-1)!$ auf $n!$ Die Umkehrungen:

$$n!=\frac{(n+1)!}{n+1} \quad \text{oder} \quad (n-1)!=\frac{n!}{n} \qquad (4)$$

dienen zum Übergang von $(n+1)!$ auf $n!$ oder von $n!$ auf $(n-1)!$ In gleicher Weise ist für die Potenzen:

$$\alpha) \quad a^{n+1}=a\cdot a^n; \qquad \beta) \quad a^{n-1}=\frac{a^n}{a}. \qquad (5)$$

Man wird namentlich in der Integralrechnung noch sehr viele Rekursionsformeln antreffen, z. B. [293]. Setzt man in ihnen für n zuerst den kleinsten in Betracht kommenden Wert, etwa 0, und ist für diesen der betreffende Ausdruck bekannt, so ergibt er sich auch für $n=1$, dann für $n=2$, dann für $n=3$, usw., so daß man ihn von Einheit zu Einheit fortschreitend für jedes n finden kann. Die Rekursionsformel dient dann als Ersatz der für ein beliebiges n geltenden Formel. So fange man z. B. mit $0!=1$ an und benutze (3). Es folgt:

$$1!=1\cdot 0!=1; \quad 2!=2\cdot 1!=2; \quad 3!=3\cdot 2!=6; \quad 4!=4\cdot 3!=24$$

usw. Eine weitere ausgezeichnete Anwendung finden die Rekursionsformeln in dem viel benutzten „**Schluß von n auf $n+1$**“, welcher Bernoulli's Namen trägt. Es sei „durch Induktion“ eine Formel gefunden, in der eine ganze Zahl n vorkommt. Sie heiße in diesem Sinne A_n. Man wisse also bestimmt, daß A_n für den kleinsten in Betracht kommenden Wert von n, etwa für $n=0$, vielleicht auch, daß $A_1, A_2, A_3, \ldots$ richtig sei. Es fehle aber noch der strenge Beweis, daß sie auch für ein beliebiges n richtig sei.

Dann eben setzt der Schluß von n auf $n+1$ ein. Man nimmt nämlich an, A_n sei richtig für irgendein n und zeigt mittels einer Rekursionsformel, daß unter dieser Voraussetzung auch A_{n+1} richtig ist. Da nun, wie man schon weiß, A_0 stimmt, so stimmt auch A_1; da somit A_1 stimmt, so stimmt auch A_2; da A_2 stimmt, so stimmt auch A_3 usw. Es stimmt also auch ganz allgemein die Formel A_n.

Beispiele für den Bernoullischen Schluß von n auf $n+1$ siehe unter anderen in [19], [31].

Die Rekursionsformeln haben übrigens in der Mathematik oft erhebliche Begriffserweiterungen zur Folge gehabt durch geflissentliche Anwendung über ursprünglich gesteckte Grenzen hinaus. Als klassisches Beispiel diene der Potenzbegriff, der ursprünglich durch die Gleichung:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots \quad (n \text{ Faktoren}) \tag{6}$$

an ganzzahlige positive Exponenten gebunden war. Demzufolge darf die Rekursionsformel (5)β eigentlich nur bis $n=2$ angewendet werden. Geht man aber doch weiter bis $n = 1, 0, -1, -2, \ldots$, so folgt:

$$a^0 = \frac{a^1}{a} = \frac{a}{a} = 1; \quad a^{-1} = \frac{a^0}{a} = \frac{1}{a}; \quad a^{-2} = \frac{a^{-1}}{a} = \frac{1}{a^2}$$

usw. Allgemein daher:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \tag{7}$$

Ganz ebenso ist man bei Fakultäten vorgegangen unter Benutzung von (4)

$$0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1; \quad (-1)! = \frac{0!}{0} = \frac{1}{0} = \pm\infty.$$

$$(-2)! = \frac{(-1)!}{-1} = \frac{\pm\infty}{-1} = \mp\infty; \quad -(3)! = \frac{(-2)!}{-2} = \frac{\mp\infty}{-2} = \pm\infty$$

usw. Also: Die Fakultäten negativer ganzer Zahlen sind unendlich.

Aber man verstehe recht! Solche Erweiterungen über ursprüngliche Grenzen hinaus, wie sie hundert- und tausendmal vorgekommen sind, haben zwar die Mathematik unermeßlich gefördert, aber trotzdem sind und bleiben sie ihrer Natur nach neue Definitionen, die ganz gewiß äußerst zweckmäßig aufgestellt, aber doch nichts anderes sind als Definitionen, nämlich Worterklärungen.

Man sei sich hierüber vollkommen klar, so werden auch die mathematischen Begriffe vollkommen klar werden.

15 I. Der große griechische Buchstabe Π gilt allgemein als Zeichen, als Symbol für ein Produkt. Der Ausdruck

$$\prod_{q=\alpha}^{q=\beta} a_q$$

bedeutet, daß a_q von der ganzen Zahl q abhänge, daß man für q alle ganzen Zahlen zwischen α und β einschließlich α und β selbst zu setzen und alle so berechneten a_q zu multiplizieren habe. So ist z. B.

$$n! = \prod_{q=1}^{q=n} q,$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n) = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=n}(1-x^\lambda).$$

II. Der große griechische Buchstabe $\sum$ dient ebenso als Zeichen oder Symbol für eine Summe. Etwa:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{p=0}^{p=n} x^p$$

(1 ist nämlich $= x^0$). Wenn das allgemeine Glied einer Summe zwei Indizes hat [7], so schreibt man wohl als Doppelsumme:

$$\sum_p \sum_q a_{p,q}$$

nebst näherer Angabe über die in Betracht kommenden Werte von p und q. Doch kann man es auch hier, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, bei einem Summenzeichen bewenden lassen:

$$\sum_{p,q} a_{p,q}.$$

Doppelsummen entstehen z. B. durch Multiplizieren einfacher Summen nach dem distributiven Gesetz [3].

$$\sum_p a_p \cdot \sum_q b_q = \sum_p \sum_q (a_p \cdot b_q).$$

Selbstverständlich kann man mittels des Summenzeichens auch dreifache, vierfache ... Summen ausdrücken. Ebenso selbstverständlich werden in gleicher Weise mehrfache Produkte behandelt.

III. Der große griechische Buchstabe Δ gilt als Symbol einer Differenz im Sinne einer Änderung (§ 2 und § 3). Hat eine „Veränderliche“ erst den Wert x, dann den Wert x_1, so bezeichnet man die „Differenz von x“ meist als:

$$\Delta x = x_1 - x.$$

Es folgt dann umgekehrt: $x_1 = x + \Delta x, \quad x = x_1 - \Delta x.$

Bei dem Gebrauch des Symbols Δ gelten folgende einfache Regeln:

$$\Delta c = 0, \qquad (1) \qquad\qquad \Delta(u \pm c) = \Delta u, \qquad (2)$$

$$\Delta(au) = a\Delta u, \qquad (3) \qquad\qquad \Delta\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{\Delta u}{a}, \qquad (4)$$

$$\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v, \qquad (5)$$

$$\Delta(u \cdot v) = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v, \tag{6}$$

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}. \tag{7}$$

Es bedeuten hier a und c keine Veränderlichen, sondern Konstanten, also Zahlen, welchen man nur einen, wenn auch vielleicht willkürlichen Wert beilegen will. Oder auch, es sollen Δa und Δc verschwinden, während $\Delta u = u_1 - u$ und $\Delta v = v_1 - v$ beliebige Differenzen von u und v sein sollen. Die Beweise sind sehr einfach, z. B.:

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= u_1 v_1 - uv = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv \\ &= uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv \\ &= v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v.\end{aligned}$$

Diese Differenzenformeln werden später (§ 14) in sehr wichtige Differentialformeln verwandelt werden.

16. Unbestimmte Zahlenausdrücke bleiben ganz unbestimmbar, obgleich die Zahlen, von welchen sie abhängen, bestimmte Werte haben. Die einfachsten Formen, unter denen sie auftreten, sind:

$$\frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Daß ein Bruch unbestimmt wird, dessen Zähler und dessen Nenner $= 0$ sind, geht aus der Definition eines Bruches hervor als einer Zahl, deren Produkt mit dem Nenner gleich dem Zähler ist und aus dem Satze, daß jede Zahl mit 0 multipliziert das Produkt 0 ergibt. Es ist $a \cdot 0 = 0$, welchen Wert auch a habe. Entsprechend läßt sich die Unbestimmtheit der anderen sechs Ausdrücke dartun.

Die Differential- und Integralrechnung hat sich mit solchen Ausdrücken unter Anwendung des limes Begriffs [87] sehr ernstlich zu befassen.

Mehrdeutige Zahlenausdrücke sind zum ersten Male beim Wurzelausziehen, später aber auch bei vielen anderen mathematischen Operationen aufgetreten. Die arcus-Funktionen z. B. sind sogar unendlich vieldeutig [53].

Auf die Mehrdeutigkeit muß immer sehr sorgfältig Rücksicht genommen werden. Oft hebt man sie auf durch Beschränkung auf einen Wert und Abweisung der anderen; so werden Quadratwurzeln meist stillschweigend als positiv genommen, obgleich sie ebensogut negativ sein können. Doch muß man hierin vorsichtig sein, sonst kann gar leicht ein Irrtum oder ein scheinbarer Widerspruch mit unterlaufen. Z. B. die Gleichung:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 1$$

hat die einzige Lösung $x = +4$, welche aber auch nur dann stimmt,

wenn man die erste Wurzel positiv $= \sqrt{4+5} = +3$ und die zweite Wurzel negativ $= \sqrt{4} = -2$ nimmt. Vgl. [270].

Unmögliche oder leere Zahlenausdrücke haben gar keinen Wert, was freilich durchaus von dem Umfang abhängt, in welchem man den Zahlbegriff nimmt. Läßt man nur die natürlichen Zahlen gelten, so werden z. B. $5-8$ oder $\frac{5}{8}$ unmöglich, während sie im Gebiete der reellen Zahlen die Werte $5-8=-3$, $\frac{5}{8}=0{,}625$ besitzen. Ebenso ist $\sqrt{-5}$ im Gebiete der reellen Zahlen unmöglich.

Das wohlberechtigte Streben, unmögliche Zahlenausdrücke unmöglich zu machen, hat bekanntlich dazu geführt, bis zu den komplexen Zahlen vorzudringen, denn innerhalb dieser Zahlen gibt es keine algebraische Unmöglichkeit mehr. Wohl aber tritt die Unmöglichkeit oder besser gesagt die Leere jedesmal neu auf, wenn ein Symbol zunächst für einen engeren Zahlenkreis geschaffen worden ist und später erweitert werden soll. In [13] ist deutlich genug auseinandergesetzt, welche Gesichtspunkte dabei in Frage kommen.

17. Die Binomialkoeffizienten setzen zwei Zahlen voraus, von denen die eine n die Ordnung, die andere p die Klasse heißt. Sie werden durch das abkürzende Symbol ausgedrückt:

$$\binom{n}{p} \tag{1}$$

(gesprochen n tief p) und durch die Formel definiert:

$$\binom{n}{p} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-(p-1))}{1\cdot 2\cdots p}, \tag{2}$$

z. B.

$$\binom{13}{5} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 13\cdot 11\cdot 9 = 1287.$$

Hier kommt der Schluß von [16] in Betracht, denn die Definition (2) hat nur dann einen Sinn, wenn die Klasse p eine absolute oder positive ganze Zahl ist. Die Ordnung n dagegen darf irgendeine reelle Zahl sein, z. B.:

$$\binom{-5}{3} = \frac{(-5)(-6)(-7)}{1\cdot 2\cdot 3} = -35, \quad \binom{+\frac{3}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}}{1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{1}{16}.$$

Doch soll von nun an in dieser Nummer [17] auch n stets als positive oder absolute ganze Zahl vorausgesetzt werden. Dann bedeutet (1) bekanntlich die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen zur p^{ten} Klasse. Auch lassen sich dann die Binomialkoeffizienten wie folgt durch Fakultäten ausdrücken.

Es ist nach [13 2] der Zähler von (2) $= n!:(n-p)!$ Der Nenner ist $= p!$ Daher:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{3}$$

Ferner folgen im Sinne von (14) die vier Rekursionsformeln zum Übergang von n auf $n+1$ oder $n-1$ und von p auf $p+1$ oder $p-1$. Sie sind:

$$\begin{aligned}
&\alpha)\ \binom{n+1}{p} = \binom{n}{p}\cdot\frac{n+1}{n+1-p}, \qquad \beta)\ \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}\cdot\frac{n-p}{n},\\
&\gamma)\ \binom{n}{p+1} = \binom{n}{p}\cdot\frac{n-p}{p+1}, \qquad \delta)\ \binom{n}{p-1} = \binom{n}{p}\cdot\frac{p}{n+1-p}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Die Beweise ergeben sich am schnellsten aus (3) unter Anwendung von [14 3] und [14 4] Es ist z. B.:

$$\binom{n+1}{p} = \frac{(n+1)!}{p!\,(n+1-p)!} = \frac{n!\,(n+1)}{p!\,(n-p)!\,(n+1-p)} = \binom{n}{p}\cdot\frac{n+1}{n+1-p}.$$

Entsprechend werden die anderen Formeln hergeleitet. Man kann (4δ) zu einer Erweiterung der Definition eines Binomialkoeffizienten benutzen, auch im Sinne von [14]. Setzt man nämlich $p=1$, so folgt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} = \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n},\ \text{d. h.}\ \boldsymbol{\binom{n}{0} = 1}. \quad (n \text{ beliebig}) \tag{5}$$

Von (5) ausgehend führt (4γ) zur rekursorischen Berechnung aller zu einer gegebenen Ordnung n gehörenden Binomialkoeffizienten und dann natürlich auf (2) oder (3) zurück:

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{0}\cdot\frac{n}{1} = \frac{n}{1};\quad \binom{n}{2} = \binom{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} \text{ usw.}$$

Nach (2) ist offenbar allgemein:

$$\binom{n}{n} = 1 \tag{6}$$

und

$$\binom{n}{p} = 0. \qquad (p > n) \tag{7}$$

Denn ist $p = n$, so steht im Zähler und Nenner von (2) dasselbe, nämlich $p!$ Und ist $p > n$, so verschwindet ein Faktor im Zähler. Daher:

Bei gegebener ganzzahliger Ordnung n gibt es nur $n+1$ „eigentliche", d. h. nicht verschwindende Binomialkoeffizienten, nämlich:

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n-1},\ \binom{n}{n}. \tag{8}$$

Der erste und der letzte sind nach (5) und (6) einander gleich, nämlich $=1$, aber auch der zweite und vorletzte, der dritte und vorvorletzte usw. stimmen überein. Ganz allgemein ist nämlich:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \tag{9}$$

wie aus (3) folgt, wenn p durch $n-p$, also $n-p$ durch $n-(n-p)=p$ ersetzt wird.

Die Berechnung der Reihe (8) braucht also nur bis zur Mitte geführt zu werden. Für $n = 13$ gestaltet sie sich unter Benutzung von (5), (9) und (4γ) wie folgt:

$$\binom{13}{0} = \binom{13}{13} = \mathbf{1},$$

$$\binom{13}{1} = \binom{13}{12} = \binom{13}{0} \cdot \frac{13}{1} = \mathbf{13},$$

$$\binom{13}{2} = \binom{13}{11} = \binom{13}{1} \cdot \frac{12}{2} = 13 \cdot 6 = \mathbf{78},$$

$$\binom{13}{3} = \binom{13}{10} = \binom{13}{2} \cdot \frac{11}{3} = \frac{78 \cdot 11}{3} = 26 \cdot 11 = \mathbf{286},$$

$$\binom{13}{4} = \binom{13}{9} = \binom{13}{3} \cdot \frac{10}{4} = 286 \cdot \frac{10}{4} = \mathbf{715},$$

$$\binom{13}{5} = \binom{13}{8} = \binom{13}{4} \cdot \frac{9}{5} = 715 \cdot \frac{9}{5} = 143 \cdot 9 = \mathbf{1287},$$

$$\binom{13}{6} = \binom{13}{7} = \binom{13}{5} \cdot \frac{8}{6} = 1287 \cdot \frac{4}{3} = 429 \cdot 4 = \mathbf{1716},$$

also für $n = 13$:

$$\begin{aligned} &\binom{13}{p} = \quad 1,\quad 13,\quad 78,\quad 286,\quad 715,\quad 1287,\quad 1716, \\ &p = \begin{cases} 0, & 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \\ 13, & 12, \quad 11, \quad 10, \quad 9, \quad 8, \quad 7. \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

Man sieht, wie die Koeffizienten zur Mitte hin wachsen und dann ebenso wieder abnehmen. Offenbar ist dies für alle Werte von n so. Will man nicht eine bestimmte Ordnung n herausgreifen, sondern von $n = 0$ anfangend, da nur ein einziger Binomialkoeffizient, nämlich $\binom{0}{0} = 1$ existiert, alle Binomialkoeffizienten bis zu einer beliebigen Ordnung n rekursorisch berechnen, so kann außer (4γ) auch noch (4α) benutzt werden. Viel, viel besser aber eignet sich hierzu eine überraschend einfache Kombination von (4α) und (4δ), nämlich:

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}, \tag{11}$$

welche anzeigt, daß man nur benachbarte Koeffizienten der Ordnung n zu addieren braucht, um der Reihe nach die Koeffizienten der Ordnung $n + 1$ zu erhalten (bis auf den ersten und den letzten, welche aber $= 1$ sind). So folgt aus (10) sofort die Reihe für $n = 14$:

$$\begin{aligned} &\binom{14}{p} = \quad 1,\quad 14,\quad 91,\quad 364,\quad 1001,\quad 2002,\quad 3003,\quad 3432, \\ &p = \begin{cases} 0, & 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \\ 14, & 13, \quad 12, \quad 11, \quad 10, \quad 9, \quad 8, \end{cases} \quad 7, \end{aligned} \tag{12}$$

Es zeigt (11) durch den Schluß von n auch $n+1$, daß die Binomialkoeffizienten ganze Zahlen sind, was man zwar der Bruchform (2) oder (3) nicht ohne weiteres ansehen kann, was aber aus der zu Anfang gegebenen Deutung folgt. Ihre Zusammenstellung in Dreiecksform heißt das Pascalsche Dreieck; jeder Koeffizient ist die Summe der links und rechts über ihm stehenden, wie es (11) verlangt.

(13)

n	Pascalsches Dreieck
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
.	. . . .

Alle zu derselben Klasse p gehörenden Koeffizienten stehen in einer schrägen Seite des Dreiecks von links unten nach rechts oben. Soll p besser hervortreten, so wähle man lieber folgende rechteckige Anordnung:

(14)

$n =$ \ $p =$	Klasse: 0	1	2	3	4	5	6	7
Ordnung: 0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.

18. Ist die Ordnung n keine absolute oder positive ganze Zahl, so bricht die immer mit $\binom{n}{0} = 1$ anfangende Reihe der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{0}, \quad \binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2} \cdots \tag{1}$$

nie ab, sondern ist unbegrenzt fortsetzbar, weil in [17 2] nie ein Faktor im Zähler verschwinden kann. Ist z. B. n zwar ganzzahlig, aber negativ, so sind die Koeffizienten auch ganzzahlig, aber abwechselnd positiv und negativ. Man ersetze nämlich in [17 2] n durch $-n$, so wird:

$$\binom{-n}{p} = \frac{(-n)\cdot(-n-1)\cdots(-n-(p-1))}{1\cdot 2\cdots p} = (-1)^p \frac{n\cdot(n+1)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdots p}$$
$$= (-1)^p \cdot \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots n}{1\cdot 2\cdots p},$$

d. h. nach [17 2] und [17 9].

$$\binom{-n}{p} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p} = (-1)^p \binom{n+p-1}{n-1}. \tag{2}$$

Erstes Beispiel $n = 1$, $\binom{-1}{p} = (-1)^p \cdot \binom{p}{0} = (-1)^p$, also:

$$\begin{array}{rrrrrrr} \binom{-1}{p} = & +1, & -1, & +1, & -1, & +1, & -1 \;\cdots \\ p = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \cdots \end{array} \tag{3}$$

Zweites Beispiel $n = 2$, $\binom{-2}{p} = (-1)^p \cdot \binom{p+1}{1} = (-1)^p \cdot (p+1)$

$$\begin{array}{rrrrrrr} \binom{-2}{p} = & +1, & -2, & +3, & -4, & +5, & -6 \cdots \\ p = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \cdots \end{array} \tag{4}$$

Drittes Beispiel $n = 3$,

$$\binom{-3}{p} = (-1)^p \binom{p+2}{2} = (-1)^p \cdot \frac{(p+2)(p+1)}{2}. \tag{5}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} \binom{-3}{p} = & +1, & -3, & +6, & -10, & +15, & -21 \cdots \\ p = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \cdots \end{array}$$

Ist die Ordnung n überhaupt keine ganze Zahl, weder eine positive noch eine negative, so sind auch die Binomialkoeffizienten (1) keine ganzen Zahlen, den ersten ausgenommen, welcher immer $= 1$ ist. Es sei z. B. $n = +\frac{1}{2}$, so:

$$\binom{+\frac{1}{2}}{p} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(p-1)\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p} = (-1)^p \frac{-1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2p}$$

oder $n = -\frac{1}{2}$, so:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{p} = (-1)^p \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2p}.$$

Da im Zähler nur ungerade, im Nenner nur gerade Zahlen stehen, so können die Koeffizienten keine ganzen Zahlen sein. (Wohl aber lassen sich die Brüche so kürzen, daß im Nenner nur noch Potenzen von 2 stehen), z. B.:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{7} = (-1)^7 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} = -\frac{429}{2^{11}} = -\frac{429}{2048}.$$

Schließlich sei noch als von erheblicher Wichtigkeit bemerkt, daß bei gegebener Klasse p der Binomialkoeffizient nach [17 2] eine ganze Funktion p^{ten} Grades der Ordnung n ist. Multipliziert man im Zähler die Faktoren nach dem distributiven Gesetz aus, so ergibt sich nämlich:

$$\binom{n}{0} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2},$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$$

usw. Man merke wohl an, daß das höchste Glied allgemein ist $= \frac{n^p}{p!}$.

19. Der binomische Lehrsatz handelt von der Entwicklung der Potenzen eines Binoms $a + b$ nach den Potenzen seiner beiden Glieder a und b. Es ist:

$$(a+b)^0 = 1,$$

$$(a+b)^1 = a + b,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

usw. Die Koeffizienten sind Binomialkoeffizienten. Also:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n \tag{1}$$

oder kürzer mittels des Summenzeichens, wenn das erste und letzte Glied wie die übrigen geschrieben werden, nach [17 5] und [17 6]:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p. \tag{2}$$

Der Beweis kann durch den Schluß von n auf $n + 1$, vermittelst der Rekursionsformel [14 5α]:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a+b)^n a + (a+b)^n b$$

erfolgen. Es sei (1) für irgendein n richtig, so ergibt sich hiernach

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \cdots + a b^n$$
$$+ a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^n + b^{n+1}$$
$$= a^{n+1} + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right\} a^n b + \left\{\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right\} a^{n-1} b^2 + \cdots$$
$$+ \left\{\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right\} a b^n + b^{n+1}$$

oder nach Anwendung der schönen Formel [17 11] auf alle geschweiften Klammern

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \cdots$$
$$+ \binom{n+1}{n} a b^n + b^{n+1},$$

also in der Tat wieder Formel (1), nur $n+1$ statt n geschrieben. Formel (1) gilt daher ganz allgemein.

Jetzt erkennt man auch den Sinn von [17 9] als der Vertauschbarkeit von a und b in der Summe $(a+b)$ entsprechend. Übrigens kann die Formel (2) mittels [17 3] so abgeändert werden, daß diese Vertauschbarkeit offen zutage tritt. Man erhält dann zunächst:

$$(a+b)^n = \sum \frac{n!}{p!\,(n-p)!} a^{n-p} b^p, \tag{3}$$

oder noch besser, wenn α statt $n-p$, β statt p geschrieben und durch $n!$ dividiert wird,

$$\frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{a^\alpha}{\alpha!} \cdot \frac{b^\beta}{\beta!} \qquad (\alpha+\beta=n) \tag{4}$$

(die Gleichung $\alpha+\beta=n$ soll bedeuten, daß für α und β auf alle möglichen Weisen je zwei positive ganze Zahlen (0 eingeschlossen) zu setzen sind, deren Summe $= n$ ist).

Oft wird in (1) die Zahl a, also auch jede ihrer Potenzen $= 1$ gesetzt. Der binomische Lehrsatz erhält dann die etwas vereinfachte Form, in der x statt b geschrieben ist:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + x^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} x^p. \tag{5}$$

Diese Formel (5) ersetzt sogar die Formel (1) durchaus; denn wenn man in (1) setzt $b = ax$ und beide Seiten durch a^n dividiert, so entsteht (5). Oder wenn man umgekehrt in (5) setzt: $x = b:a$ und beide Seiten mit a^n multipliziert, so entsteht (1).

Über den binomischen Lehrsatz für beliebige Exponenten siehe [212].

20. Der polynomische Lehrsatz. Die Form [19 4] hat den besonderen Vorzug, daß sie mit spielender Leichtigkeit durch Induktion den entsprechenden Lehrsatz für ein Trinom oder allgemein für ein Polynom erkennen läßt:

$$\frac{(a+b+c+\cdots)^n}{n!} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} \frac{a^\alpha}{\alpha!}\cdot\frac{b^\beta}{\beta!}\cdot\frac{c^\gamma}{\gamma!}\cdots, \tag{1}$$

$$(a+b+c+\cdots)^n = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\, a^\alpha\cdot b^\beta\cdot c^\gamma\ldots \tag{2}$$

mit der Maßgabe, daß für α, β, γ, ... ganze Zahlen (einschließlich 0) zu setzen sind, welche der Gleichung:

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots = n \tag{3}$$

genügen, und daß das Summenzeichen sich auf alle Lösungen dieser Gleichung (3) bezieht.

Ist z. B. $n=2$, so hat (3) nur zwei Gruppen von Lösungen. In der ersten Gruppe ist eine der Zahlen (etwa α) $=2$, und die übrigen sind sämtlich $=0$. In der zweiten Gruppe sind zwei Zahlen, (etwa α und β) $=1$, und die übrigen sind sämtlich $=0$, daher in etwas veränderter Schreibweise:

$$(a+b+c+\cdots)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab,$$

wobei das Summenzeichen jetzt so zu verstehen ist, daß es sich auf alle Quadrate bzw. Produkte je zweier Glieder des Polynoms bezieht, also:

$$\sum a^2 = a^2+b^2+c^2+\cdots; \quad \sum ab = ab+ac+bc+\cdots.$$

Ist $n=3$, so hat (3) drei Gruppen von Lösungen. Erste Gruppe: Eine Zahl, etwa $\alpha=3$, die übrigen $=0$. Zweite Gruppe: Eine Zahl, etwa α, $=2$, eine andere, etwa $\beta=1$, die übrigen $=0$. Dritte Gruppe: Drei Zahlen, etwa α, β, γ, $=1$, die übrigen $=0$. Die zugehörigen Koeffizienten in (2) werden

$$\frac{3!}{3!}=1,\quad \frac{3!}{2!\,1!}=3,\quad \frac{3!}{1!\,1!\,1!}=6.$$

Daher in gleichfalls abgeänderter Bezeichnung:

$$(a+b+c+\cdots)^3 = \sum a^3 + 3\sum a^2 b + 6\sum abc. \tag{5}$$

Um den polynomischen Lehrsatz (2) allgemein zu beweisen, wende man auch den Schluß von n auf $n+1$ an, aber nicht auf den Exponenten wie in [19], sondern auf die Anzahl der Glieder a, b, c, ... Zuerst gehe man daher von einem Binom auf ein Trinom über unter Benutzung des assoziativen Prinzips [3]. Also nach [19 4], wobei zunächst δ statt β geschrieben werden mag:

$$\frac{(a+b+c)^n}{n!} = \frac{(a+(b+c))^n}{n!} = \sum_{\alpha,\delta} \frac{a^\alpha}{\alpha!}\cdot\frac{(b+c)^\delta}{\delta!}\,. \qquad (\alpha+\delta=n)$$

Die abermalige Anwendung von [19 4] ergibt:

$$\frac{(b+c)^\delta}{\delta!} = \sum_{\beta, \gamma} \frac{b^\beta}{\beta!} \frac{c^\gamma}{\gamma!}, \qquad (\beta + \gamma = \delta)$$

daher nach Einsetzen:

$$\frac{(a+b+c)^n}{n!} = \sum \frac{a^\alpha}{\alpha!} \left(\sum \frac{b^\beta}{\beta!} \frac{c^\gamma}{\gamma!} \right), \qquad (\alpha + (\beta + \gamma) = n)$$

oder wenn nur ein Summenzeichen gesetzt wird:

$$\frac{(a+b+c)^n}{n!} = \sum \frac{a^\alpha}{\alpha!} \cdot \frac{b^\beta}{\beta!} \cdot \frac{c^\gamma}{\gamma!}. \qquad (\alpha + \beta + \gamma = n)$$

In gleich einfacher Weise geht man von einem dreigliedrigen zu einem viergliedrigen Ausdruck über usw.

Polynomialkoeffizienten. Der Formel (2) wegen wird ganz allgemein der Ausdruck:

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} \qquad (\alpha + \beta + \gamma + \cdots = n) \quad (6)$$

als ein Polynomialkoeffizient bezeichnet. Er wird nach [17 3] zu einem Binomialkoeffizienten, wenn im Nenner nur zwei Fakultäten $\alpha!$ und $\beta! = (n-\alpha)!$ stehen. Doch kann auch ein beliebiger Polynomialkoeffizient sehr einfach durch Binomialkoeffizienten ausgedrückt werden wie folgt:

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\,(n-\alpha)!} \cdot \frac{(n-\alpha)!}{\beta!\,\gamma!\ldots}.$$

Der erste Bruch rechts ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{\alpha}$. Der zweite Bruch rechts ist ein Polynomialkoeffizient von der Ordnung $n - \alpha$, (da $\beta + \gamma + \cdots = n - \alpha$ ist). Verfährt man mit ihm ebenso, dann abermals ebenso usw., so folgt:

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} = \binom{n}{\alpha} \cdot \binom{n-\alpha}{\beta} \cdot \binom{n-(\alpha+\beta)}{\gamma} \cdots.$$

Der letzte Faktor rechts ist $= 1$, weil seine Ordnung gleich seiner Klasse ist.

Beispiel:

$$\frac{17!}{3!\,4!\,5!\,5!} = \binom{17}{3} \cdot \binom{14}{4} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5}$$

$$= 680 \cdot 1001 \cdot 252 \cdot 1 = 171\,531\,360.$$

Da die Binomialkoeffizienten ganzzahlig sind, so gilt hiernach ein gleiches für die Polynomialkoeffizienten. Bei gegebener Ordnung n ist der kleinste $= 1$, der größte $= n!$ Ersterer wird erhalten, wenn eine der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots = n$, also die übrigen $= 0$ sind, letzterer dagegen, wenn n dieser Zahlen $= 1$ sind und die übrigen (falls noch solche vorhanden) $= 0$.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Binomial- und Polynomialkoeffizienten zwar von dem binomischen und polynomischen Lehrsatz ihren Namen haben, daß sie aber auch in vielen anderen Formeln angetroffen werden, z. B. in [24]. Sie sind für die höhere Mathematik durchaus unentbehrlich.

Aufgaben zu § 1.

1. Ist a, b, c, d eine Gruppe und a_1, b_1, c_1, d_1 eine andere Gruppe von je vier Zahlen und setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1 &= a_2, \\ ab_1 - ba_1 + cd_1 - dc_1 &= b_2, \\ ac_1 - bd_1 - ca_1 + db_1 &= b_2, \\ ad_1 + bc_1 - cb_1 - da_1 &= d_2, \end{aligned}$$

so wird identisch:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 + d_1{}^2) \equiv a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2 + d_2{}^2.$$

2. Die Gleichung [17 11] ist der dem Wert $p = 1$ entsprechende einfachste Fall der Formel

$$\binom{m+n}{p} = \binom{m}{p}\binom{n}{0} + \binom{m}{p-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{p-2}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{m}{0}\binom{n}{p}.$$

Sie soll durch Schluß von $p-1$ auf p als richtig erwiesen werden.

3. Es soll auch ohne [17 11] bewiesen werden, daß das Produkt von p aufeinander folgenden ganzen Zahlen durch $p!$ teilbar ist.

4. Es ist zu beweisen, daß das arithmetische Mittel

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

($a_1, a_2, \ldots a_n$ sollen absolut sein) größer ist als das geometrische Mittel $y = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (Satz von Cauchy).

§ 2. Differenzen- und Summenrechnung.

21. Die Differenzen- und Summenformeln dieses Paragraphen sollen in den folgenden Abschnitten durch Einwirkung des Stetigkeitsbegriffes in Differential- und Integralformeln verwandelt werden.

Zu diesem Hauptgrunde ihrer Vorwegnahme kommt aber auch in Betracht, daß sie ein an sich wohlgeordnetes Ganzes von eigener erheblicher Wichtigkeit bilden.

Vorausgesetzt wird eine Reihe von $n+1$ Zahlen:

$$x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \tag{1}$$

etwa geometrisch veranschaulicht als Abszissen beliebig vieler Punkte $P, P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ einer Geraden. Dabei sei noch bemerkt:

Erstens: Es ist im allgemeinen nicht erforderlich, daß die Zahlen in (1) der Größe nach geordnet sind, so daß jede größer ist als die vorhergehende und kleiner als die folgende (oder umgekehrt). Die Aneinanderreihung in (1) soll vielmehr beliebig gegeben sein.

Zweitens. Bei der ersten Zahl x ist der Index als überflüssig fallen gelassen worden. Doch soll vorbehalten bleiben, ihn als den Index 0 jederzeit wieder aufzunehmen, derart, daß x dasselbe sein soll wie x_0. Entsprechendes gilt für die jetzt einzuführenden Differenzen.

22. Die erste Differenz. Das äußere Zeichen der Differenzenrechnung ist der Buchstabe Δ, vgl. [15]. Es sollte:

$$\Delta x = x_1 - x \tag{1}$$

als Änderung einer Größe aufgefaßt werden, welche erst den Wert x, dann den Wert x_1 hat. Sie ist „die Differenz von x“ oder auch die erste Differenz von x. Sie alterniert [4] bei Umkehrung der Folge x, x_1 in die Folge x_1, x. Aus (1) folgt:

$$x_1 = x + \Delta x; \quad x = x_1 - \Delta x. \tag{2}$$

Die zweite Differenz. Sind drei Werte x, x_1, x_2 gegeben, so bilde man, der gewählten Folge Rechnung tragend, die beiden ersten Differenzen:

$$\Delta x = x_1 - x; \quad \Delta x_1 = x_2 - x_1 \tag{3}$$

und aus ihnen die zweite Differenz:

$$\Delta^2 x = \Delta(\Delta x) = \Delta x_1 - \Delta x \tag{4}$$

($\Delta^2 x$ wird, weil die 2 hier kein Potenzexponent ist, nicht Δ Quadrat x, auch nicht Δ hoch zwei x, sondern einfach Δ zwei x gesprochen).

Um die zweite Differenz unmittelbar durch die ursprünglichen Werte auszudrücken, setze man (3) in (4) ein. Es wird:

$$\Delta^2 x = (x_2 - x_1) - (x_1 - x) = x_2 - 2x_1 + x. \tag{5}$$

Im Gegensatz zur ersten alterniert die zweite Differenz also nicht, sondern bleibt absolut und algebraisch dieselbe, wenn die Folge x, x_1, x_2 in die Folge x_2, x_1, x umgekehrt wird. Ferner ergibt die Umkehrung von (3) und (4):

$$x_1 = x + \Delta x; \quad x_2 = x_1 + \Delta x_1 = (x + \Delta x) + \Delta x_1; \quad \Delta x_1 = \Delta x + \Delta^2 x,$$

also:

$$x_2 = (x + \Delta x) + (\Delta x + \Delta^2 x) = x + 2\Delta x + \Delta^2 x. \tag{6}$$

Die dritte Differenz. Sind vier Werte in der Folge: x, x_1, x_2, x_3 gegeben, so bilde man die drei ersten Differenzen:

$$\Delta x = x_1 - x, \quad \Delta x_1 = x_2 - x_1, \quad \Delta x_2 = x_3 - x_2; \tag{7}$$

sodann die zwei zweiten Differenzen:

$$\Delta^2 x = \Delta x_1 - \Delta x, \quad \Delta^2 x_1 = \Delta x_2 - \Delta x_1 \tag{8}$$

und zuletzt die dritte Differenz:

$$\Delta^3 x = \Delta(\Delta^2 x) = \Delta^2(\Delta x) = \Delta^2 x_1 - \Delta^2 x. \tag{9}$$

Soll auch sie durch die x selbst ausgedrückt werden, so setze man (7) in (8) und dann (8) in (9) ein. Es wird:

$$\Delta^2 x = x_2 - 2x_1 + x, \; \Delta^2 x_1 = x_3 - 2x_2 + x_1,$$

und:

$$\Delta^3 x = (x_3 - 2x_2 + x_1) - (x_2 - 2x_1 + x),$$

oder:

$$\Delta^3 x = x_3 - 3x_2 + 3x_1 - x. \tag{10}$$

Hiernach alterniert die dritte Differenz wieder bei Umkehrung der Folge. Ferner folgt aus (7), (8) und (9):

$$x_1 = x + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x_1, \quad x_3 = x_2 + \Delta x_2,$$

$$\Delta x_1 = \Delta x + \Delta^2 x, \quad \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta^2 x_1, \quad \Delta^2 x_1 = \Delta^2 x + \Delta^3 x$$

und hierauf durch Einsetzen:

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = x + 2\Delta x + \Delta^2 x, \quad \Delta x_2 = \Delta x + 2\Delta^2 x + \Delta^3 x,$$

und:

$$x_3 = (x + 2\Delta x + \Delta^2 x) + (\Delta x + 2\Delta^2 x + \Delta^3 x),$$

oder:

$$x_3 = x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x. \tag{11}$$

23. Reihen und ihre Differenzreihen. In gleicher Weise entstehen allgemein aus einer Reihe [21 1] von $n+1$ Zahlen zunächst n erste, dann $n-1$ zweite, $n-2$ dritte Differenzen usw. und zuletzt eine n^{te} Differenz. Mit ihr ist die Differenzenbildung abgeschlossen. Beispiel:

gegebene Reihe:	+ 4,		− 7,		− 9,		+ 1,		+ 6,		− 13,
erste Differenzreihe:		− 11,		− 2,		+ 10,		+ 5,		− 19,	
zweite Differenzreihe:			+ 9,		+ 12,		− 5,		− 24,		
dritte Differenzreihe:				+ 3,		− 17,		− 19,			
vierte Differenzreihe:					− 20,		− 2,				
fünfte Differenz:						+ 18.					

Jede Zahl in dieser „dreieckigen“ Anordnung ist die Differenz der links und rechts über ihr stehenden Zahlen (rechte Zahl — linke Zahl). Wenn aber, was ja auch möglich ist, die ursprüngliche Reihe nie aufhört, sondern unbegrenzt fortsetzbar ist, dann hört auch die Differenzenbildung nie auf, und zwar in doppelter Hinsicht. Erstens nämlich kann jede Differenzenreihe beliebig weit fortgesetzt werden, und zweitens folgt jeder Differenzreihe eine nächste. Also:

Gegebene Reihe	$x,$	$x_1,$	$x_2,$	$x_3, \ldots$	in inf.
Erste Differenzreihe	$\Delta x,$	$\Delta x_1,$	$\Delta x_2,$	$\ldots$	in inf.
Zweite Differenzreihe	$\Delta^2 x,$	$\Delta^2 x_1,$	$\ldots$		in inf.
Dritte Differenzreihe	$\Delta^3 x \ldots$				in inf.
. . . .					

Es gibt dann, wie man sagt, doppelt unendlich viele Differenzen:

$$\Delta^p x_n, \tag{1}$$

da p und n beliebige positive ganze Zahlen sein können. Um für p und n die 0 einzuschließen, hat man folgende Vereinbarungen zu treffen:

1. Wenn $p = 0$ ist, so soll $\Delta^p x_n = \Delta^0 x_n$ nichts anderes sein als x_n selbst. Die ursprüngliche Reihe gilt dann als ihre „nullte" Differenzreihe.

2. Wenn $n = 0$ ist, so soll $\Delta^p x_n = \Delta^p x_0$ nichts anderes sein als $\Delta^p x$ (vgl. die Festsetzung in [21]).

Es heiße ferner p die Klasse, n die Ordnung der allgemeinen Differenz (1).

24. Erste Aufgabe. Es sollen die ersten Glieder:

$$x, \quad \Delta x, \quad \Delta^2 x, \quad \Delta^3 x, \quad \ldots \tag{1}$$

aller Differenzreihen unmittelbar durch die Glieder:

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots \tag{2}$$

der gegebenen Reihe ausgedrückt werden.

Die Lösung ist für die einfachsten Fälle schon in [22] abgeleitet worden. Es war:

$$x = x, \quad \Delta x = x_1 - x, \quad \Delta^2 x = x_2 - 2x_1 + x, \quad \Delta^3 x = x_3 - 3x_2 + 3x_1 - x$$

Binomialkoeffizienten [17 13]! Also allgemein:

$$\boldsymbol{\Delta^p x = x_p - \binom{p}{1} x_{p-1} + \binom{p}{2} x_{p-2} \cdots \pm x.} \tag{3}$$

Diese Formel (3) ist nun durch den Schluß von p auf $p+1$ zu beweisen. Zunächst folgt aus (3):

$$\Delta^p x_1 = x_{p+1} - \binom{p}{1} x_p + \binom{p}{2} x_{p-1} \cdots \pm x_1, \tag{3'}$$

denn (3′) entsteht aus (3), wenn in der ursprünglichen Reihe das erste Glied x fortgelassen wird, also x_1 an Stelle von x, x_2 an Stelle von x_1 tritt usw.

Die Subtraktion von (3′) und (3) gibt unter Anwendung der ursprünglichen Rekursionsformel zum Übergang von p auf $p+1$, nämlich:

$$\Delta^{p+1} x = \Delta^p x_1 - \Delta^p x, \tag{4}$$

die neue Gleichung:

$$\varDelta^{p+1}x = x_{p+1} - \left\{1 + \binom{p}{1}\right\} x_p + \left\{\binom{p}{1} + \binom{p}{2}\right\} x_{p-1} \cdots \mp x$$

oder nach der Formel [17 11], welche sich jetzt zum dritten Male hervortut [19]:

$$\varDelta^{p+1}x = x_{p+1} - \binom{p+1}{1} x_p + \binom{p+1}{2} x_{p-1} \cdots \mp x.$$

Dies ist wieder (3), nur $p+1$ statt p geschrieben. Der Schluß von p auf $p+1$ ist gelungen. Gleichung (3) ist allgemein richtig. Und damit ist in Hinblick auf [17 9] auch allgemein gezeigt, daß die Differenzen bei Umkehrung der Folge der ursprünglichen Zahlen dieselben bleiben, wenn p gerade ist, dagegen alternieren, wenn p ungerade ist.

Zweite Aufgabe. (Umkehrung der ersten.) Es sollen die Glieder der ursprünglichen Reihe (1) ausgedrückt werden durch die ersten Glieder (2) der Differenzreihen:

Auch hier ist die Lösung für die einfachsten Fälle schon in [22] enthalten. Es war nämlich:

$$x = x;\ x_1 = x + \varDelta x;\ x_2 = x + 2\varDelta x + \varDelta^2 x;\ x_3 = x + 3\varDelta x + 3\varDelta^3 x + \varDelta^3 x$$

ebenfalls Binomialkoeffizienten! Also allgemein:

$$\boldsymbol{x_n = x + \binom{n}{1} \varDelta x + \binom{n}{2} \varDelta^2 x + \cdots + \varDelta^n x.} \tag{5}$$

Um auch diese Induktion zu beweisen beachte man, daß aus (5) folgt:

$$\varDelta x_n = \varDelta x + \binom{n}{1} \varDelta^2 x + \binom{n}{2} \varDelta^3 x \cdots + \varDelta^{n+1} x, \tag{5'}$$

da (5′) aus (5) entsteht, wenn man die ursprüngliche Reihe ganz fortläßt und statt ihrer ihre erste Differenzreihe als ursprüngliche Reihe nimmt. Nun vermittelt die Formel:

$$x_{n+1} = x_n + \varDelta x_n \tag{6}$$

den Übergang von n auf $n+1$. Es folgt:

$$x_{n+1} = x + \left\{1 + \binom{n}{1}\right\} \varDelta x + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\} \varDelta^2 x + \cdots + \varDelta^{n+1} x$$

oder wieder nach Formel [17 11], die sich somit zum vierten Male hervortut:

$$x_{n+1} = x + \binom{n+1}{1} \varDelta x + \binom{n+1}{2} \varDelta^2 x + \cdots + \varDelta^{n+1} x,$$

also wieder (5), nur $n+1$ statt n geschrieben. Der Schluß von n auf $n+1$ ist gelungen, Formel (5) gilt allgemein.

Die Formeln (3) und (5) bleiben offenbar auch dann richtig, wenn man in allen Differenzen (die ursprünglichen Glieder nach Vereinbarung eingeschlossen) die Ordnung n um ein und dieselbe ganze Zahl, etwa λ, und ebenso die Klasse p um ein und dieselbe Zahl,

etwa μ, erhöht. Denn ersteres kommt darauf hinaus, daß man in der ursprünglichen Reihe die ersten λ Glieder $x, x_1, \ldots x_{\lambda-1}$ fortläßt, also mit $x_\lambda, x_{\lambda+1}, \ldots$ beginnt, und letzteres darauf, daß die ursprüngliche Reihe durch ihre μ^{te} Differenzreihe ersetzt wird. Daher kann (3) und (5) verallgemeinert werden in:

$$\Delta^{p+\mu} x_\lambda = \Delta^\mu x_{p+\lambda} - \binom{p}{1} \Delta^\mu x_{p+\lambda-1} + \binom{p}{2} \Delta^\mu x_{p+\lambda-2} \cdots \quad (3\text{a})$$

$$\Delta^\mu x_{n+\lambda} = \Delta^\mu x_\lambda + \binom{n}{1} \Delta^{\mu+1} x_\lambda + \binom{n}{2} \Delta^{\mu+2} x_\lambda + \cdots \quad (5\text{a})$$

In diesen Formeln können n, p, λ, μ irgendwelche positive ganze Zahlen sein. Setzt man $p = 1$, $n = 1$, so erhält man im besonderen:

$$\Delta^{\mu+1} x_\lambda = \Delta^\mu x_{\lambda+1} - \Delta^\mu x_\lambda; \quad \Delta^\mu x_{\lambda+1} = \Delta^\mu x_\lambda + \Delta^{\mu+1} x_\lambda,$$

oder wenn jetzt statt λ wieder n, statt μ wieder p geschrieben wird:

$$\alpha)\ \Delta^{p+1} x_n = \Delta^p x_{n+1} - \Delta^p x_n; \quad \beta)\ \Delta^p x_{n+1} = \Delta^p x_n + \Delta^{p+1} x_n, \quad (7)$$

also zwei Formeln, welche augenscheinlich Umkehrungen voneinander sind. Formel (7α) zeigt rekursorisch die allgemeine Differenzenbildung an, wie sie durch fortgesetztes Subtrahieren der Glieder der gegebenen, dann der ersten, dann der zweiten, dann der dritten usw. Differenzreihe entsteht. Formel (7β) dagegen zeigt rekursorisch, wie umgekehrt aus den ersten Gliedern aller Reihen durch fortgesetztes Addieren die zweiten Glieder, dann die dritten Glieder usw. aller Reihen entstehen. So geht man, um auch letzteres ziffernmäßig zu zeigen, in Beispiel [23] von den ersten Gliedern der Reihen

$$+4, \quad -11, \quad +9, \quad +3, \quad -20, \quad +18$$

durch Addition zweier benachbarten Zahlen zu den zweiten Gliedern

$$-7, \quad -2, \quad +12, \quad -17, \quad -2,$$

dann ebenso zu den dritten Gliedern:

$$-9, \quad +10, \quad -5, \quad -19,$$

dann zu den vierten Gliedern:

$$+1, \quad +5, \quad -24,$$

dann zu den sechsten Gliedern:

$$+6, \quad -19$$

und endlich zu „dem" siebenten Gliede (der ursprünglichen Reihe) nämlich -13 über.

25. Reihen und ihre Summenreihen. Die Summenformel. Ist eine Reihe B die erste Differenzreihe einer Reihe A, so nennt man umgekehrt A die erste Summenreihe von B. Oder vielmehr, ganz genau ausgedrückt, nicht die, sondern eine erste Summenreihe,

da ihr erstes Glied offenbar vollständig willkürlich bleibt und erst nach seiner Wahl die anderen Glieder durch fortgesetztes Addieren bestimmt werden können, etwa so wie im Schluß von [24] gezeigt. Wenn etwa in dem Ziffernbeispiel [23] die erste Differenzreihe:

$$-11, \quad -2, \quad +10, \quad +5, \quad -19$$

herausgegriffen wird, so kann die dortige ursprüngliche Reihe:

$$+4, \quad -7, \quad -9, \quad +1, \quad +6, \quad -13$$

als ihre Summenreihe gelten. Aber man darf auch statt der ersten Zahl $+4$ irgend eine andere Zahl, etwa -1, setzen und erhält dann eine andere Summenreihe, nämlich:

$$-1, \quad -12, \quad -14, \quad -4, \quad +1, \quad -18,$$

deren Glieder sich aus den entsprechenden Gliedern der vorigen Summenreihe durch Addition der „Konstanten": -5 ergeben.

Jede Reihe von Zahlen ist im Verhältnis zu ihrer ersten, zweiten, dritten ... Differenzreihe eine erste, zweite, dritte ... Summenreihe; dagegen im Verhältnis zu ihrer ersten, zweiten, dritten ... Summenreihe eine erste, zweite, dritte ... Differenzreihe. Man kann von irgendeiner Reihe herabsteigen zu ihren Differenzreihen, aber auch hinaufsteigen zu ihren Summenreihen. Tut man aber das letztere, so ergibt sich bei jedem Schritt aufwärts eine neue willkürliche Konstante, wie eben gezeigt.

Bleiben wir bei der ersten Summenreihe. Es sei also die Reihe:

$$x, \; x_1, \; x_2, \; x_3, \; \dots \; x_n, \; \dots \tag{1}$$

beliebig gegeben und man wolle hinauf zur ersten Summenreihe:

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \dots \quad u_n, \quad u_{n+1}, \quad \dots \tag{2}$$

(die ein Glied mehr hat), so soll sein:

$$\Delta u = x, \quad \Delta u_1 = x_1, \quad \Delta u_2 = x_2, \quad \dots,$$

oder:

$$u_1 - u = x, \quad u_2 - u_1 = x_1, \quad u_3 - u_2 = x_2, \quad \dots$$

und hieraus:

$$u_1 = u + x, \quad u_2 = u_1 + x_1 = u + x + x_1, \quad u_3 = u_2 + x_2 = u + x + x_1 + x_2$$

usw., also allgemein, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$s_n = x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} x_\lambda, \tag{3}$$

$$u_{n+1} = u + s_n. \tag{4}$$

Man sieht, u bleibt willkürlich! Jetzt wende man statt auf (1) auf die Summenreihe (2) die Formel [24 5] an, setze also u statt x und $n+1$.

statt n, so folgt:

$$u_{n+1} = u + \binom{n+1}{1} \varDelta u + \binom{n+1}{2} \varDelta^2 u + \binom{n+1}{3} \varDelta^3 u + \cdots + \varDelta^{n+1} u.$$

Hier kann u nach Einsetzen von (4) auf beiden Seiten gestrichen werden. Ferner ist $\varDelta u$ durch x, also $\varDelta^2 u$ durch $\varDelta x$, $\varDelta^3 u$ durch $\varDelta^2 x$ usw. zu ersetzen, daher:

$$s_n = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} x_\lambda = \binom{n+1}{1} x + \binom{n+1}{2} \varDelta x + \binom{n+1}{3} \varDelta^2 x + \cdots + \varDelta^n x. \quad (5)$$

Diese Summenformel tritt zu [24 3] und [24 5] hinzu als dritte und letzte Hauptformel aus der elementaren Theorie der Differenz- und Summenreihen.

26. Arithmetische Reihen. Bisher war über die Reihe:

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots \quad (1)$$

gar nichts vorausgesetzt worden. Jetzt aber soll die Reihe der p^{ten} Differenzen konstant, etwa $= C$ sein, (aber $C \neq 0$, weil sonst schon die $(p-1)^{\text{ten}}$ Differenzen konstant wären).

$$C = \varDelta^p x = \varDelta^p x_1 = \varDelta^p x_2 = \cdots \quad (\neq 0) \quad (2)$$

Die Reihe heißt dann eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung. Als erste Folge ihrer Definition (2) ist hervorzuheben, daß alle $(p+1)^{\text{ten}}$ Differenzen, also auch alle $(p+2)^{\text{ten}}$ Differenzen usw. verschwinden, kurz daß die Differenzenbildung mit der Berechnung von C abgeschlossen ist. Und als zweite Folge ergibt sich, daß, welchen Wert n auch habe, die rechten Seiten von [24 5] und [25 5] mit dem $(p+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbrechen. Man erhält:

$$x_n = x + \binom{n}{1} \varDelta x + \binom{n}{2} \varDelta^2 x + \cdots + \binom{n}{p} C. \quad (3)$$

$$s_n = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} x_\lambda = \binom{n+1}{1} x + \binom{n+1}{2} \varDelta x + \binom{n+1}{3} \varDelta^2 x + \cdots + \binom{n+1}{p+1} C. \quad (4)$$

Ist $p = 1$, so entsteht die arithmetische Reihe erster Ordnung, d. h. die arithmetische Reihe schlechthin. In der üblichen Schreibweise sind ihre Glieder:

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \ldots \quad a+(n-1)d, \ldots$$

Bezeichnet man, auch in der üblichen Weise, das n^{te} Glied mit t, sowie die Summe der n ersten Glieder mit s und beachtet, daß in (3) x_n das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied bedeutet, so folgt aus (3) und (4):

$$t = a + \binom{n-1}{1} d = a + (n-1)\,d, \quad (3\text{a})$$

$$s = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} d = n\,a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\, d: \quad (4\text{a})$$

Die Formeln (3) und (4) sind demnach anzusehen als Erweiterungen dieser beiden wohlbekannten elementaren Formeln auf arithmetische Reihen höherer Ordnung.

Nach [18] ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{p}$ eine ganze Funktion p^{ten} Grades von n mit dem Höchstglied: $n^p : p!$ Wendet man dies auf alle Binomialkoeffizienten in (3) an und zieht zusammen, so ergibt sich für x_n ein Ausdruck von der Form:

$$x_n = an^p + bn^{p-1} + cn^{p-2} + \cdots + kn + l, \tag{5}$$

d. h. das allgemeine Glied x_n einer arithmetischen Reihe p^{ter} Ordnung ist eine ganze Funktion p^{ten} Grades der Stellenzahl n. Da in (3) nur das letzte Glied den Höchstgrad p erreicht, so ergibt sich auch sofort (nach [18] Schluß) der erste Koeffizient:

$$a = \frac{C}{p!} = \frac{\Delta^p x}{p!}; \qquad C = ap! \tag{6}$$

(Die übrigen Koeffizienten $b, c, \ldots$ hängen außer von C auch von $\Delta^{p-1}x, \Delta^{p-2}x, \ldots$ ab, aber die betr. Ausdrücke sind nicht sehr einfach.)]

Umgekehrt: Nimmt man in (5) die Koeffizienten $a, b, c, \ldots k, l$ als beliebig gegeben an (aber $a \neq 0$) und setzt für n der Reihe nach aufeinander folgende ganze Zahlen, so bilden die x_n eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung.

Ist nämlich x_n durch (5) gegeben, so wird:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = a[(n+1)^p - n^p] + b[(n+1)^{p-1} - n^{p-1}] + \cdots.$$

Entwickelt man hier $(n+1)^p$, $(n+1)^{p-1}, \ldots$ nach dem binomischen Lehrsatz, so heben sich in jeder eckigen Klammer die Glieder höchsten Grades fort. Also wird Δx_n eine Funktion $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades von n:

$$\Delta x_n = a_1 n^{p-1} + b_1 n^{p-2} + \cdots.$$

Ebenso wird $\Delta^2 x_n$ vom Grade $p-2$, $\Delta^3 x_n$ vom Grade $p-3$ usf.; also zuletzt $\Delta^p x_n$ vom Grade 0, d. h. $\Delta^p x_n$ wird eine Konstante C, d. h. die x_n bilden in der Tat eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung.

Entwickelt man auch in (4) die Binomialkoeffizienten nach Potenzen von n, so steigt der Grad an bis zur Zahl $p+1$ im letzten Gliede. Man erhält:

$$s_n = a'n^{p+1} + b'n^p + c'n^{p-1} + \cdots, \tag{7}$$

und es wird genau wie in (6).

$$a' = \frac{C}{(p+1)!} = \frac{C}{p!(p+1)}, \text{ also (nach (6)) } a' = \frac{a}{p+1}. \tag{8}$$

27. Potenzsummen. Setzt man in [26 5] den ersten Koeffizienten $a = 1$ und alle andern $= 0$, so folgt im besonderen:

Die p^{ten} Potenzen der aufeinander folgenden ganzen Zahlen:

$$0^p,\ 1^p,\ 2^p,\ 3^p,\ \ldots\ n^p,\ \ldots$$

bilden eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung. Die p^{te} Differenz ist nach (6) $= p!$

Erstes Beispiel: $p = 1$.

Reihe:	0,	1,	2,	3,	4,	...	
Differenzen:	1,	1,	1,	1,	....		(= 1!)

Zweites Beispiel: $p = 2$.

Reihe:	0,	1,	4,	9,	16,	25,	...	
Erste Differenzen:	1,	3,	5,	7,	9,	...		
Zweite Differenzen:	2,	2,	2,	2,	...			(= 2!)

Drittes Beispiel: $p = 3$.

Reihe:	0,	1,	8,	27,	64,	125,	...	
Erste Differenzen:	1,	7,	19,	37,	61,	...		
Zweite Differenzen:	6,	12,	18,	24,	...			
Dritte Differenzen:	6,	6,	6,	...				(= 3!)

Die Anwendung von [26 4] ergibt in diesen drei Fällen:

$$\sum_{z=0}^{z=n} z = \binom{n+1}{1}\cdot 0 + \binom{n+1}{2}\cdot 1 = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{z=0}^{z=n} z^2 &= \binom{n+1}{1} 0 + \binom{n+1}{2}\cdot 1 + \binom{n+1}{3} 2 = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} 2 \\ &= \frac{(n+1)n(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{z=0}^{z=n} z^3 &= \binom{n+1}{1} 0 + \binom{n+1}{2}\cdot 1 + \binom{n+1}{3}\cdot 6 + \binom{n+1}{4}\cdot 6 \\ &= \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6 + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 6 \\ &= \frac{(n+1)n}{4}[2 + 4(n-1) + (n-1)(n-2)] \\ &= \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.\end{aligned} \tag{3}$$

[Nebenbei bemerkt: Es ist hiernach:

$$\sum z^3 = \left(\sum z\right)^2;$$

z. B.

$$\begin{aligned}0^3 + 1^3 + 2^2 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 \\ &= \left(\frac{5\cdot 6}{2}\right)^2 = 15^2 = 225.]\end{aligned}$$

In gleicher Weise würde sich ganz allgemein ergeben:

$$\sum_{z=0}^{z=n} z^p = a' n^{p+1} + b' n^p + c' n^{p-1} + d' n^{p-2} + \cdots.$$

Der erste Koeffizient ist nach [26 8], da $a = 1$ ist:

$$a' = \frac{1}{p+1}.$$

Die Berechnung der anderen stößt auf Schwierigkeiten, welche erst durch tiefere Untersuchungen bewältigt werden könnten. Man hat gefunden:

$$b' = \frac{1}{2}, \quad c' = \frac{1}{6} \cdot \frac{p}{2!}, \quad d' = 0, \quad e' = \frac{1}{30} \cdot \frac{p \cdot (p-1)(p-2)}{4!}, \quad f' = 0,$$

$$g' = \frac{1}{42} \cdot \frac{p \cdot (p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{6!}, \quad h' = 0 \text{ usw.}$$

[Die Koeffizienten:

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \frac{691}{2730}, \frac{7}{6}, \ldots$$

heißen nach ihrem ersten Berechner die Bernoullischen Zahlen].

Aufgaben zu § 2.

1. Die Summe der Kuben aller ungeraden Zahlen von 1^3 bis 99^3 ist zu berechnen.

2. Die Summe:

$$s = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \cdots + (n-3)(n-2)(n-1) \cdot n$$

ist als Funktion von n durch einen geschlossenen Ausdruck zu ersetzen.

3. Gegeben die Reihe:

$$\binom{0}{p}, \ \binom{1}{p}, \ \binom{2}{p}, \ \cdots \ \binom{n}{p}, \ \cdots$$

Ihre Differenzreihen sind zu ermitteln, so daß die Glieder die einfachste Form erhalten.

4. Die Doppelsumme:

$$s = \sum_{x=0}^{x=m} \sum_{y=0}^{y=n} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$$

ist zu berechnen.

§ 3. Die Differenzenquotienten.

28. Der Name Differenzenquotient verrät schon, daß Subtrahieren und Dividieren Hand in Hand gehen sollen, während in § 2 bei der

Bildung der Differenzen nur subtrahiert worden ist. Überhaupt betrachte man § 2 als Vorstufe dieses Paragraphen, so z. B. darin, daß dort eine Reihe von Zahlen $x, x_1, x_2, \ldots$, hier aber eine Reihe von Zahlenpaaren:

$$(x, y), \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \ \ldots \tag{1}$$

als gegeben vorausgesetzt wird. Sie mögen etwa geometrisch als Koordinaten von Punkten einer Ebene:

$$P(x, y), \quad P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2), \ \ldots$$

gedeutet werden. Dabei soll aus § 2 herübergenommen werden, daß das erste Wertepaar (x, y) jederzeit den Index 0 erhalten, also (x_0, y_0) geschrieben werden darf, wenn es so zweckmäßig erscheint.

Vorläufig werde zur Vereinfachung $\varDelta x$ als konstant angenommen:

$$\varDelta x = \varDelta x_1 = \varDelta x_2, \ldots \quad \text{oder} \quad x_1 - x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots. \tag{2}$$

Mit anderen Worten: Die x sollen eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden. (Doch wird [30] diese Einschränkung wieder aufheben.)

Der erste Differenzenquotient. Fs werden nur zwei Wertepaare (x, y), (x_1, y_1) gebraucht. Man bilde wie in § 2:

$$\varDelta x = x_1 - x, \quad \varDelta y = y_1 - y.$$

Dann ist der für die Folge stets mit A bezeichnete erste Differenzenquotient:

$$A = \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\textbf{Differenz der } y}{\textbf{Differenz der } x}. \tag{3}$$

A ist also wirklich, wie der Name sagt, der Quotient zweier Differenzen. Aus (3) folgt:

$$\varDelta y = A \varDelta x, \quad \varDelta x = \frac{1}{A} \varDelta y. \tag{4}$$

Es sei ferner hervorgehoben:

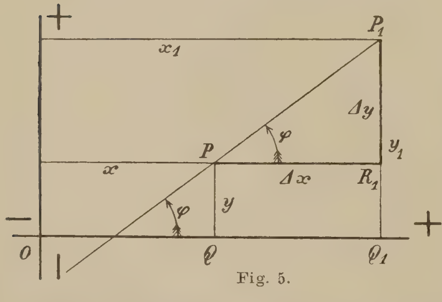


Fig. 5.

Erstens. Ein Differenzenquotient ist kommutativ in bezug auf die beiden Wertepaare, auf welche er sich bezieht. Denn vertauscht man x mit x_1 und y mit y_1, so alternieren Zähler und Nenner. Der Bruch, d. h. A bleibt also absolut und algebraisch unverändert. Um der Vertauschbarkeit schärfsten Ausdruck zu geben, führe man, wie vorhin erläutert, den Index 0 ein und bezeichne entsprechend A ausführlicher mit $A_{0,1}$. Dann spiegelt sich die Kommutativität in der Identität:

$$A_{0,1} \equiv A_{1,0}. \tag{5}$$

Zweitens. Geometrische Deutung: A ist gleich der trigonometrischen Tangente des Richtungswinkels φ der Geraden PP_1.

$$\operatorname{tg}\varphi = A = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{6}$$

Der zweite Differenzenquotient. Er fordert drei Wertepaare (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) zu seiner Bildung. Jedoch sei der vorigen Annahme entsprechend zunächst:

$$\Delta x_1 = \Delta x, \quad \text{oder auch} \quad \Delta^2 x = 0. \tag{7}$$

Man stelle die beiden „ersten" Differenzenquotienten:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad A_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x}$$

auf und berechne darauf den für die Folge immer mit B bezeichneten zweiten Differenzenquotienten:

$$B = \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{A_1 - A}{\Delta x}. \tag{8}$$

Es wird also die Differenz zweier erster Differenzenquotienten durch die (konstante) Differenz Δx dividiert. Setzt man für A und A_1 ihre Werte ein, so folgt:

$$B = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{(\Delta x)^2}, \tag{9}$$

oder:

$$\mathbf{B = \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}; \quad \Delta^2 y = B(\Delta x)^2,} \tag{10}$$

d. h.: Der zweite Differenzenquotient von y „nach" x entsteht, wenn man die zweite Differenz von y (im Sinne von § 2) dividiert durch das Quadrat der (ersten) Differenz von x. Oder: Die zweite Differenz von y ist das Produkt aus dem zweiten Differenzenquotienten von y „nach" x und dem Quadrat der (ersten) Differenz von x.

Fig. 6.

Übrigens beachte man die sehr einfache Konstruktion von $\Delta^2 y$ in Fig. 6. Es ist:

$$S_2 P_2 = \Delta^2 y. \tag{11}$$

Als für die Folge von Wichtigkeit sei ferner hervorgehoben:

Erstens. B ändert seinen Wert nicht, wenn man die Reihen-

folge der Wertepaare (1) umkehrt. Denn dann bleibt der Zähler $\Delta^2 y$ unverändert [22], aber der Nenner $(\Delta x)^2$ auch, da Δx sich in $(-\Delta x)$ verwandelt. Es ist bei Übertragung der vorhin gebrauchten ausführlichen Schreibweise:

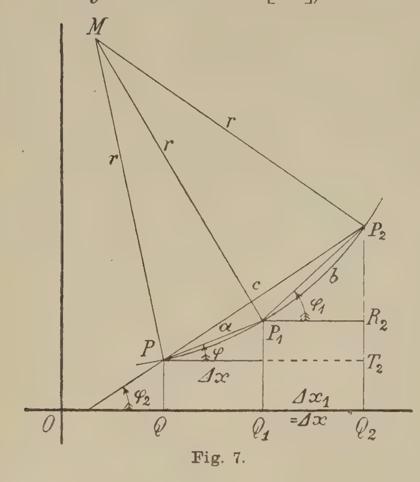


Fig. 7.

$$B_{0,1,2} \equiv B_{2,1,0}. \qquad (12)$$

Zweitens. Geometrische Deutung von B. Es ist Fig. 7:

$$r = \pm \frac{1}{B \cos\varphi \cos\varphi_1 \cos\varphi_2};$$

$$B = \pm \frac{1}{r \cos\varphi \cos\varphi_1 \cos\varphi_2} \qquad (13)$$

(r Radius des dem Dreieck PP_1P_2 umbeschriebenen Kreises, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ Richtungswinkel von PP_1, P_1P_2, P_2P).

Beweis. Nach einer Grundformel der analytischen Geometrie ist:

$$\pm \Delta PP_1P_2 = \frac{(x_1 - x)(y_2 - y) - (y_1 - y)(x_2 - x)}{2}$$

$$= \frac{\Delta x \cdot (\Delta y + \Delta y_1) - \Delta y \cdot 2\Delta x}{2}$$

$$= \frac{\Delta x(\Delta y_1 - \Delta y)}{2} = \frac{\Delta x \Delta^2 y}{2} = \frac{(\Delta x)^3}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = \frac{(\Delta x)^3 \cdot B}{2},$$

also: $B = \pm 2 \frac{\Delta PP_1P_2}{(\Delta x)^3}$. Ferner ist:

$$\Delta x = a \cos\varphi, \quad \Delta x_1 = \Delta x = b \cos\varphi_1, \quad 2\Delta x = PT_2 = c \cos\varphi_2,$$

$$(\Delta x)^3 = \frac{abc \cos\varphi \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{2},$$

also:

$$B = \pm 4 \frac{\Delta PP_1P_2}{abc \cos\varphi \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}.$$

Endlich ist nach einer Formel der Elementargeometrie:

$$r = \frac{abc}{4\Delta PP_1P_2},$$

womit (13) bewiesen ist. (Vgl. [180] Krümmungskreis.)

29. Die höheren Differenzenquotienten. So weiter fortschreitend gelangt man zu der folgenden rekursorischen Definition:

Gegeben sei die Reihe von $n+1$ Wertepaaren:

$$(x, y), \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots \quad (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n), \qquad (1)$$

mit der vorläufigen Bedingung, daß Δx konstant sei [28].

Man berechne aus dem ersten bis zum vorletzten Paar und darauf aus dem zweiten bis zum letzten Paar die beiden Differenzenquotienten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung K und K_1. Dann ist der aus allen $n+1$ Wertepaaren gebildete Differenzenquotient n^{ter} Ordnung:

$$L = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K_1 - K}{\Delta x}. \tag{2}$$

Diese rekursorische Definition führt durch den Schluß von $n-1$ auf n ohne Umschweife zu der expliziten Definition:

$$L = \frac{\Delta^n y}{(\Delta x)^n}, \quad \text{oder:} \quad \Delta^n y = L(\Delta x)^n, \tag{3}$$

d. h.: der n^{te} Differenzenquotient von y „nach“ x entsteht, wenn man die n^{te} Differenz von y dividiert durch die n^{te} Potenz der (ersten) Differenz von x. Oder: Die n^{te} Differenz von y ist das Produkt aus dem n^{ten} Differenzenquotienten von y „nach“ x und der n^{ten} Potenz der (ersten) Differenz von x. Vgl. [28 4] und [28 10].

Als für die Folge von Wichtigkeit sei ferner hervorgehoben:

L ändert seinen Wert nicht, wenn die Reihe (1) umgekehrt wird. Denn ist n ungerade, so alternieren dabei $\Delta^n y$ und $(\Delta x)^n$; ist aber n gerade, so bleiben sie beide absolut und algebraisch unverändert.

Es ist nach der schon zweimal gebrauchten ausführlicheren Schreibweise:

$$L_{0,1,\cdots n-1,n} \equiv L_{n,n-1,\cdots 1,0}. \tag{4}$$

30. Werden über die Wertepaare:

$$(x, y), \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots$$

keine Voraussetzungen gemacht, fällt also auch die bisherige Annahme [28] eines konstanten Δx, so verlieren, wie sich zeigen wird, die Ausdrücke für die Differenzenquotienten etwas von ihrer Einfachheit. Aber diesen Verlust bringen sie durch völlige Allgemeinheit wieder ein, ja dieser Vorzug wird sich später als wesentlich herausstellen. Also:

Der erste Differenzenquotient. Er wird genau so erklärt wie in [28] durch die Definition:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}, \tag{1}$$

da bei seiner Bildung nur zwei Wertepaare gebraucht werden, mithin die Frage, ob Δx konstant sei oder nicht, überhaupt hinfällig wird, wenigstens, wenn es sich nur um einen ersten Differenzenquotienten handelt. Der Vollständigkeit wegen seien die beiden Gleichungen in [28]

$$A_{0,1} \equiv A_{1,0}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = A, \tag{3}$$

von denen die erste die Vertauschbarkeit der Wertepaare, die zweite die geometrische Deutung ausdrückt, wiederholt. Endlich werde um späterer allgemeinerer Formeln willen (1) auch so geschrieben:

$$A = 1!\left(\frac{y}{x - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x}\right) \tag{4}$$

und hieraus y_1 berechnet:

$$y_1 = y + \frac{A}{1!}(x_1 - x). \tag{5}$$

Der zweite Differenzenquotient. Gegeben seien, wie in [28], drei Wertepaare (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2). Man berechne wie dort die beiden ersten Differenzenquotienten:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}, \quad A_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{6}$$

sowie ihre Differenz: $\Delta A = A_1 - A$. In [28] wurde sie durch $\Delta x = \Delta x_1$ dividiert. Jetzt aber, da Δx_1 und Δx verschieden sein können, dividiert man durch ihr arithmetisches Mittel:

$$\tfrac{1}{2}(\Delta x + \Delta x_1) = \tfrac{1}{2}((x_1 - x) + (x_2 - x_1)) = \tfrac{1}{2}(x_2 - x).$$

Dann entsteht der zweite Differenzenquotient:

$$B = \frac{\Delta A}{\frac{1}{2}(\Delta x + \Delta x_1)} = \frac{A_1 - A}{\frac{1}{2}(x_2 - x)}. \tag{7}$$

Aus dieser erweiterten Erklärung folgt:

Erstens. Sie geht, wie es sein muß, wieder in die ursprüngliche Erklärung in [28] über, wenn $\Delta x_1 = \Delta x$ gesetzt wird.

Zweitens. Es ist in der Schreibweise von [28] ebenfalls:

$$\boldsymbol{B}_{0,1,2} \equiv \boldsymbol{B}_{2,1,0}. \tag{8}$$

d. h. B bleibt unverändert, wenn man die gegebene Reihenfolge (1) umkehrt. Denn alsdann vertauscht sich A mit A_1, $x_2 - x$ mit $x - x_2 = -(x_2 - x)$, d. h. Zähler und Nenner in (7) wechseln ihr Vorzeichen, d. h. B bleibt unverändert.

Drittens. Die Formeln:

$$\boldsymbol{r} = \pm\frac{1}{\boldsymbol{B}\cos\varphi\cos\varphi_1\cos\varphi_2}, \quad \boldsymbol{B} = \pm\frac{1}{\boldsymbol{r}\cos\varphi\cos\varphi_1\cos\varphi_2} \tag{9}$$

gelten genau so wie in [28] und können auch genau so bewiesen werden.

Viertens. Statt der Formel (10) in [28] muß es jetzt heißen:

$$B = \frac{\Delta x \Delta^2 y - \Delta y \Delta^2 x}{\Delta x\left(\Delta x + \frac{1}{2}\Delta^2 x\right)(\Delta x + \Delta^2 x)}. \tag{10}$$

Beweis. Es ist:

$$\Delta y_1 = \Delta y + \Delta^2 y, \quad \Delta x_1 = \Delta x + \Delta^2 x,$$

daher

$$\tfrac{1}{2}(\varDelta x + \varDelta x_1) = \varDelta x + \tfrac{1}{2}\varDelta^2 x$$

und:

$$B = \frac{A_1 - A}{\varDelta x + \frac{1}{2}\varDelta^2 x} = \frac{\frac{\varDelta y + \varDelta^2 y}{\varDelta x + \varDelta^2 x} - \frac{\varDelta y}{\varDelta x}}{\varDelta x + \frac{1}{2}\varDelta^2 x}.$$

Bringt man auf die einfachste Form, so entsteht Formel (10). Wie es sein muß, geht sie in [28 10] über, wenn $\varDelta^2 x = 0$, also $\varDelta x = \varDelta x_1$ gesetzt wird.

Fünftens: Drückt man B durch die x und y selbst aus, so ergibt sich:

$$B = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y}{x_1 - x}}{\frac{1}{2}(x_2 - x)} = 2!\ \frac{(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (y_1 - y)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_1 - x)(x_2 - x)}.$$

Der Zähler ist vereinfacht:

$$y(x_2 - x_1) + y_1(x - x_2) + y_2(x_1 - x),$$

also:

$$B = 2!\left(\frac{y}{(x - x_1)(x - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x)} + \frac{y_2}{(x_2 - x)(x_2 - x_1)}\right). \quad (11)$$

Sechstens: Diese Formel (11), welche offenbar eine Erweiterung von (4) ist, zeigt nach Einführung des Index 0 eine überraschende Tatsache, nämlich die völlige Vertauschbarkeit der drei Wertepaare: $(x_0 y_0)$; $(x_1 y_1)$; $(x_2 y_2)$ bei der Bildung von B.

Zwar die Umkehrbarkeit ihrer Folge ist schon in (8) ausgedrückt. Es ist aber jetzt sogar:

$$B_{0,1,2} \equiv B_{2,1,0} \equiv B_{1,2,0} \equiv B_{0,2,1} \equiv B_{2,0,1} \equiv B_{1,0,2}. \quad (12)$$

Zahlenbeispiel: Die drei Zahlenpaare seien $(-1, +5)$, $(+2, -1)$, $(+3, +1)$. (In jeder Klammer kommt erst x, dann y):

I.

$(-1, +5), (+2, -1), (+3, +1),$

$A = -2, \quad A_1 = +2,$

$$B = \frac{+4}{\frac{1}{2}\cdot 4} = +\mathbf{2}.$$

II.

$(+3, +1), (+2, -1), (-1, +5),$

$A = +2, \quad A_1 = -2,$

$$B = \frac{-4}{\frac{1}{2}(-4)} = +\mathbf{2}.$$

III.

$(+2, -1), (+3, +1), (-1, +5),$

$A = +2, \quad A_1 = -1,$

$$B = \frac{-3}{\frac{1}{2}(-3)} = +\mathbf{2}.$$

IV.

$(-1, +5), (+3, +1), (+2, -1),$

$A = -1, \quad A_1 = +2,$

$$B = \frac{+3}{\frac{1}{2}(+3)} = +\mathbf{2}. \quad (13)$$

V.	VI.
$(+3, +1), (-1, +5), (+2, -1),$	$(+2, -1), (-1, +5), (+3, +1),$
$A = -1, \quad A_1 = -2,$	$A = -2, \quad A_1 = -1,$
$B = \dfrac{-1}{\frac{1}{2}(-1)} = +\mathbf{2}.$	$B = \dfrac{+1}{\frac{1}{2}(+1)} = +\mathbf{2}.$

Man sieht, der zweite Differenzenquotient B hat bei jeder der $3! = 6$ Permutationen der Wertepaare ein und denselben Wert $= +2$.

Siebentens: Nach (5) erhält man:

$$y_1 = y + \frac{A}{1!}(x_1 - x),$$

also auch:

$$y_2 = y_1 + \frac{A_1}{1!}(x_2 - x_1),$$

oder, da nach (7): $A_1 = A + \frac{1}{2}(x_2 - x)B$ ist:

$$y_2 = (y + A(x_1 - x)) + (A + \tfrac{1}{2}(x_2 - x)B)(x_2 - x_1),$$

oder vereinfacht:

$$y_2 = y + \frac{A}{1!}(x_2 - x) + \frac{B}{2!}(x_2 - x)(x_2 - x_1), \tag{14}$$

was augenscheinlich als Erweiterung von (5) anzusehen ist.

31. Die höheren Differenzenquotienten. Wie in [30] die zweiten auf die ersten, so werden ganz allgemein rekursorisch die n^{ten} auf die $(n-1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten zurückgeführt, wie folgt:

Gegeben sei die Reihe der $n+1$ Wertepaare:

$$(xy),\ (x_1 y_1), \ldots (x_{n-1}\, y_{n-1}),\ (x_n y_n). \tag{1}$$

Man berechne aus dem ersten bis zum vorletzten und aus dem zweiten bis zum letzten Wertepaare die beiden Differenzenquotienten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Sie seien K und K_1. Sodann dividiere man ihre Differenz: $\Delta K = K_1 - K$ durch das arithmetische Mittel:

$$\frac{1}{n}(\Delta x + \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n) = \frac{1}{n}(x_n - x),$$

so entsteht der n^{te} Differenzenquotient:

$$L = \frac{\Delta K}{\frac{1}{n}(\Delta x + \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n)} = \frac{K_1 - K}{\frac{1}{n}(x_n - x)}. \tag{2}$$

Durch Vergleichung mit der entsprechenden Erklärung in $[29_2]$ ergiebt sich sofort völlige Übereinstimmung für $\Delta x = \Delta x_1 \ldots$, wie es sein muß. Man betrachte ferner (4) und (11) in [30] Es ist kaum möglich, die allgemeine Induktion zu übersehen, welche ergeben würde:

$$L = n!\Big[\frac{y}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} + \frac{y_1}{(x_1-x)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{y_{n-1}}{(x_{n-1}-x)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_n)} + \frac{y_n}{(x_n-x)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}\Big]. \tag{3}$$

Doch muß der Beweis noch durch den Schluß von $n-1$ auf n erbracht werden, der diesmal ziemlich umständlich wird. Es sei also vorausgesetzt, indem man $n-1$ statt n schreibt:

$$K = (n-1)!\Big[\frac{y}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})} + \frac{y_1}{(x_1-x)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})} + \cdots\Big]$$

und entsprechend:

$$K_1 = (n-1)!\Big[\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} + \frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} + \cdots\Big],$$

daher:

$$\varDelta K = (n-1)!\Big[y\cdot\Big\{\frac{-1}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}\Big\}$$
$$+ y_1\cdot\Big\{\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} - \frac{1}{(x_1-x)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})}\Big\}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\Big].$$

Die Ausdrücke in den geschweiften Klammern sind umzuformen. Man findet leicht:

der erste $= \dfrac{x_n - x}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)},$

der zweite $= \dfrac{x_n - x}{(x_1-x)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)}$

usw. So erhält man überall im Zähler $x_n - x$, während die Nenner identisch werden mit den Nennern in (3). Sondert man also $x_n - x$ als gemeinsamen Faktor ab, dividiert dann nach (2) noch durch $\frac{1}{n}(x_n - x)$ und beachtet die Formel: $(n-1)!\,n = n!$, so ergibt sich in der Tat (3). Der Schluß von $n-1$ auf n ist also gelungen. Folglich gilt (3) ganz allgemein für jedes n.

Doch auch die Formeln (5) und (14) in [30] lassen die Induktion mit Händen greifen. Sie ergibt allgemein:

$$y_n = y + \frac{A}{1!}(x_n - x) + \frac{B}{2!}(x_n-x)(x_n-x_1) + \frac{C}{3!}(x_n-x)(x_n-x_1)(x_n-x_2)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{K}{(n-1)!}(x_n-x)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2}) \tag{4}$$
$$+ \frac{L}{n!}(x_n-x)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1}).$$

Diese Formel (4) wird Newton zugeschrieben. Ihr Beweis durch den Schluß von $n-1$ auf n ist gleichfalls ziemlich langwierig. Es sei, indem man in (4) $n-1$ statt n setzt:

$$y_{n-1} = y + \frac{A}{1!}(x_{n-1}-x) + \frac{B}{2!}(x_{n-1}-x)(x_{n-1}-x_1) + \cdots$$
$$+ \frac{K}{(n-1)!}(x_{n-1}-x)(x_{n-1}-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})$$

und ebenso, wenn man das erste Wertepaar (xy) fortläßt, also alle Indizes um 1 vermehrt:

$$y_n = y_1 + \frac{A_1}{1!}(x_n-x_1) + \frac{B_1}{2!}(x_n-x_1)(x_n-x_2) + \cdots$$
$$+ \frac{K_1}{(n-1)!}(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1}).$$

Hier ist zu setzen nach [30 5], [30 7] und allgemein [31 2]:

$$y_1 = y + \frac{A}{1!}(x_1-x);\; A_1 = A + \frac{B}{2}(x_2-x);\; B_1 = B + \frac{C}{3}(x_3-x)\cdots$$
$$K_1 = K + \frac{L}{n}(x_n-x);$$

man erhält:

$$y_n = \left[y + \frac{A}{1!}(x_1-x)\right] + \frac{x_n-x_1}{1!}\left[A + \frac{B}{2}(x_2-x)\right]$$
$$+ \frac{(x_n-x_1)(x_n-x_2)}{2!}\left[B + \frac{C}{3}(x_3-x)\right]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}{(n-1)!}\cdot\left[K + \frac{L}{n}(x_n-x)\right]$$

oder nach Auflösung der eckigen Klammern und Ordnung nach $y, A, B, \ldots L$:

$$y_n = y + \frac{A}{1!}\{(x_1-x)+(x_n-x_1)\} + \frac{B(x_n-x_1)}{2!}\{(x_2-x)+(x_n-x_2)\}$$
$$+ \frac{C(x_n-x_1)(x_n-x_2)}{3!}\{(x_3-x)+(x_n-x_3)\} + \cdots.$$

Die geschweiften Klammern haben sämtlich denselben Wert, nämlich: $x_n - x$. Setzt man ihn ein, so entsteht in der Tat (4), d. h. der Schluß von $n-1$ auf n ist gelungen und (4) gilt ganz allgemein.

32. Zu den Formeln (3) und (4) in [31] sei noch nachgetragen:

Erstens: Sie entsprechen den Formeln (3) und (5) in [24], nur sind diese erheblich einfacher, in jeder Hinsicht.

Zweitens: Aus (3) folgt, worauf in [30] für $n = 2$ bereits ausführlich eingegangen und sogar an einem Zahlenbeispiel (13) erläutert worden ist, die völlige Kommutativität eines Differenzen-

quotienten in bezug auf alle Wertepaare, welche bei seiner Bildung mitgewirkt haben. Man darf also nicht allein deren Reihenfolge umkehren, sondern sogar in eine beliebige andere umwandeln und erhält doch denselben Differenzenquotienten.

Drittens: Sind $n+1$ Wertepaare in einer bestimmten Reihenfolge gegeben, so gibt es in dieser Folge n erste, $n-1$ zweite, $n-2$ dritte usw. Differenzenquotienten und zuletzt einen einzigen n^{ten} Differenzenquotienten, dessen Wert aber, wie eben erläutert, von der Folge unabhängig ist. Zahlenbeispiel:

Gegebene Reihe:[1] $\binom{+2}{+1}$, $\binom{0}{-1}$, $\binom{-146}{-3}$, $\binom{+1}{0}$, $\binom{+39}{+2}$, $\binom{-13}{-2}$,

$\Delta x =$	-2,	-2,	$+3$,	$+2$,	-4.	
Erste Differenzenquotienten:	$+1$,	$+73$,	$+49$,	$+19$,	$+13$,	
zweite „		-36,	-48,	-12,	$+6$,	
dritte „			$+36$,	$+36$,	$+54$,	
vierte „				0,	-72,	
fünfter Differenzenquotient					$+120$.	

Das Beispiel ist so gewählt [76], daß alle Differenzenquotienten ganze Zahlen sind. Der letzte, also $+120$, muß derselbe bleiben bei einer beliebigen Abänderung der Reihenfolge, etwa:

Gegebene Reihe: $\binom{-146}{-3}$, $\binom{0}{-1}$, $\binom{39}{+2}$, $\binom{+1}{0}$, $\binom{-13}{-2}$, $\binom{+2}{+1}$,

$\Delta x =$	$+2$,	$+3$,	-2,	-2,	$+3$.
Erste Differenzenquotienten:	$+73$,	$+13$,	$+19$,	$+7$,	$+5$,
zweite „		-24,	$+12$,	$+6$,	-4,
dritte „		$+36$,	$+18$,	$+30$,	
vierte „			-72,	$+24$,	
fünfter Differenzenquotient			$+120$,		

also am Schluß wirklich dieselbe Zahl $+120$.

Viertens: Verschwindet der aus $n+1$ Wertepaaren gebildete n^{te} Differenzenquotient, d. h. ist:

$$L = 0, \tag{1}$$

so werden die $n+1$ im allgemeinen verschiedenen $(n-1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten, welche durch Auslassung je eines Wertepaares entstehen, einander gleich. Denn erstens gibt [31 2]:

$$K_1 = K, \tag{2}$$

1) Oben stehen die y, unten die x.

und zweitens kann man es bei der Vertauschung der Wertepaare so einrichten, daß K_1 und K irgend zwei der $(n-1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten werden.

Für $n=2$ liegt die geometrische Deutung von (1) sehr nahe. Da die drei ersten Differenzenquotienten einander gleich sein sollen, so bestimmen sie nach [28 6] alle denselben Winkel φ, d. h. P, P_1, P_2 liegen in einer Geraden (Fig. 6). Für ein beliebiges n wird die Deutung in [77] nachgeholt werden.

33. Mittelwertsätze über die Differenzenquotienten gibt es in sehr großer Anzahl. Doch sei hier nur der einfachste aufgestellt, welcher sich auf erste Differenzenquotienten bezieht. Er lautet:

Sind $n+1$ Wertepaare $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ... $(x_n y_n)$ so geordnet, daß die x der Größe nach aufeinander folgen, und berechnet man erstens in dieser Folge die Differenzenquotienten:

$$A_{0,1}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\quad A_{1,2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\quad \ldots\quad A_{n-1,n}=\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}},$$

und zweitens den Differenzenquotienten zwischen dem ersten und letzten Paare:

$$A_{0,n}=\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0},$$

so ist dieser ein Mittelwert der vorigen.

Beweis. Es ist:

$$A_{0,n}=\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}=\frac{(y_n-y_{n-1})+(y_{n-1}-y_{n-2})+\cdots+(y_1-y_0)}{(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_1-x_0)}$$
$$=\frac{A_{n-1,n}(x_n-x_{n-1})+A_{n-2,n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+A_{0,1}(x_1-x_0)}{(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_1-x_0)}.$$

Diese Formel beweist nach [11 4] den Satz, da die Differenzen x_n-x_{n-1}, $x_{n-1}-x_{n-2}$, ... nach Voraussetzung alle positiv oder alle negativ sind. Eine vorzügliche Anwendung in [133].

34. Noch folgende Bemerkungen zum Schluß:

Erstens. Die Theorie der Differenzenquotienten wird in § 8 auf ganze Funktionen angewendet und so ergänzt werden. Die Hauptanwendung wird dann aber erst in der Differentialrechnung folgen, wenn die Differenzen zu Differentialen und ihre Quotienten zu Differentialquotienten geworden sind.

Zweitens. Der Begriff eines Differenzenquotienten kann sehr verschiedentlich erweitert werden. So etwa berechne man aus vier Wertepaaren $(x_0 y_0)\,(x_1 y_1)\,(x_2 y_2)\,(x_3 y_3)$ die beiden ersten Differenzenquotienten:

$$A_{0,1}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\qquad A_{2,3}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$$

und bilde dann den Ausdruck:

$$B' = \frac{A_{2,3} - A_{0,1}}{\frac{1}{2}((x_2 + x_3) - (x_0 + x_1))},$$

welcher als eine Abart eines zweiten Differenzenquotienten gelten kann. Denn erstens wird er mit B in [30] identisch, wenn das vierte mit dem zweiten Paare zusammenfällt, also $x_3 = x_1$ und $y_3 = y_1$ gesetzt wird und zweitens ist, wenn die x der Größe nach geordnet sind, B' ganz allgemein ein Mittelwert aus den beiden zweiten Differenzenquotienten, entstanden aus dem ersten, zweiten und dritten, sowie aus dem zweiten, dritten und vierten Paare. Doch wäre dies erst noch zu beweisen.

Drittens. Man kann aber auch ganz anders erweitern. So z. B. könnten statt je zweier stets je drei Werte x, y, z zu einem „Tripel" (xyz) vereinigt werden, das durch einen Punkt im Raum veranschaulicht wird. Statt einer Reihe von Wertepaaren würde dann eine Reihe von Wertetripeln:

$$(x, y, z), \quad (x_1, y_1, z_1) \quad \ldots$$

vorgelegt werden zur Bildung von Differenzenquotienten. Oder auch eine Doppelreihe von Tripeln usw. Diese Erweiterungen würden später zu den partiellen Differentialen und Differentialquotienten einer Funktion zweier Veränderlichen hinführen; da sich aber eine andere Methode hierzu in § 19 ergeben wird, so ist von ihnen Abstand genommen; die betreffenden Formen sind auch lange nicht so übersichtlich.

Übungen zu § 3.

1. Man setze für x der Reihe nach $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ und für y allgemein x^4, also $x_0{}^4$ für y_0, $x_1{}^4$ für $y_1, \ldots$ Die Ausdrücke für die Differenzenquotienten erster, zweiter, dritter, vierter, ... Ordnung sind zu ermitteln.

2. Der in [34] genannte Mittelwertsatz, den Ausdruck B' betreffend, ist zu beweisen.

3. Man setze allgemein:

$$x = \sin\varphi, \quad y = \cos\varphi,$$

nehme für φ beliebige Werte $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ und berechne die aus den Wertepaaren $(x_0\, y_0), (x_1\, y_1), \ldots$ entspringenden ersten, zweiten und dritten Differenzenquotienten A, B und C.

4. Man setze für x der Reihe nach $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ und allgemein:

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Es sind die Ausdrücke für die Differenzenquotienten erster, zweiter, dritter usw. Ordnung zu ermitteln.

5. Dasselbe wie (4), aber $y = \sqrt{x}$.

Zweiter Abschnitt.

Einführung in die Funktionenlehre.

§ 4. Der Funktionsbegriff. Elementare Funktionen.

35. Der mathematische Funktionsbegriff umfaßt alle denkbaren Möglichkeiten der Abhängigkeit von Zahlen. Beispiele aus der reinen und angewandten Mathematik sind so häufig, daß man wirklich nur zuzugreifen braucht. Das Quadrat einer Zahl hängt von dieser ab, ist eine Funktion von ihr. Der Inhalt eines Kreises ist eine Funktion seines Radius. Die Falltiefe ist eine Funktion der Zeit. Die Durchbiegung eines Balkens ist eine Funktion seiner Belastung usw. usw.

Funktion einer Veränderlichen. Soll eine Zahl oder Größe y überhaupt als Funktion einer anderen Zahl oder Größe x gekennzeichnet werden, ohne irgendwelche Verbindlichkeit wegen der Art und Weise der Abhängigkeit, so bedient man sich eines Funktionsbuchstabens f (oder φ, oder ψ, oder $F, \ldots$) und schreibt:

$$y = f(x) \tag{1}$$

$$(\text{oder } y = \varphi(x), \text{ oder } y = \psi(x), \text{ oder } y = F(x), \ldots)$$

und nennt zugleich x und y Veränderliche oder Variable (aber nicht etwa Unbekannte!), weil ihre Abhängigkeit sich darin zeigt, daß die eine sich mit der anderen verändert. Da in (1) die Veränderlichkeit so aufgefaßt wird, als ob zuerst x und darauf als notwendige Folge y andere Werte annimmt, so heißt auch x die ursprüngliche oder unabhängige Veränderliche und y die abhängige Veränderliche oder die Funktion.

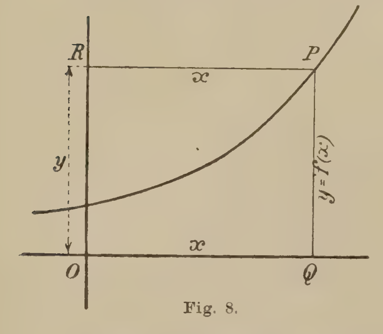


Fig. 8.

Funktion und Kurve. Betrachtet man je zwei zusammengehörende Werte von x und y als Koordinaten eines Punktes, so stellt die Gesamtheit all dieser Punkte (Stetigkeit vorausgesetzt) eine Kurve dar, deren Verlauf die Art der Abhängigkeit sichtbar macht. Es wird dann (1) zur Gleichung dieser Kurve, in der Weise, daß die Funktion durch die Gleichung abstrakt analytisch, durch die Kurve aber anschaulich geometrisch dargestellt wird. Beides soll hier immer Hand in Hand gehen.

Funktionsausdruck. Zur expliziten analytischen Darstellung einer bestimmten Funktion dient ihr Funktionsausdruck, d. h. ein Zahlenausdruck, welcher x so enthält, daß bei Einsetzen eines beliebigen Wertes für x stets der zugehörige Wert für y entsteht, z. B.:

$$y = x^2, \quad y = \frac{2x+3}{4x+5}, \quad y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + x^2}} \tag{2}$$

usw. Selbstverständlich fällt alsdann der Funktionsbuchstabe f oder φ usw. fort, denn die rechte Seite in (2) ist ja bereits die Funktion selbst, also $f(x) = x^2$, oder $f(x) = \frac{2x+3}{4x+5}$ usw.

Willkürliche Konstanten. Umgekehrt bestimmt jeder Zahlenausdruck, der eine unbestimmte und als veränderlich betrachtete Zahl x enthält, im allgemeinen eine Funktion von x. Dabei ist keineswegs ausgeschlossen, daß auch noch andere unbestimmt gelassene Zahlen in dem Ausdruck vorkommen, die aber nicht als veränderlich, sondern als gegeben, wenn auch vielleicht willkürlich gegeben, gelten sollen. Man pflegt sie willkürliche Konstanten oder Koeffizienten zu nennen und zur Unterscheidung mit den Anfangsbuchstaben der Alphabete, etwa mit

$$a, b, c, \ldots \quad \text{oder} \quad A, B, C, \ldots \quad \text{oder} \quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

usw. zu bezeichnen. So stellt z. B. der Ausdruck:

$$y = ax + b \tag{3}$$

mit der ursprünglichen Veränderlichen x und den beliebigen Koeffizienten a und b die allgemeinste ganze Funktion ersten Grades von x vor.

Funktionen mehrerer Veränderlichen. In unzähligen Fällen reicht eine Funktion einer Veränderlichen nicht aus. Der Inhalt eines Rechtecks ist eine Funktion seiner beiden Seiten. Das Volumen eines Kugelabschnittes ist eine Funktion seiner Höhe und des Kugelradius usw. Man hat hier zwei unabhängige Veränderliche x und y, sowie eine abhängige Veränderliche z, die auch mittelst eines Funktionsbuchstabens bezeichnet werden kann als:

$$z = F(x, y) \quad (\text{oder } z = f(x, y) \text{ usw.}).$$

Eine Funktion von mehreren Veränderlichen wird zu einer Funktion nur einer von ihnen, wenn man die übrigen als willkürliche Konstanten annimmt. Ist der Kugelradius gegeben, so hängt das Volumen des Kugelabschnitts nur noch von seiner Höhe ab. Umgekehrt kann jede Funktion einer Veränderlichen, welche, wie vorhin beschrieben, willkürliche Konstanten enthält, als Funktion mehrerer Veränderlichen betrachtet werden, wenn man die Konstanten sämtlich oder einige oder auch nur eine einzige nicht mehr als konstant,

sondern gleichfalls als veränderlich ansieht. So ist die Durchbiegung eines Balkens zunächst eine Funktion seiner Belastung. Wenn man aber verschiedene Balken aus verschiedenem Material und mit verschiedenen Querschnitten betrachtet, so wird die Durchbiegung auch eine Funktion des Elastizitätsmoduls und des sogenannten Trägheitsmomentes des Querschnittes.

Es ist also leicht genug, von einer ursprünglichen Veränderlichen zu mehreren hinauf oder umgekehrt von mehreren ursprünglichen Veränderlichen zu einer herabzusteigen. (Vgl. § 19.)

36. Um die einfachsten Funktionen einer Veränderlichen zu erhalten, nehme man die sieben Ausdrücke:

$$u+v, \quad u-v, \quad u\cdot v, \quad \frac{u}{v}, \quad u^v, \quad \sqrt[v]{u}, \quad \log_v u, \tag{1}$$

welche den sieben Rechnungsarten der Algebra, nämlich Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren, Wurzelausziehen und Logarithmieren entsprechen, betrachte eine der beiden Zahlen u und v als veränderlich, nenne sie also x und die andere als konstant, nenne sie also a. So entstehen zunächst 14 Funktionen, nämlich:

$$\begin{array}{llll} 1.\ x+a, & 2.\ a+x, & 3.\ x-a, & 4.\ a-x, \\ 5.\ x\cdot a, & 6.\ a\,.\,x, & 7.\ \frac{x}{a}, & 8.\ \frac{a}{x}, \\ 9.\ x^a, & 10.\ a^x, & 11.\ \sqrt[x]{a}, & 12.\ \sqrt[a]{x}, \\ 13.\ \log_a x, & 14.\ \log_x a. & & \end{array} \tag{2}$$

1. und 2. sind identisch, ebenso 5. und 6. Ferner unterscheiden sich 3. und 4. nur dadurch von 1. und 2., daß a durch $-a$ oder x durch $-x$ ersetzt ist. 7. kann auf 6. zurückgeführt werden, da das Dividieren durch die Konstante a dem Multiplizieren mit der Konstanten $1:a$ gleichkommt. Die Nummern 1. bis 7. bedeuten also, daß zu x eine Konstante a addiert oder x mit einer Konstanten a multipliziert werden soll. Beide Operationen treten zwar bei Funktionsbildungen überaus häufig auf; doch sind sie gar zu einfach, um als selbständige Funktionsausdrücke gelten zu können.

Bleiben also noch 8. bis 14. Von diesen sind 10. und 11. aufeinander zurückführbar, da bei ihnen schon der erweiterte Potenzbegriff zugrunde gelegt wird, nach welchem: $\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$ zu setzen ist. Endlich sind auch 13. und 14. aufeinander zurückführbar mittels der Gleichung [42 8]. Läßt man noch in 8. den konstanten Faktor a fort, so bleiben nach Abänderung der Reihenfolge und teilweise der Konstantenbenennung die folgenden fünf Funktionen übrig:

$$x^n, \quad \sqrt[n]{x}, \quad \frac{1}{x}, \quad a^x, \quad \log_a x. \tag{3}$$

Sie heißen: Die Potenz, die Wurzel, der reziproke Wert, die Exponentialfunktion und der Logarithmus. In den beiden ersten soll n bis auf weiteres eine ganze Zahl sein, denn sonst wären Wurzel und reziproker Wert nichts anderes als Potenz, nach den Formeln:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{x} = x^{-1}. \tag{4}$$

37. Die Potenz als Funktion:

$$y = x^n. \tag{1}$$

Der Exponent sei eine positive ganze Zahl, ausgenommen $n = 0$, da $x^0 = 1$ ist[1]), also keine eigentliche Funktion entsteht. Der absolute Wert von y wächst mit dem absoluten Wert von x. Beide werden zugleich 0, 1 und ∞, da:

$$0 = 0^n, \quad 1 = 1^n, \quad \infty = \infty^n$$

ist. Algebraisch aber zeigen die Potenzen ein verschiedenes Verhalten für ungerade und gerade n. Ist n ungerade, so hat y dasselbe Vorzeichen wie x. Wächst[2]) x von $-\infty$ bis $+\infty$, so auch y.

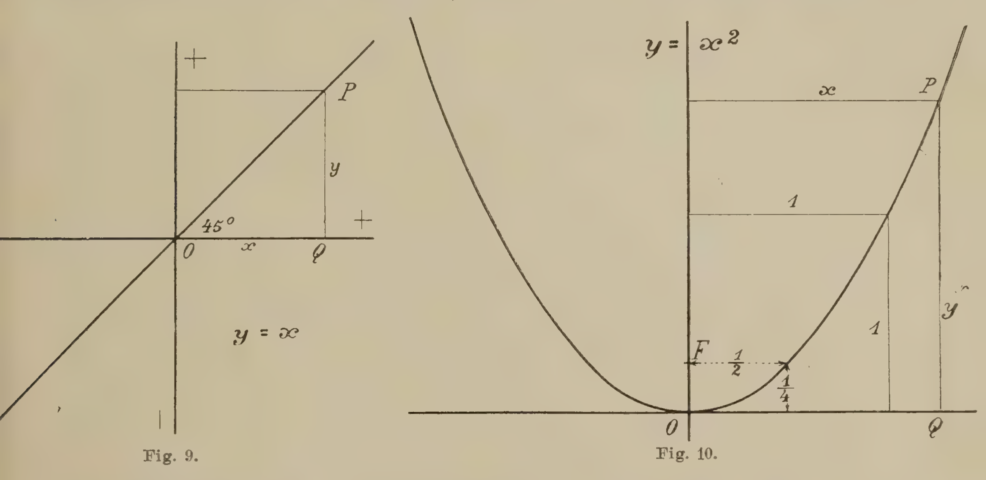


Fig. 9. Fig. 10.

Ist n aber gerade, so ist y immer positiv. Wächst also x von $-\infty$ bis $+0$, so nimmt y ab von $+\infty$ bis 0 und wächst x weiter von 0 bis $+\infty$, so nimmt y wieder zu von 0 bis $+\infty$.

Für $n = 1$ wird:

$$y = x^1, \quad \text{d. h.} \quad y = x. \tag{2}$$

Die Kurve ist die den Koordinatenwinkel halbierende Gerade (Fig. 9).

1) Doch sind 0^0 und $(\pm\infty)^0$ unbestimmte Ausdrücke [16].
2) Alle Werte durchlaufend.

Für $n = 2$ wird:

$$y = x^2. \tag{3}$$

Die Kurve ist eine gewöhnliche Parabel (Fig. 10) mit O als Scheitel und der y-Achse als Hauptachse, wenn ihr Halbparameter $p = 1 : 2$ gesetzt wird. Denn die Scheitelgleichung der Parabel lautet:

$$y = x^2 : 2p.$$

Für $n = 3$ wird:

$$y = x^3. \tag{4}$$

Die Kurve ist eine „kubische" Parabel (Fig. 11). Der Punkt O ist ein Wendepunkt [181] usw.

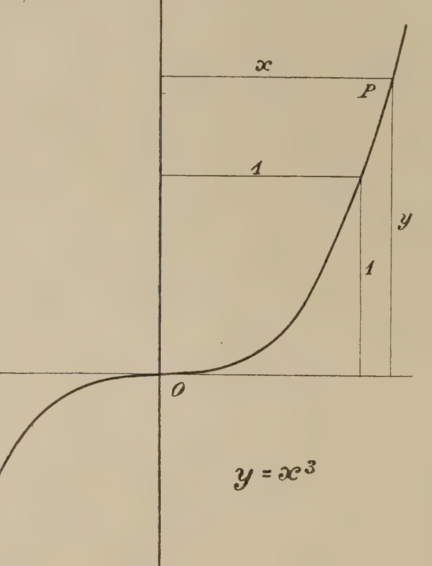


Fig. 11.

38. Die Wurzel als Funktion:

$$y = \sqrt[n]{x} \left(= x^{\frac{1}{n}}\right). \tag{1}$$

Sie ist die Umkehrung der Potenz und daher implizite durch sie bestimmt. Denn aus:

$$\alpha)\ y = \sqrt[n]{x}$$

folgt: (2)

$$\beta)\ x = y^n,$$

und umgekehrt. Durch Einsetzen von (2) α) in (2) β) oder von (2) β) in (2) α) entstehen die Identitäten:

$$(\sqrt[n]{x})^n \equiv x, \quad \sqrt[n]{y^n} \equiv y,$$

welche dieses Begriffsverhältnis zwischen Potenz und Wurzel in kürzester und schärfster Form ausdrücken. Doch ändern sich die Bezeichnungen. Denn x ist in β) die Potenz, in α) der Radikand; n ist in β) Potenzexponent, in α) Wurzelexponent, und y ist in β) Basis und in α) die Wurzel.

Die Übertragung von [37] ergibt: Ist n ungerade, so hat die Wurzel immer einen und nur einen Wert, dessen Vorzeichen mit dem Vorzeichen von x übereinstimmt. Ist aber n gerade, so hat die Wurzel für positive x zwei entgegengesetzt gleiche Werte, dagegen für negative x gar keinen (reellen) Wert. (Anders bei komplexen Zahlen. In ihrem Gebiet hat die Wurzel immer n Werte, die nur für $x = 0$ alle zusammenfallen in $y = 0$). (§ 28.)

Die Darstellung des Verlaufes der Wurzelfunktion (1) durch eine

Kurve ist nicht gegeben, weil sie aus derjenigen der Potenzfunktion in [37 1] durch „Umklappen" um die Winkelhalbierende entsteht. Denn dabei vertauschen x und y ihre Werte, wie es sein muß. Siehe (1) in [37] und (2) β) in [38].

39. Der reziproke Wert von x, d. h.

$$y = \frac{1}{x}, \quad \text{oder} \quad y = x^{-1} \tag{1}$$

ist zwar auch eine Potenz von x im erweiterten Sinne, gilt aber trotzdem als selbständige elementare Funktion. Die beiden Veränderlichen x und y haben gleiche Vorzeichen, zeigen aber für die absoluten Werte entgegengesetztes Verhalten, da der eine von ∞ bis 0 abnimmt, wenn der andere von 0 bis ∞ zunimmt. Überhaupt sind x und y vertauschbar, denn aus:

$$\alpha)\ y = \frac{1}{x} \quad \text{folgt:} \quad \beta)\ x = \frac{1}{y}. \tag{2}$$

Sehr bemerkenswert ist die sprunghafte, völlig unvermittelte Änderung von $-\infty$ zu $+\infty$, welche y erfährt, wenn x durch 0 von negativen zu positiven Werten hindurchgeht. (Diesen Vorzeichenwechsel von y durch $\pm\infty$ statt durch ± 0 hindurch zeigen übrigens auch viele andere Funktionen, z. B. $y = \operatorname{tg} x$ und $y = \operatorname{cotg} x$ [49] und [50]).

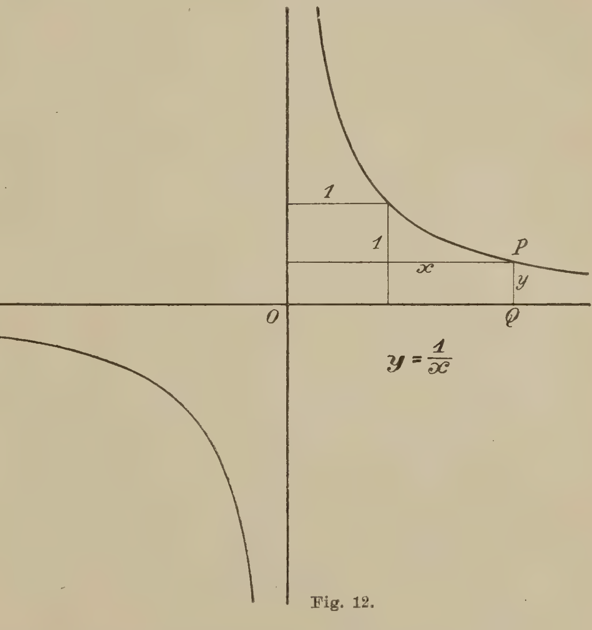


Fig. 12.

Die Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten mit den Koordinatenachsen zusammenfallen (Figur 12). Sie zerfällt in zwei völlig getrennte Zweige, oder, wenn man die Redewendung gebrauchen will, in zwei Zweige, die in der Unendlichkeit zusammenhängen, nämlich erstens da, wo $x = \pm 0$ und $y = \pm\infty$ ist, und zweitens da, wo $y = \pm 0$ und $x = \pm\infty$ ist; also erstens da, wo y als Funktion von x und zweitens da, wo x als Funktion von y den eben genannten Sprung von $-\infty$ bis $+\infty$ macht.

40. Die Exponentialfunktion:

$$y = a^x. \tag{1}$$

I. Um x unbeschränkt verändern zu können, muß die von ganzzahligen auf beliebige Exponenten erweiterte Definition des Potenzbegriffes als aus der Algebra bekannt zugrunde gelegt werden.

Die Basis a darf nicht negativ sein, wenn y für alle Werte von x als reelle Zahl existieren soll. Wäre z. B. $a = -4$ und $x = \frac{1}{2}$, so würde sein:

$$y = a^x = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} = \pm 2i,$$

also imaginär.

II. Um die Exponentialfunktion eindeutig zu machen, wird ausdrücklich vereinbart, daß für y nur der positive Wert genommen werden soll, selbst wenn außerdem ein negativer Wert existiert. Also soll z. B. für $a = +4$ und $x = +\frac{1}{2}$ sein:

$$a^x = 4^{\frac{1}{2}} = +\sqrt{4} = +2,$$

während im vorliegenden Fall der Wert -2 zurückgewiesen wird. Man merke also: a nur positiv, x beliebig positiv oder negativ, y nur positiv.

III. Doch sind für die Basis a drei Zahlen, nämlich 0, 1, ∞, als gänzlich ungeeignet ausgeschlossen, denn weder 0^x, noch 1^x, noch ∞^x sind Funktionen von x im eigentlichen Sinne. Der erstere Ausdruck wird nämlich $= 0$, wenn x positiv, und $= \infty$, wenn x negativ ist, z. B. $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$; $0^{-2} = 1 : 0^2 = 1 : 0 = \infty$; dagegen wird er unbestimmt $= 0^0$, wenn $x = 0$ ist [16.] Der zweite Ausdruck hat immer den Wert 1, nur für $x = \infty$ wird er unbestimmt $= 1^\infty$ [16]. Der dritte Ausdruck endlich wird $= 0$, wenn x negativ und $= \infty$, wenn x positiv ist, z. B.

$$\infty^{-2} = 1 : \infty^2 = 1 : \infty = 0; \quad \infty^2 = \infty \cdot \infty = \infty;$$

dagegen wird er unbestimmt $= \infty^0$ wenn $x = 0$ ist [16].

IV. Sonst aber darf a eine beliebige positive Zahl sein, ganz, gebrochen oder irrational, größer oder kleiner als 1. Und immer erhält man eine eindeutige Exponentialfunktion, wie in § 12 streng bewiesen werden wird. Ist $a > 1$, so nimmt ihr Wert, wenn x von $-\infty$ bis $x = +\infty$ wächst, stetig zu von $y = 0$ bis $y = +\infty$. Ist aber $a < 1$, so nimmt ihr Wert stetig ab von $y = +\infty$ bis $y = 0$. Im besonderen ist:

$$a^{-\infty} = 0,\ a^{+\infty} = \infty \quad (a > 1); \qquad a^{-\infty} = \infty,\ a^{+\infty} = 0 \quad (a < 1).$$

Dagegen ist in beiden Fällen stets: $a^0 = 1$.

V. Eine besondere, von a unabhängige Eigenschaft der Exponentialfunktion ist, daß verschiedenen Werten von x, wenn sie eine arith-

metische Reihe bilden, verschiedene Werte von y in geometrischer Reihe entsprechen. Setzt man für x der Reihe nach:

$$x = \alpha,\ \alpha + \delta,\ \alpha + 2\delta,\ \alpha + 3\delta,\ \ldots,$$

so wird y der Reihe nach

$$y = a^{\alpha},\ a^{\alpha+\delta},\ a^{\alpha+2\delta},\ a^{\alpha+3\delta},\ \ldots$$

oder wenn $a^{\alpha} = A$, $a^{\delta} = q$ gesetzt wird,

$$y = A,\ Aq,\ Aq^2,\ Aq^3,\ \ldots,$$

d. h. eine geometrische Reihe. Im besonderen entspricht dem arithmetischen Mittel zweier x das geometrische Mittel der zugehörigen beiden y. Denn setzt man $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, so wird

$$y = a^x = a^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \sqrt{a^{x_1+x_2}} = \sqrt{a^{x_1}a^{x_2}} = \sqrt{y_1 \cdot y_2}.$$

VI. Da a zwar positiv, sonst aber beliebig ist (nur sind 0, 1, ∞ nach III. ausgeschlossen), so existieren eigentlich unendlich viele Exponentialfunktionen. Doch können sie alle auf eine zurückgeführt werden. Es ist nämlich:

$$(a^m)^x = a^{mx}, \tag{2}$$

also z. B. für $m = -1$

$$(a^{-1})^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}, \tag{2a}$$

womit sofort der Fall $a < 1$ auf den Fall $a > 1$ zurückgeführt wird. Behält man sich aber vor, für m irgendeine Zahl von $-\infty$ bis $+\infty$ zu sehen, so kann die neue Basis a^m, wie in IV gezeigt, alle Werte von 0 bis $+\infty$ annehmen, also alle Werte, welche für sie überhaupt in Frage kommen, da sie ja nur positiv sein darf.

41. Die natürliche Basis. Eine einzige Basis reicht also aus, dies ist der Sinn der Gleichung [40 2]. Man brauchte nur aus der unendlichen Menge positiver Zahlen irgendeine herauszugreifen (außer 0, 1 und ∞, welche verboten sind) und zu erklären, sie und keine andere solle die Basis werden. Am nächsten läge ja wohl, etwa $a = 2$ als kleinste ganze Zahl außer 1, zu nehmen, oder $a = 10$, weil 10 als Fingerzahl unserem Zahlensystem zugrunde liegt. Man hat aber weder 2 noch 10 noch überhaupt eine ganze Zahl, sondern die Zahl:

$$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ldots \tag{1}$$

genommen, obgleich sie sogar eine „transzendente Zahl“ ist.

Diese Zahl e, deren Ursprung in § 12 aufgezeigt werden wird, eignet sich so sehr als Basis, daß man sie die „natürliche Basis“ und die Funktion

$$y = e^x \tag{2}$$

meist schlechthin die Exponentialfunktion nennt. Sie wird (Fig. 13) durch die Exponentialkurve veranschaulicht, welche die $-x$-Achse zur Asymptote hat, während für positive und sehr große Werte von x die Ordinate y von unbegrenzt hoher Ordnung groß wird, vgl. [191]. Da nach [42 2a], wenn e statt a, und a statt x gesetzt wird (vgl. [43]):

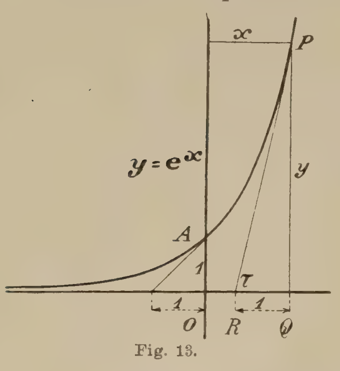


Fig. 13.

$$a = e^{\ln a} \tag{3}$$

ist, so folgt für eine beliebige Basis a:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(x \ln a)}, \tag{4}$$

d. h. die Zurückführung auf die natürliche Basis e.

42. Die logarithmische Funktion:

$$y = \log_a x \tag{1}$$

ist die Umkehrung der Exponentialfunktion. Denn aus:

$$\alpha)\ y = \log_a x \quad \text{folgt} \quad \beta)\ x = a^y. \tag{2}$$

Durch Einsetzen von (2) α) in (2) β) und von (2) β) in (2) α) ergeben sich die Identitäten:

$$\alpha)\ x \equiv a^{\log_a x}, \quad \beta)\ y \equiv \log_a (a^y), \tag{2a}$$

welche dieses Begriffsverhältnis in größter Kürze und Schärfe ausdrücken. Allerdings ändern sich die Bezeichnungen. Zwar heißt a in (2) α) und in (2) β) die Basis; doch heißt x in (2) α) der Numerus, in (2) β) Potenz, während y in (2) α) Logarithmus und in 2) β) Exponent genannt wird.

Überträgt man hiernach mutatis mutandis [40] und [41] auf die logarithmische Funktion, so ergibt sich, daß sowohl ihre Basis a als auch der Numerus x als positiv vorausgesetzt werden müssen, daß ferner für a die Werte 0, 1, ∞ nicht in Betracht kommen, daß drittens, wenn man x alle Werte von 0 bis $+\infty$ durchlaufen läßt, y alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ oder von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, je nachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist, und viertens, daß man mit einer einzigen Basis auskommen könnte. Um dieses Vierte in einer Formel auszudrücken, vertausche man in [40 2] zunächst die Buchstaben x und y:

$$(a^m)^y = a^{my}. \tag{3}$$

Setzt man hier:

$$a^m = b \tag{4}$$

und bezeichnet den gemeinsamen Wert der beiden Seiten von (3) mit x, so folgt:

$$\alpha)\ b^y = x, \quad \beta)\ a^{my} = x, \tag{5}$$

daher, wenn (4), (5) α) und (5) β) nach (2) umgekehrt werden:

$$m = \log_a b,\ y = \log_b x,\ my = \log_a x,$$

und also:

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b. \tag{6}$$

Im besonderen ergibt sich für $x = a$, da offenbar:

$$\log_a a = 1 \tag{7}$$

ist, die bemerkenswerte Gleichung:

$$1 = \log_b a \cdot \log_a b, \tag{8}$$

auf die schon in [36] verwiesen worden ist. Mit Hilfe von (8) kann man also (6) auch so schreiben:

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b = \log_b x : \log_b a \tag{9}$$

und umgekehrt:

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a = \log_a x : \log_a b, \tag{10}$$

womit der Übergang von einer Basis zu einer anderen vollständig erledigt ist.

43. Natürliche oder Napiersche Logarithmen und dekadische oder Briggsche Logarithmen. Der Modulus. Die in [41] eingeführte natürliche Basis e der Exponentialfunktion wird bei deren Umkehrung zur Basis der natürlichen oder, nach einem ihrer ersten Berechner, Napierschen Logarithmen. Bei ihrer Bezeichnung pflegt man statt log zu schreiben lognat oder auch ln oder noch kürzer l, worauf alsdann die Basis e als selbstverständlich fortgelassen wird. Also:

$$\log_e x = \operatorname{lognat} x = \ln x = l\, x. \tag{1}$$

Dekadische oder, nach einem ihrer ersten Berechner, Briggssche Logarithmen dagegen sind solche mit der Basis 10, welche in unseren Logarithmentafeln als selbstverständlich einfach fortgelassen wird, so daß:

$$\log_{10} x = \log x \tag{2}$$

ist. Aus [42 9] folgt für $b = e$:

$$\log_a x = \ln x \cdot \log_a e = \ln x : \ln a. \tag{3}$$

Der konstante Faktor in (3) heißt der Modulus M des Logarithmensystems mit der Basis a. Er ist also:

$$M = \log_a e = \frac{1}{\ln a}. \tag{4}$$

Für Briggssche Logarithmen ist:

$$a = 10,$$

also:

$$\log x = \ln x \cdot \log e = \ln x : \ln 10. \tag{5}$$

Der Modulus ist alsdann:

$$M = \log e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434\ 294\ 48\ldots, \tag{6}$$

vgl. [215], und umgekehrt:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\log e} = \ln 10 = 2{,}302\ 585\ 09\ldots, \tag{7}$$

also:

$$\mathbf{\log x = M \ln x = 0{,}434\ 294\ 48\ldots \ln x,} \tag{8}$$

$$\mathbf{\ln x = \frac{\log x}{M} = 2{,}302\ 585\ 09\ldots \log x.} \tag{9}$$

In unseren Logarithmentafeln stehen dekadische Logarithmen, und dies mit Recht. Denn die Basis 10 bietet als Basis unseres Zahlensystems so viel Rechnungsvorteile (man denke an Kennziffer und Mantissen) wie keine andere Basis. In den Formeln der höheren Analysis aber stehen natürliche Logarithmen und dies auch mit Recht. Denn die Basis e bietet als natürliche Basis so viel analytische Vorteile (was später nachzuweisen bleibt) wie keine andere Basis. Weil man aber eben deshalb beim logarithmischen Rechnen fast nur an die dekadischen, dagegen bei analytischen Entwicklungen fast nur an die natürlichen Logarithmen zu denken pflegt, so ist die Gefahr ihrer Verwechslung nicht klein, wo Rechnungen und analytische Formeln zusammentreffen. Man vergesse also in einem solchen Falle niemals (8) und (9), d. h. die Multiplikation mit M oder die Division durch M.[1])

Übungen zu § 4.

1. $\log_2 8$, $\log_8 2$, $\log_8 \frac{1}{2}$, $\log_2 \frac{1}{8}$, $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, $\log 0{,}001$.

2. In die gebrochene lineare Funktion:

$$y = \frac{a + bx}{c + dx}$$

sind für x irgend vier Werte x_0, x_1, x_2, x_3 eingesetzt und die zugehörigen Werte y_0, y_1, y_2, y_3 von y bestimmt worden. Es soll der Ausdruck:

$$\frac{(x_3 - x_0)(x_4 - x_1)}{(x_4 - x_0)(x_3 - x_1)}$$

transformiert werden.

3. Wann sind in der zu (2) genannten Funktion x und y vertauschbar.

1) In jedem logarithmischen Handbuch finden sich kleine Tafeln zur Erleichterung dieser Umrechnungen.

§ 5. Die trigonometrischen und die arcus-Funktionen.

44. Während die Funktionen des vorigen Paragraphen von Anfang an aus der reinen Analysis ihren Ursprung ableiten und ihre geometrische Deutung durch Kurven nur der äußerlichen Veranschaulichung dienen sollte, stammen die trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrungen, die arcus-Funktionen, von der Geometrie her als Funktionen, die aus der Betrachtung rechtwinkliger Dreiecke im und am Kreise hervorgegangen sind. Aber dies hat mit ihnen als Funktionen an sich gar nichts zu schaffen, denn als solche sind sie rein analytisch einzuschätzen wie alle andern auch. Welcher Art ist die Abhängigkeit, die sie ausdrücken, wie kann man rein analytisch an sie herankommen, als ob sie von vornherein rein analytisch gewesen wären; diese Fragen kennzeichnen den Standpunkt, von dem aus sie hier betrachtet werden sollen.

Bemerkt sei noch: Die trigonometrischen Funktionen heißen auch goniometrische Funktionen oder Kreisfunktionen. Die arcus-Funktionen werden auch zyklometrische Funktionen genannt.

45. Winkel und arcus. Zur Messung der Winkel dient das Gradmaß. Der volle Winkel wird in 360^0, 1^0 in $60'$, $1'$ in $60''$ geteilt, was nebenbei gesagt für unser dekadisches Zahlensystem sich gar nicht eignet und nur geschichtlich erklärt werden kann als ererbt aus uralter babylonischer Kultur.

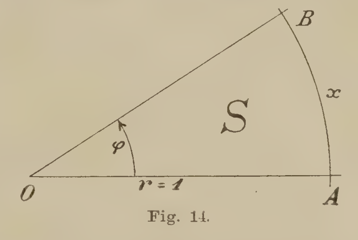


Fig. 14.

Die reine Analysis nimmt ein ganz anderes Maß! Sie ersetzt einen Winkel φ, wenn er in Gradmaß gegeben ist $= \varphi^0$, durch einen Kreisbogen x, d. h. durch einen arcus, in dem φ Zentriwinkel ist und hält sich daran, daß x bei gegebenem r proportional zu φ und bei gegebenem φ proportional zu r ist. Es wird deshalb gesetzt:

$$\operatorname{arc}\varphi^0 = \frac{x}{r}, \tag{1}$$

oder noch einfacher, wenn r zur Längeneinheit gemacht wird:

$$\mathbf{arc}\,\varphi^0 = x. \tag{2}$$

Da einerseits der volle Winkel $= 360^0$, andererseits der Umfang des ganzen Kreises $= 2\pi r = 2\pi$ ist, so folgt:

$$\operatorname{arc} 360^0 = 2\pi,\ \operatorname{arc} 1^0 = \frac{\pi}{180},\ \operatorname{arc} 1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60},\ \operatorname{arc} 1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}. \tag{3}$$

Ist also ein Winkel in Gradmaß gegeben $= \varphi^0$ (die Minuten und Sekunden mögen in Bruchteile eines Grades umgerechnet werden), so ist der entsprechende arcus:

$$x = \operatorname{arc} \varphi^0 = \varphi \cdot \frac{\pi}{180}, \tag{4}$$

also z. B.:

$$\operatorname{arc} 90^0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc} 60^0 = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arc} 45^0 = \frac{\pi}{4} \tag{5}$$

usw. Wird für π der Ziffernwert:

$$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 79\ldots \tag{6}$$

eingesetzt, so dient (4) zur Umrechnung eines Winkels in einen arcus, der, wie seine Definition erkennen läßt, ein reines Verhältnis ohne Benennung ist, z. B.:

$$\operatorname{arc} 123^0 45' 36'' = 2{,}160\ 021\ 4\ldots.$$

Ist umgekehrt der arcus als unbenannte Zahl x gegeben, so ergibt die umgekehrte Rechnung den zugehörigen Winkel φ im Gradmaß:

$$\varphi^0 = \left(\frac{180\,x}{\pi}\right)^0. \tag{7}$$

Setzt man z. B.: $x = 1$, so folgt:

$$1 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 = 57{,}29578^0 = 57^0 17' 44{,}8'', \tag{8}$$

d. h. der Winkel $57^0 17' 44{,}8''$ ist derjenige Zentriwinkel, für welchen der zugehörige Bogen gleich dem Radius ist.

Für Messungen und Ziffernrechnungen dient das Gradmaß, da unsere Winkelmeßinstrumente in Grade geteilt sind und unsere trigonometrischen Tafeln nach Graden fortschreiten. Doch in den Formeln der Differential- und Integralrechnung benutzt man fast ausschließlich das arcus-Maß, welches sozusagen das natürliche Maß ist. Also ganz wie in [43]. Wie dort der Modul M eingeführt wurde zur Umrechnung von natürlichen in dekadische Logarithmen, so dient hier die Zahl:

$$\frac{180}{\pi} = 57{,}295\ 78\ldots$$

als Faktor zur Umrechnung eines arcus in einen Winkel, dagegen ihr reziproker Wert:

$$\frac{\pi}{180} = 0{,}017\ 453\ 29\ldots$$

zur Umrechnung eines Winkels in einen arcus.[1])

Noch drei Bemerkungen. Erstens: Es darf x statt als arcus auch definiert werden als das Doppelte des Verhältnisses der Fläche S des Sektors zum Quadrat über dem Radius, denn es verhält sich, da der Inhalt des Kreises $K = \pi r^2$ ist:

---

1) In jedem logarithmischen Handbuche finden sich kleine Tafeln zur Erleichterung dieser Umrechnungen.

$$S : \pi r^2 = \varphi^0 : 360^0, \quad \text{also} \quad 2S = \frac{\varphi\pi}{180} \cdot r^2,$$

oder nach (4), wenn r zur Längeneinheit gemacht wird:

$$x = 2S \tag{9}$$

(vgl. [63]). Zweitens: φ darf über 360^0, also $|x|$ über 2π hinaus beliebig fortgesetzt werden. Drittens: φ, also auch x, erhalten ein Vorzeichen, welches dem Drehungssinn oder Umlaufssinn zu entsprechen hat [9]. Es soll eben x eine algebraische Zahl werden, welche alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen kann.

46. Die vier trigonometrischen Funktionen:

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg} x \tag{1}$$

werden bekanntlich als positive oder negative Strecken in und am Kreise veranschaulicht, wie Fig. 15 zeigt, wo sie sämtlich positiv sind. Die ferneren Bezeichnungen:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \tag{2}$$

sind kaum noch in Gebrauch. Aber auch tg x und cotg x gelten in der Analysis als aus sin x und cos x durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \tag{3}$$

zusammengesetzte Funktionen. Also blieben noch sin x und cos x, die aber auch aufeinander sehr einfach und auf sehr verschiedene Weisen, z. B. durch die Formel:

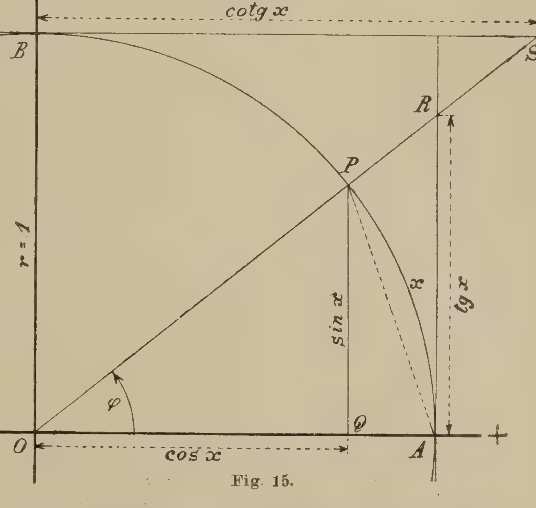


Fig. 15.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \tag{4}$$

zurückführbar sind, so daß eigentlich nur eine einzige wirklich selbständige trigonometrische Funktion übrig bleibt, was natürlich die analytische Auffassung erheblich vereinfacht.

47. Die trigonometrische Funktion:

$$y = \sin x. \tag{1}$$

I. Erster Quadrant. Durchläuft x wachsend alle Werte von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so durchläuft y auch wachsend alle Werte von 0 bis $+1$. Im besonderen ist $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = +1$.

II. Zweiter Quadrant. Durchläuft x wachsend alle Werte von $\frac{\pi}{2}$ bis π, so durchläuft y abnehmend alle Werte von $+1$ bis 0. Es ist also $\sin\pi = 0$. Der Gleichung für Supplementwinkel:

$$\sin(\pi - x) = \sin x \tag{2}$$

entsprechend ist der Verlauf in II. durch den in I. schon mitbestimmt als Spiegelbild, da $\pi - x$ und x symmetrisch zu $\frac{\pi}{2}$, dem Grenzwert von I. und II. liegen. Kurz ausgedrückt: Der Sinus nimmt in II. genau so ab, wie er in I. zunimmt.

III. Dritter Quadrant. Durchläuft x wachsend alle Werte von π bis $\frac{3}{2}\pi$, so durchläuft y abnehmend alle Werte von 0 bis -1. Es ist also $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$. Der Gleichung:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \tag{3}$$

entsprechend ist der Verlauf in III. durch den in I. schon mitbestimmt. Die Werte des Sinus kehren wieder, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen.

IV. Vierter Quadrant. Durchläuft x wachsend alle Werte von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π, so durchläuft y auch wachsend alle Werte von -1 bis 0. Es ist also $\sin 2\pi = 0$. Der Gleichung:

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x \tag{4}$$

entsprechend ist der Verlauf in IV. durch den in I. schon mitbestimmt.

V. Die Formel:

$$\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \tag{5}$$

drückt die Periode 2π aus, welche dem Sinus zukommt. Sie zeigt, daß der Verlauf von y uneingeschränkt bestimmt ist, wenn man ihn in dem Spielraum von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ festgestellt hat.

VI. Aus I. bis V. folgt:

Der Verlauf von y ist unbeschränkt bestimmt, wenn der Verlauf von y im ersten Quadranten, d. h. in dem Spielraum von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ bestimmt ist. (Deshalb reichen ja auch die trigonometrischen Tafeln nur von 0^0 bis 90^0.)

VII. Stellt man sich x gerade gestreckt als Abszisse und $y = \sin x$ als zugehörige Ordinate vor, so wird (1) die Gleichung der Sinuslinie oder (nach ihrer Gestalt) der Wellenlinie. Sie zeigt, wie

Wellenberg und Wellental in größter Regelmäßigkeit ohne Änderung von Größe und Gestalt wiederkehren und wie sie in den Vielfachen von π, die „Nullstellen" der Funktion sind, ineinander übergehen, während genau in den Mitten benachbarter Nullstellen die Maxima der Wellenberge und die Minima der Wellentäler liegen. Erstere sind $= +1$, letztere $= -1$, und zwischen diesen beiden bewegt sich y periodisch hin und her von $+1$ bis -1 und von -1 bis $+1$.

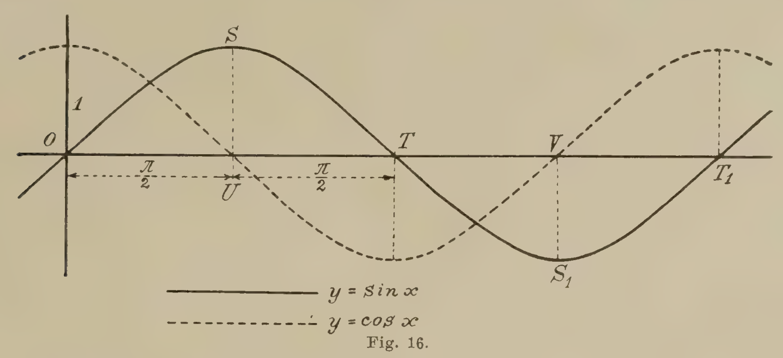


Fig. 16.

48. Die trigonometrische Funktion:

$$y = \cos x \tag{1}$$

kann, wie bereits erwähnt, durch die Gleichung:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

auf die Funktion $\sin x$ vollständig zurückgeführt werden. Deshalb sei die Darstellung gegen vorhin erheblich abgekürzt:

I. Im ersten Quadranten nimmt y ab von $+1$ bis 0. Im zweiten Quadranten nimmt y auch ab von 0 bis -1. Im dritten Quadranten nimmt y zu von -1 bis 0, und im vierten Quadranten nimmt y gleichfalls zu von 0 bis $+1$. Dabei wird in allen vier Fällen vorausgesetzt, daß x wächst, von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, von $\frac{\pi}{2}$ bis π, von π bis $\frac{3}{2}\pi$ und von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π.

II. Die drei Formeln:

$$\alpha)\ \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \beta)\ \cos(\pi + x) = -\cos x,$$
$$\gamma)\ \cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \tag{2}$$

beweisen, daß der Verlauf von $y = \cos x$ uneingeschränkt bestimmt ist durch den Verlauf im ersten Quadranten von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$. Aus (2γ) ist die Periode 2π erkennbar, in (2β) wird ein Vorzeichenwechsel bei Änderung um die halbe Periode π angezeigt, und (2α) kündigt schon innerhalb der halben Periode von $x = 0$ bis $x = \pi$ eine

Symmetrie der absoluten Werte an, die auch mit einem Vorzeichenwechsel verbunden ist.

III. Die Gleichung $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ beweist, daß die Cosinuslinie aus der Sinuslinie durch Verschiebung in der Richtung der x-Achse um $-\frac{\pi}{2}$ entsteht (Fig. 16). Sie ist also eine zur Sinuslinie kongruente Wellenlinie. Die Maxima und Minima sind auch $+1$ und -1 und liegen in den Mitten benachbarter Nullstellen. Letztere sind aber jetzt die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, so daß gegen vorhin eine Vertauschung beider Arten von Stellen eingetreten ist.

49. Die trigonometrische Funktion:

$$y = \operatorname{tg} x \tag{1}$$

sollte durch die Gleichung $\operatorname{tg} x = \sin x : \cos x$ auf $\sin x$ und $\cos x$ zurückgeführt werden. Es ergibt sich:

I. Die Nullstellen von $\operatorname{tg} x$ fallen mit den Nullstellen von $\sin x$ zusammen. Sie sind die geraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$

$$0 = \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg}(\pm \pi) = \operatorname{tg}(\pm 2\pi) = \cdots. \tag{2}$$

II. Die Unendlichkeitsstellen von $\operatorname{tg} x$ fallen mit den Nullstellen von $\cos x$ zusammen, sind also die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$

$$\pm \infty = \operatorname{tg}\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\pm \frac{3}{2}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(\pm \frac{5}{2}\pi\right) = \cdots. \tag{3}$$

III. Vorzeichenwechsel findet in beiden Arten Stellen, also bei jedem Übertritt von x in einen anderen Quadranten statt. Wächst x, so wechselt in den Nullstellen das Vorzeichen von $-$ zu $+$ und in den Unendlichkeitsstellen von $+$ zu $-$. In letzteren springt dabei y urplötzlich von $+\infty$ zu $-\infty$ (vgl. [39]).

Aber von diesen Unendlichkeitsstellen abgesehen *wächst* $\operatorname{tg} x$ *immer*. Also durchaus anders als $\sin x$ und $\cos x$, welche periodisch ab- und zunehmen.

IV. Da $\sin x$ und $\cos x$ die Periode 2π haben, so hat $\operatorname{tg} x$ die gleiche Periode. *Aber* $\operatorname{tg} x$ *hat sogar schon eine halb so große Periode, also die Periode* π, denn es ist:

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = +\operatorname{tg} x. \tag{4}$$

Doch läßt die Gleichung:

$$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x \tag{5}$$

erkennen, daß in der zweiten Hälfte dieser halben Periode von 0 bis $+\pi$ die absoluten Werte von y symmetrisch wiederkehren, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen.

V. Die Darstellung von (1) zeigt Fig. 17. Die Kurve zerfällt in unendlich viele kongruente Zweige, welche, den Unendlichkeitsstellen entsprechend, je zwei zur y-Achse parallele Asymptoten haben, derartig, daß jede Asymptote an einen Zweig zugleich Asymptote an einen Nachbarzweig ist. Man sieht aber, daß zwischen zwei Asymptoten y nur wächst, wie in III. erläutert.

50. Die trigonometrische Funktion:

$$y = \operatorname{cotg} x \tag{1}$$

wird am besten auf tg x durch eine der beiden Formeln zurückgeführt:

$$\alpha)\ \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x};$$

$$\beta)\ \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \tag{2}$$

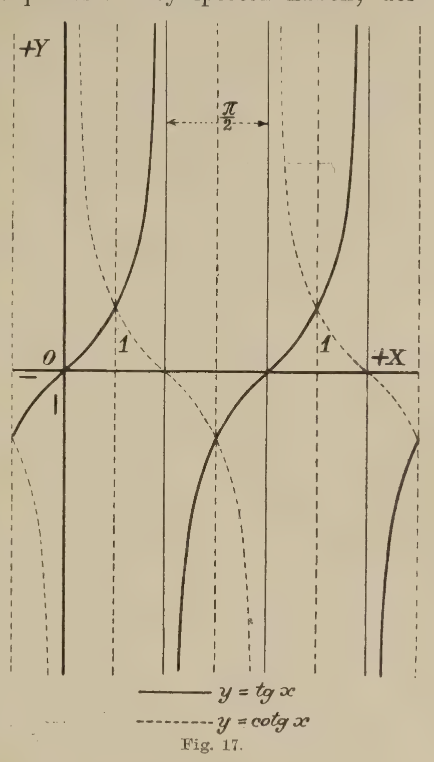


Fig. 17.

I. Die Nullstellen von cotg x sind die ungeraden Vielfachen von $\pi : 2$. Die Unendlichkeitsstellen von cotg x sind die geraden Vielfachen von $\pi : 2$. Vorzeichenwechsel findet sowohl in den Nullstellen wie in den Unendlichkeitsstellen statt. Wächst x, so wechselt in den Nullstellen das Vorzeichen von $+$ zu $-$ und in den Unendlichkeitsstellen von $-$ zu $+$. In letzteren Stellen springt dabei $y = \operatorname{cotg} x$ urplötzlich von $-\infty$ bis $+\infty$. Sonst aber gibt es keinen Wechsel von Abnahme und Zunahme, vielmehr nimmt y, von den Unendlichkeitsstellen abgesehen, immer ab.

II. Die Funktion $y = \operatorname{cotg} x$ hat auch schon die Periode π. Es ist:

$$\operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg} x. \tag{3}$$

Die Gleichung:

$$\operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x \tag{4}$$

läßt erkennen, daß in der zweiten Hälfte der halben Periode von 0 bis π die absoluten Werte von y symmetrisch wiederkehren, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen.

III. Die zugehörige Kurve zeigt Fig. 17 punktiert. Sie zerfällt in unendlich viele kongruente Zweige, welche den Unendlichkeitsstellen entsprechend je zwei zur y-Achse parallele Asymptoten haben, derart,

daß jede Asymptote an einen Zweig zugleich Asymptote an einen Nachbarzweig ist. Aber zwischen zwei Asymptoten nimmt y nur ab.

51. In [44] bis [50] ist die analytische Auffassung der trigonometrischen Funktionen eingeleitet, doch ihre Vollendung muß noch verschoben werden. (§ 25.) Die nun noch folgenden Formeln sind ohne Beweis aus der Goniometrie als bekannt entnommen zum Gebrauch in vorkommenden Fällen.

I.

Grad $= \varphi^0$	Arcus $= x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
0^0	0	0	1	0	∞
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

$$\text{II.}\quad \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}, \\ 1 + \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad 1 + \dfrac{1}{\operatorname{cotg}^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1. \end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \begin{cases} y = \sin x; \quad \cos x = \sqrt{1 - y^2}, \quad \operatorname{tg} x = \dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \operatorname{cotg} x = \dfrac{\sqrt{1 - y^2}}{y}. \\ y = \cos x; \quad \sin x = \sqrt{1 - y^2}, \quad \operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{1 - y^2}}{y}, \quad \operatorname{cotg} x = \dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2}}. \\ y = \operatorname{tg} x; \quad \sin x = \dfrac{y}{\sqrt{1 + y^2}}, \quad \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \quad \operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{y}. \\ y = \operatorname{cotg} x; \quad \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \quad \cos x = \dfrac{y}{\sqrt{1 + y^2}}, \quad \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{y}. \end{cases}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} \sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2, \\ \sin(x_1 - x_2) = \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2. \\ \cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2, \\ \cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2, \\ \operatorname{tg}(x_1 + x_2) = \dfrac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{1 - \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2}, \quad \operatorname{tg}(x_1 - x_2) = \dfrac{\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x_2}{1 + \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2}. \\ \operatorname{ctg}(x_1 + x_2) = \dfrac{\operatorname{cotg} x_2 \operatorname{cotg} x_1 - 1}{\operatorname{cotg} x_2 + \operatorname{cotg} x_1}, \quad \operatorname{ctg}(x_1 - x_2) = \dfrac{\operatorname{cotg} x_2 \operatorname{cotg} x_1 + 1}{\operatorname{cotg} x_2 - \operatorname{cotg} x_1}, \end{cases}$$

$$\text{V.}\quad\begin{cases}\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin \dfrac{x_1 + x_2}{2} \cos \dfrac{x_1 - x_2}{2}, \\ \sin x_1 - \sin x_2 = 2 \sin \dfrac{x_1 - x_2}{2} \cos \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ \cos x_1 + \cos x_2 = 2 \sin \dfrac{x_2 + x_1}{2} \cos \dfrac{x_1 - x_2}{2}, \\ \cos x_1 - \cos x_2 = 2 \sin \dfrac{x_2 - x_1}{2} \sin \dfrac{x_2 + x_1}{2}.\end{cases}$$

$$\text{VI.}\quad\begin{cases}\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \\ \operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{cotg} 2x = \dfrac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}.\end{cases}$$

$$\text{VII.}\quad \sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

$$\text{VIII.}\quad\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = z, \quad \sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \operatorname{tg} x = \dfrac{2z}{1-z^2}, \\ \qquad\qquad \operatorname{cotg} x = \dfrac{1-z^2}{2z}.\end{cases}$$

$$\text{IX.}\quad \sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

I. gibt einige vielgebrauchte Werte trigonometrischer Funktionen; II. gibt die sechs Beziehungen zwischen je zwei der vier trigonometrischen Funktionen d e s s e l b e n arcus; III. zeigt, wie mittelst II. jede Funktion explizite durch jede andere ausdrückbar ist (die Vorzeichen der Wurzeln richten sich nach den Quadranten); IV. enthält die allbekannten Additions- und Subtraktionstheoreme der trigonometrischen Funktionen; V. enthält Umformungen von IV.; VI. folgt aus IV., wenn $x_1 = x_2 = x$ gesetzt wird; VII. entsteht aus VI. durch Umkehrung und Übergang auf den halben arcus; VIII. ist eine Substitution, die später vielfach anzuwenden ist. Sie lehrt die trigonometrischen Funktionen zu entfernen, o h n e d a ß W u r z e l n a u f t r e t e n; IX. endlich ist eine fortlaufende Ungleichung, die immer gilt, wenn x im ersten Quadranten liegt. Sie ergibt sich aus den Ungleichungen, Fig. 15:

$$\triangle OAP < \text{Sektor } OAP < \triangle OAR.$$

Da $OA = 1$ gesetzt wurde, ist das erste Dreieck $= \frac{\sin x}{2}$, das letzte $\frac{\operatorname{tg} x}{2}$. Der dazwischenliegende Sektor ist $= \frac{x}{2}$ [45 9]. Nach Multiplikation mit 2 entsteht also IX. Eine wichtige Anwendung in [88].

52. D i e a r c u s - F u n k t i o n e n o d e r d i e z y k l o m e t r i s c h e n F u n k t i o n e n. Sie werden bezeichnet als:

$$\textbf{arc}\,(\sin = x),\ \textbf{arc}\,(\cos = x),\ \textbf{arc}\,(\text{tg} = x),\ \textbf{arc}\,(\text{cotg} = x) \tag{1}$$

und werden erklärt als die Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen, wie die Wurzeln als Umkehrungen der Potenzen oder Logarithmen als Umkehrungen der Exponentialfunktionen. Also die beiden Gleichungen:

$$\alpha)\ y = \text{arc}\,(\sin = x) \quad \beta)\ x = \sin y;\ \text{oder} \tag{2}$$

$$\alpha)\ y = \text{arc}\,(\cos = x) \quad \beta)\ x = \cos y;\ \text{oder} \tag{3}$$

$$\alpha)\ y = \text{arc}\,(\text{tg} = x) \quad \beta)\ x = \text{tg}\, y;\ \text{oder} \tag{4}$$

$$\alpha)\ y = \text{arc}\,(\text{cotg} = x) \quad \beta)\ x = \text{cotg}\, y \tag{5}$$

sollen ein und dieselbe Abhängigkeit ausdrücken, nur in verschiedenen Formen.

I. Man schreibt die arcus-Funktionen mit Fortlassung des Gleichheitszeichens und der Klammer auch kürzer:

$$\text{arc}\sin x,\quad \text{arc}\cos x,\quad \text{arc}\,\text{tg}\, x,\quad \text{arc}\,\text{cotg}\, x. \tag{6}$$

Dafür drückt die Schreibweise (1) den Sachverhalt etwas deutlicher aus, nämlich, daß es sich um einen arcus handelt, dessen Sinus (oder cosinus, oder tangens, oder cotangens) $= x$ gesetzt worden ist, während (6) den Anfänger leicht dazu verleitet, an den sinus „von“ x usw. zu denken.

II. Jeder Satz, jede Formel über trigonometrische Funktionen kann folgerichtig in einen Satz, eine Formel über arcus-Funktionen umgekehrt werden. Freilich ändert sich dabei die äußere Form oft vollständig, wie sich sofort zeigen wird. Zunächst halte man sich gegenwärtig, daß ein sinus und ein cosinus alle Werte zwischen $+1$ und -1 annehmen können, einschließlich dieser Grenzen, darüber hinaus aber nicht gehen. Daher:

III. Die Funktionen $\text{arc}\,(\sin = x)$ und $\text{arc}\,(\cos = x)$ sind (im Bereich reeller Zahlen) nur möglich für $|x| \leq 1$. Die beiden Ausdrücke z. B.

$$\text{arc}\,(\sin = +7),\quad \text{arc}\,(\sin = -5)$$

sind völlig leer [16] (ehe man komplexe Zahlen einführt, § 28).

IV. Dagegen kann ein tangens oder ein cotangens alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, also sind die Funktionen $\text{arc}\,(\text{tg} = x)$ und $\text{arc}\,(\text{cotg} = x)$ immer möglich.

Ferner: Wie in [44] bis [50] wiederholt bemerkt, gehören zu ein und demselben arcus unzählig viele andere arcus, welche denselben sinus oder cosinus oder tangens oder cotangens haben. Also umgekehrt:

V. Die arcus-Funktionen sind unendlich vieldeutig.

Man müßte daher z. B. arc$(\sin = x)$ eigentlich nicht den, sondern besser einen arcus nennen, dessen sinus $= x$ ist. So ist:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^0 = \tfrac{1}{2}, \quad \text{aber auch [47 2]:}$$

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \tfrac{1}{2} \quad \text{und ganz allgemein [47 5]:}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} \pm 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} \pm 2k\pi\right) = \tfrac{1}{2},$$

wo k irgendeine ganze Zahl sein darf. Ebenso ist:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \text{aber auch:}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \text{und ganz allgemein:}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} \pm 2k\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} \pm 2k\pi\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

VI. Die Zahl 2π oder die Periode der trigonometrischen Funktionen wird zum Periodizitätsmodul der arcus-Funktionen. Zwei der letzteren, nämlich arc$(\mathrm{tg} = x)$ und arc$(\mathrm{cotg} = x)$ haben sogar schon den Periodizitätsmodul π [49 IV]. Dafür bleiben aber, wie soeben an zwei Beispielen gezeigt, arc$(\sin = x)$ und arc$(\cos = x)$, selbst abgesehen von ihrem Periodizitätsmodul 2π, noch zweideutig.

53. Aufhebung der unendlichen Vieldeutigkeit der arcus-Funktionen und ihre Verwandlung in Eindeutigkeit. Sie kann nur durch Beschränkungen der Spielräume des arcus erzielt werden, wie z. B. durch folgende:

Vereinbarung: I. arc$(\sin = x)$ und arc$(\mathrm{tg} = x)$ werden zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ genommen. II. arc$(\cos = x)$ und arc$(\mathrm{cotg} = x)$ werden zwischen 0 und π genommen.

Diese Verschiedenheit erklärt sich so: Geht nach I. der arcus von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, so geht sein sinus von -1 bis $+1$ und sein tangens von $-\infty$ bis $+\infty$. Dabei werden alle Zwischenwerte durchlaufen, und zwar jeder nur ein einziges Mal, so daß der sinus jeden Wert von -1 bis $+1$, also jeden für ihn überhaupt möglichen Wert, und der tangens jeden Wert von $-\infty$ bis $+\infty$, also auch jeden für ihn möglichen Wert wirklich einmal, aber auch nur einmal erhält.

Für arc$(\cos = x)$ wäre aber I. gänzlich verfehlt. Denn geht der arcus von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, so geht sein cosinus erst von 0 bis $+1$ und dann zurück von $+1$ bis 0. Es würden also zu jedem positiven Wert des cosinus zwei arcus, dagegen zu jedem negativen Wert gar kein arcus gehören. Für arc$(\mathrm{cotg} = x)$ würde sich zwar eine gleich

schwere Unzulänglichkeit nicht ergeben, wohl aber ein anderer Übelstand, nämlich, daß der Sprung von $+\infty$ zu $-\infty$ in die Mitte des Spielraums für den arcus fiele (statt an seine Grenzen). Deshalb gilt für $\operatorname{arc}(\cos = x)$ und für $\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x)$ die Vereinbarung II. Man überzeugt sich sofort, daß der cosinus alsdann wirklich alle Werte von $+1$ bis -1 und der cotangens ohne Sprung alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, und zwar jeden Wert nur ein einziges Mal.

Damit sind die arcus-Funktionen eindeutig geworden, z. B.:

$$\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{2}\right) = +\frac{\pi}{6}; \qquad \operatorname{arc}\left(\sin = -\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arc}\left(\cos = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi,$$

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = -\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = +\infty) = 0, \qquad \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = -\infty) = \pi.$$

Allgemein ist nach den Vereinbarungen I und II

$$\begin{gathered}\operatorname{arc}(\sin = -x) = -\operatorname{arc}(\sin = x); \qquad \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = -x) = -\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x);\\ \operatorname{arc}(\cos = -x) = \pi - \operatorname{arc}(\cos = x);\\ \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = -x) = \pi - \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x).\end{gathered} \tag{1}$$

Selbstverständlich können die Vereinbarungen I und II jederzeit wieder aufgehoben werden, und dies muß sogar geschehen, wenn man in einem gegebenen Falle sich überzeugt hat, daß der betreffende arcus den ihm nach I. und II. zugewiesenen Spielraum wirklich überschreitet. Überhaupt haben sie vornehmlich den Zweck, unter all den unendlich vielen Werten des arcus zunächst *einen einzigen* herauszugreifen als Vertreter der übrigen. Schließt man diesen einen in eckige Klammern ein, so ist ganz allgemein nach [44] bis [50]

$$\begin{aligned}
&\text{a) entweder:} && \operatorname{arc}(\sin = x) = [\operatorname{arc}(\sin = x)] \pm 2k\pi,\\
&\quad\ \text{oder:} && \operatorname{arc}(\sin = x) = \pi - [\operatorname{arc}(\sin = x)] \pm 2k\pi;\\
&\text{b) entweder:} && \operatorname{arc}(\cos = x) = [\operatorname{arc}(\cos = x)] \pm 2k\pi,\\
&\quad\ \text{oder:} && \operatorname{arc}(\cos = x) = -[\operatorname{arc}(\cos = x)] \pm 2k\pi,\\
&\text{c) entweder:} && \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) = [\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)] \pm 2k\pi,\\
&\quad\ \text{oder:} && \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) = \pi + [\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)] \pm 2k\pi,\\
&\text{d) entweder:} && \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) = [\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x)] \pm 2k\pi,\\
&\quad\ \text{oder:} && \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) = \pi + [\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x)] \pm 2k\pi.
\end{aligned} \tag{2}$$

54. Es bleibt übrig, noch einige Grundformeln der Goniometrie umzukehren in Formeln der arcus-Funktionen; z. B. die Formel [464]:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y,$$

wo y statt x geschrieben ist. Der gemeinsame Wert sei $= x$, also:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x, \quad \cos y = x,$$

und nach Umkehrung ([52 2] und [52 3])

$$\frac{\pi}{2} - y = \operatorname{arc}(\sin = x), \quad y = \operatorname{arc}(\cos = x),$$

also

$$\operatorname{arc}(\sin = x) + \operatorname{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

und ebenso:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) + \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) = \frac{\pi}{2}. \tag{1a}$$

Wegen der unendlichen Vieldeutigkeit sind diese Gleichungen nur unter Einschränkungen richtig. So ist z. B. (1) so zu verstehen: zu jedem der unendlich vielen Werte von $\operatorname{arc}(\sin = x)$ gibt es einen Wert von $\operatorname{arc}(\cos = x)$, so daß ihre Summe $= \frac{\pi}{2}$ ist. Im besonderen gelten (1) und (1a), wenn die Vereinbarungen [53] innegehalten werden.

Ferner nehme man [51 III], schreibe aber y statt x und x statt y, also z. B.

$$x = \sin y, \quad \sqrt{1 - x^2} = \cos y.$$

Man kehre beide Gleichungen um in:

$$y = \operatorname{arc}(\sin = x), \quad y = \operatorname{arc}\left(\cos = \sqrt{1 - x^2}\right),$$

mithin:

$$\operatorname{arc}(\sin = x) = \operatorname{arc}\left(\cos = \sqrt{1 - x^2}\right).$$

Verfährt man in dieser Weise mit dem ganzen Systeme [51 III], so verwandelt es sich in:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{arc}(\sin = x) &= \operatorname{arc}\left(\cos = \sqrt{1 - x^2}\right) = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) \\
&= \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \\
\operatorname{arc}(\cos = x) &= \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{1 - x^2}\right) = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right) \\
&= \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right), \\
\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) &= \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{1}{x}\right) = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) \\
&= \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right), \\
\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) &= \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{1}{x}\right) = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right) \\
&= \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Es folgt die Umkehrung von [51] IV. Man schreibe zunächst y_1 und y_2 statt x_1 und x_2, also:

$$\sin(y_1 + y_2) = \sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2 = x_1 \sqrt{1 - x_2^2} + x_2 \sqrt{1 - x_1^2},$$

wenn $\sin y_1 = x_1$, $\sin y_2 = x_2$ gesetzt und [51] III. berücksichtigt wird. Die Umkehrung ergibt:

$$y_1 + y_2 = \operatorname{arc}\left(\sin = x_2 \sqrt{1 - x_2^2} + x_2 \sqrt{1 - x_1^2}\right),$$

sowie:

$$y_1 = \operatorname{arc}(\sin = x_1), \quad y_2 = \operatorname{arc}(\sin = x_2),$$

folglich:

$$\operatorname{arc}(\sin = x_1) + \operatorname{arc}(\sin = x_2) = \operatorname{arc}\left(\sin = x_1 \sqrt{1 - x_2^2} + x_2 \sqrt{1 - x_1^2}\right).$$

So verfahre man mit allen acht Formeln [51], IV. Es wird:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{arc}(\sin = x_1) \pm \operatorname{arc}(\sin = x_2) &= \operatorname{arc}\left(\sin = x_1 \sqrt{1 - x_2^2} \pm x_2 \sqrt{1 - x_1^2}\right) \\
\operatorname{arc}(\cos = x_1) \pm \operatorname{arc}(\cos = x_2) &= \operatorname{arc}\left(\cos = x_1 x_2 \mp \sqrt{1 - x_1^2} \cdot \sqrt{1 - x_2^2}\right) \\
\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x_1) \pm \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x_2) &= \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{x_1 \pm x_2}{1 \mp x_1 x_2}\right) \\
\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x_1) \pm \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x_2) &= \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{x_1 x_2 \mp 1}{x_2 \pm x_1}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (3$$

Daß man bei (2) und (3) ebenso wie bei (1) auf die unendliche Vieldeutigkeit der arcus-Funktionen und außerdem auf das doppelte Vorzeichen der Wurzel gehörige Rücksicht zu nehmen hat, versteht sich von selbst. Man nennt (3) die Additionstheoreme der arcus-Funktionen. Sie entsprechen so offenbar dem allbekannten Additionstheorem für die Logarithmen:

$$\log x_1 + \log x_2 = \log(x_1 x_2), \tag{4}$$

daß man auf den Verdacht einer inneren Verwandtschaft beider Funktionsarten geraten könnte. Wie gerechtfertigt er ist, wird § 28 zeigen. Ganz nebenbei sei erwähnt, daß Abel ein sehr allgemeines und für die Spitzen der Analysis äußerst wichtiges Additionstheorem aufgestellt hat, von dem diese hier die einfachsten Fälle vorstellen.

Setzt man noch in (3) $x_1 = x_2$ und nimmt links das +-Zeichen, so folgt noch:

$$\left.\begin{aligned}
2 \operatorname{arc}(\sin = x) &= \operatorname{arc}\left(\sin = 2x\sqrt{1 - x^2}\right); \\
2 \operatorname{arc}(\cos = x) &= \operatorname{arc}(\cos = 2x^2 - 1), \\
2 \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) &= \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2x}{1 - x^2}\right); \\
2 \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) &= \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{x^2 - 1}{2x}\right).
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Die Additionstheoreme sind zu den Theoremen über die Ver-

doppelung eines arcus geworden. Offenbar sind (5) die Umkehrungen von [51] VI. Ihnen entspricht die logarithmische Formel:

$$2 \log x = \log(x^2). \tag{6}$$

So wie bei Ableitung von (1), (2), (3) und (5) geschehen, könnte jede Formel der Goniometrie in eine Formel für arcus-Funktionen verwandelt werden. Doch genügt das Gegebene wohl durchaus.

Übungen zu § 5.

1. Den Winkel $273^0\,14'\,37{,}6''$ in einen arcus zu verwandeln (auf sieben Stellen genau.)

2. Der arcus ist 3,741569, wie groß ist der Winkel.

3. Durch Übergang von n auf $n+1$ sind zu berechnen $\sin 3\varphi$, $\cos 3\varphi$, $\operatorname{tg} 3\varphi$, $\operatorname{cotg} 3\varphi$; $\sin 4\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\operatorname{tg} 4\varphi$, $\operatorname{cotg} 4\varphi, \ldots$ bis $\sin 6\varphi$, $\cos 6\varphi$, $\operatorname{tg} 6\varphi$, $\operatorname{cotg} 6\varphi$.

4. $\operatorname{arc}(\sin = +0{,}35267)$, $\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = -3{,}33333)$, $\operatorname{arc}(\cos = -0{,}71463)$, $\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = +1{,}23456)$ sollen mit einer fünfstelligen Logarithmentafel aufgefunden werden (fünf Stellen).

§ 6. Zusammengesetzte und implizite gegebene Funktionen.

55. Ausdrücke von der Form:

$$f(x) \pm \varphi(x); \quad f(x) \cdot \varphi(x); \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \tag{1}$$

in denen Funktionen durch Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren zusammengesetzt werden, sind in den Formeln der Mathematik sehr gewöhnlich, z. B.:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Häufig auch tritt an Stelle der einen Funktion eine Konstante, so daß Verbindungen entstehen wie:

$$f(x) + C, \quad f(x) - C, \quad a f(x), \quad \frac{f(x)}{a}, \tag{2}$$

welche auf das Addieren einer Konstanten C oder $-C$, oder auf das Multiplizieren mit einem konstanten Faktor a oder $\frac{1}{a}$ (vgl. [36]) zurückkommen.

Solche einfachen Zusammensetzungen kann man beliebig wiederholen und untereinander zu mehrfach zusammengesetzten Funktionen verknüpfen, z. B.:

$$\frac{x \cdot \sin x}{1 + \cos x}.$$

Hier ist zunächst eine Division, dann im Zähler eine Multiplikation und im Nenner die Addition einer Konstanten auszuführen.

Ist ein Funktionsausdruck auf diese Weise sehr lang geworden, so kann es zuweilen schwierig werden, ihn mit einem Blick zu umfassen. Man muß sich also einige Übung verschaffen in der schnellen Durchdringung solcher Ausdrücke. Auch versteht sich, daß man die möglichst einfache Form zu erzielen suchen wird, etwa durch Verwandlung von Doppelbrüchen in einfache Brüche, durch Absonderung gemeinsamer Faktoren oder die umgekehrte Rechnung, durch Vereinfachung von Wurzelausdrücken, wenn dies möglich ist usw.

56. Funktionen von Funktionen sind Ausdrücke, wie:

$$e^{\sin x}, \quad \ln(\cos x), \quad \sqrt[n]{\operatorname{arc}(\sin = x)},$$

in denen eine Funktion sozusagen in eine andere eingeschaltet wird. Ihr allgemeinstes Symbol ist:

$$\text{I.} \qquad y = f(\varphi(x)),$$

welches zu erkennen gibt, daß y zunächst diejenige Funktion sein soll, welche durch den Buchstaben f vertreten wird, daß aber in f an Stelle der ursprünglichen Veränderlichen eine Funktion derselben zu setzen ist, nämlich eben die, welche durch den Buchstaben φ vertreten wird. Fügt man letztere Funktion als Zwischenveränderliche z ein, so läßt sich I. auseinanderziehen in die Funktionen f und φ:

$$\text{II.} \qquad y = f(z); \qquad\qquad \text{III.} \qquad z = \varphi(x),$$

wie auch umgekehrt I. rückwärts durch Zusammenziehen von II. und III. entsteht, wobei die Zwischenveränderliche z, die in II. unabhängige, in III. aber abhängige Veränderliche ist, wieder aufgegeben wird. In den drei Beispielen wird:

I.	II.	III.
$y = f(\varphi(x))$	$y = f(z)$,	$z = \varphi(x)$
$y = e^{\sin x}$	$y = e^z$,	$z = \sin x$
$y = \ln(\cos x)$	$y = \ln z$,	$z = \cos x$
$y = \sqrt[n]{\operatorname{arc}(\sin = x)}$	$y = \sqrt[n]{z}$,	$z = \operatorname{arc}(\sin = x)$

Solche Funktionen von Funktionen trifft man in mathematischen Formeln sehr häufig an, z. B.: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Denn $\sin^2 x$ ist $= (\sin x)^2 = z^2$ (für $z = \sin x$) und $\cos^2 x$ ist $= (\cos x)^2 = z^2$ (für $z = \cos x$). Es seien noch folgende allgemeine Bemerkungen angeknüpft.

Erstens. Ausnahmsweise können die beiden Funktionen f und φ zu einer einzigen Funktion verschmolzen werden, z. B.:

$$(x^4)^3 = x^{(4 \cdot 3)} = x^{12}.$$

Ja, zuweilen kann diese Verschmelzung zur ursprüglichen Veränderlichen x zurückführen [58], z. B.:

$$(\sqrt[3]{x})^3 = x.$$

In der Regel aber bleibt die Funktion von einer Funktion das, was sie ist, wie:

$$e^{\sin x} \quad \text{oder} \quad \ln(\cos x) \quad \text{oder} \quad \sqrt[n]{\operatorname{arc}(\sin = x)}.$$

Zweitens. Ausnahmsweise können die beiden einzuschachtelnden Funktionen miteinander vertauscht werden. Es ist dann:

$$f(\varphi(x)) \equiv \varphi(f(x)),$$

z. B.: $(x^4)^3 = (x^3)^4 = x^{12}$; $(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{(x^3)} = x$.

In der Regel aber ist eine solche Vertauschung nicht erlaubt. So sind:

$$e^{(\sin x)} \quad \text{und} \quad \sin(e^x)$$

offenbar ganz und gar nicht identisch.

Drittens. Ist $\varphi(x)$ eine gegebene Funktion, so entsteht eine beliebige Funktion einer gegebenen Funktion. Es sei z. B.:

$$\varphi(x) = ax + b, \quad \text{etwa} \quad \varphi(x) = -x \quad \text{oder} \quad \varphi(x) = x + h,$$

also:

$$f(\varphi(x)) = f(ax + b), \quad \text{etwa} \quad f(\varphi(x)) = f(-x) \quad \text{oder} \quad f(\varphi(x)) = f(x + h).$$

Solche Fälle treten namentlich ein, wenn man die anfängliche ursprüngliche Veränderliche verlassen und an ihre Stelle eine andere ursprüngliche Veränderliche einführen will. Erstere heiße x, letztere heiße x_1. Dann muß bei einer solchen Transformation x durch x_1 ausgedrückt werden:

$$x = \varphi(x_1),$$

worauf irgendeine Funktion von x zu einer Funktion von einer Funktion von x_1 wird. Aus $f(x)$ wird $f(\varphi(x_1))$.

So, wenn man den Anfangspunkt auf der x-Achse um ein Stück a verschiebt, lautet die Transformationsformel: $x = x_1 + a$ und aus $f(x)$ wird $f(x_1 + a)$. (Fig. 18.)

Fig. 18.

Solche Einführung neuer Veränderlicher geschieht meist in der Absicht, eine Vereinfachung zu erlangen. Es sei z. B. gegeben:

$$y = x^2 + 2x + 7;$$

es sei: $x = x_1 - 1$, so wird:

$$y = (x_1 - 1)^2 + 2(x_1 - 1) + 7 = x_1^2 - 2x_1 + 1 + 2x_1 - 2 + 7,$$

oder:

$$y = x_1^2 + 6.$$

Man sieht, das Glied ersten Grades ist „verschwunden". Der quadratische Ausdruck ist „gereinigt" [72].

Viertens. Ist die Funktion f gegeben, aber die Funktion φ beliebig, so entsteht eine gegebene Funktion einer beliebigen Funktion z. B.: $(\varphi(x))^2$, $\ln(\varphi(x))$, $\sqrt[3]{\varphi(x)}$ usw. In dem besonders einfachen Falle: $f(z) = az + b$ erhält man:

$$f(\varphi(x)) = a\varphi(x) + b,$$

was wieder auf [55 2] zurückkommt, nur φ statt f.

57. Die in [55] und [56] beschriebenen Methoden, Funktionen zusammenzusetzen, kann man als besondere Fälle der folgenden allgemeineren Methode ansehen. Es sei y zunächst gegeben als Funktion beliebiger vieler Veränderlicher [35]:

$$\text{I.} \qquad y = F(z, u, \ldots),$$

und nun seien für $z, u, \ldots$ beliebige Funktionen von x gesetzt:

$$\text{II.} \qquad z = f(x), \quad u = \varphi(x), \ldots,$$

so entsteht die zusammengesetzte Funktion von x:

$$\text{III.} \qquad y = F(f(x), \varphi(x), \ldots).$$

Nimmt man zwei Zwischenveränderliche z, u und für F eine gegebene Funktion von z und u, z. B.:

$$F(z, u) \equiv z \pm u; \quad z \cdot u; \quad \frac{z}{u},$$

so entsteht wieder [55 1]. Beschränkt man sich aber auf eine Zwischenveränderliche z, läßt dagegen F willkürlich, so entsteht die Funktion einer Funktion:

$$y = F(f(x)),$$

also [56] I, nur F statt f, und f statt φ geschrieben.

Nunmehr ist wohl völlig klar, was man unter zusammengesetzten Funktionen versteht. Wie schon in [55] bemerkt, können sie untereinander oder wieder mit einfachen Funktionen beliebig oft zu doppelt, dreifach, ... zusammengesetzten Funktionen zusammengesetzt werden. So entstehen z. B. die Funktionen von Funktionen von Funktionen:

$$y = f(\varphi(\psi(x))),$$

welche sich erst durch zwei Zwischenveränderliche z und u in einfache Funktionen:

$$y = f(z), \quad z = \varphi(u), \quad u = \psi(x)$$

zerlegen lassen, wie:

$$y = e^{\sin(x^3)} \quad \text{in:} \quad y = e^z, \quad z = \sin u, \quad u = x^3.$$

Sodann die Funktionen von Funktionen von Funktionen von Funktionen usw. Ein besonderer Fall entsteht, wenn man eine Funktion immer mit sich selbst zusammensetzt. Man nennt das „Iterieren“:

$$f(x), \quad f(f(x)), \quad f(f(f(x))), \ldots \text{ z. B.:}$$

$$\sin x, \quad \sin(\sin x), \quad \sin(\sin(\sin x)), \ldots$$

58. Entwickelte und unentwickelte, oder explizite und implizite gegebene Funktionen. Alle bisher betrachteten Funktionen einer Veränderlichen x sind unmittelbar durch Funktionsausdrücke $f(x)$ gegeben. Mögen sie einfach oder zusammengesetzt sein, das soll hier nichts gelten. Solche Funktionen heißen auch entwickelt oder explizite gegeben.

Dagegen nennt man eine Funktion mittelbar, unentwickelt oder implizite gegeben, wenn sie zwar irgendwie durch Bedingungen bestimmt oder doch bestimmbar ist, aber der Funktionsausdruck selbst fehlt oder noch fehlt, also erst entwickelt werden müßte, worauf man aber häufig aus triftigen Gründen verzichtet. Die einfachsten sind die folgenden drei Arten, aufgeführt unter [58], [59], [60]:

Umkehrung einer explizite gegebenen Funktion. (Vertauschung der abhängigen mit der unabhängigen Veränderlichen.) Ist x eine Funktion von y, so ist auch y eine Fnnktion von x. Gibt man erstere explizite durch einen Funktionsausdruck:

$$x = f(y), \tag{1}$$

so entsteht oder würde entstehen die umgekehrte Funktion:

$$y = \varphi(x) \tag{2}$$

durch Auflösung von (1) nach y. Beispiele solcher Umkehrungen sind wiederholt in § 4 und § 5 aufgetreten; so ergeben:

$$x = y^n, \quad x = e^y, \quad x = \sin y,$$

durch Umkehrung:

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad y = \ln x, \quad y = \operatorname{arc}(\sin = x).$$

Man hat eben diese Umkehrungen durch besondere Zeichen und Namen als Wurzeln, Logarithmen, arcus-Funktionen gleichsam selbstständig gemacht, um auch sie als explizite gegebene Funktionen behandeln zu können. Aber so hochwillkommen diese Erweiterung auch ist, reicht sie doch nicht aus zur allgemeinsten expliziten Darstellung von (2) aus (1). Ein klassisches Beispiel bietet die Keplersche Gleichung [319]:

$$M = E - e \sin E, \tag{3}$$

durch deren Umkehrung E als Funktion von M bestimmt werden würde. Doch reichen zur Auflösung von (3) nach E die gewöhn-

lichen Methoden nicht aus, „propter arcus et sinus heterogenitatem“, wie Kepler sich ausgedrückt hat. Man muß vielmehr Annäherungsmethoden, (z. B. die von Newton § 22) oder unendliche Reihen usw. gebrauchen.

Man kann aber auch ganz auf die Umkehrung von (1), also auf (2) verzichten und bei (1) bleiben, aber mit dem Hintergedanken, daß man doch eigentlich y als Funktion von x betrachten wolle. Und in diesem ganz besonderen Sinne soll durch (1) die Größe y implizite als Funktion von x gegeben gelten.

Durch Einsetzen von (2) in (1) oder von (1) in (2) ensteht:

$$x = f(\varphi(x)), \quad y = \varphi(f(y)), \tag{4}$$

d. h. die Zusammensetzung zweier Funktionen, die Umkehrungen voneinander sind, führt zur ursprünglichen Veränderlichen zurück, z. B.:

$$x = \sqrt[n]{x}^{\,n} = \sqrt[n]{x^n} = e^{\ln x} = \ln(e^x) = \sin(\mathrm{arc}(\sin = x)) = \mathrm{arc}(\sin = \sin x)$$

usw. Umgekehrt: Ist (4) erfüllt, so sind die Funktionen f und φ Umkehrungen voneinander. Denn setzt man in (4): $y = \varphi(x)$, so folgt $x = f(y)$.

59. Es ist eine beliebige Gleichung zwischen x und y gegeben. Wenn man, wie es üblich ist, alle Glieder auf die linke Seite bringt, so daß rechts nur 0 steht, so wird also verlangt, daß eine gegebene Funktion von x und y verschwinden soll:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Man müßte (1) nach y auflösen, um die explizite Darstellung von y als Funktion von x zu erhalten, während die Auflösung nach x umgekehrt x als Funktion von y ergeben würde. Es sei etwa die Gleichung vorgelegt:

$$2x^2 - 3xy + 4y^2 - 5x + 6y - 7 = 0. \tag{2}$$

Die Auflösung nach y ergibt:

$$y = \frac{3x - 6 \pm \sqrt{-23x^2 + 44x + 148}}{8}. \tag{3}$$

Die Auflösung nach x ergibt:

$$x = \frac{3y + 5 \pm \sqrt{-23y^2 - 18y + 81}}{4}. \tag{4}$$

In anderen Fällen kann die Auflösung von (1) nach x oder y erhebliche Schwierigkeiten bereiten oder auch nach den gewöhnlichen Methoden gar nicht möglich sein. So ist die an sich doch gar nicht so verwickelte Gleichung:

$$y^5 - 3xy^2 + 7x^5 - 9 = 0, \tag{5}$$

wie die höhere Algebra lehrt, weder nach x noch nach y algebraisch, d. h. durch Wurzelausdrücke lösbar.

In solchen Fällen bleibt man oft bei (1) stehen, mit dem Hintergedanken, y implizite als Funktion von x zu betrachten. Aber selbst dann, wenn man die Wahl hat zwischen (1) und der expliziten Form:

$$y = f(x), \tag{6}$$

so nimmt man durchaus nicht immer (6), sondern sogar oft viel lieber (1). Denn bei näherer Betrachtung zeigt sich (1) oft viel geeigneter, besonders für analytische Zwecke. Wenn z. B. $f(x)$ Wurzeln und Brüche enthalten sollte, so kann trotzdem $F(x, y)$ von Wurzeln und Nennern frei gehalten werden, indem man die Wurzeln durch Potenzieren, die Nenner durch Multiplizieren entfernt, was beides immer möglich ist. Man blicke etwa auf (2), (3) und (4).

Als zweiter Vorzug von (1) kann hervorgehoben werden, daß die Wahl offenbleibt, ob man y als Funktion von x, oder x als Funktion von y betrachten wolle. Es werden eben in diesem Sinne x und y in (1) ganz gleichmäßig behandelt, wobei die Unterscheidung zwischen abhängiger und unabhängiger Veränderlicher an Schärfe verliert, ja sich bei allgemeinster Auffassung in gegenseitige Abhängigkeit auflöst.

Übrigens enthält (1) ja die explizite Funktion oder die Umkehrung einer solchen als besondere Fälle, wenn man statt $y = f(x)$ oder $x = f(y)$ schreibt $y - f(x) = 0$ oder $x - f(y) = 0$, denn die linke Seite wird alsdann eine Form $F(x, y)$, allerdings eine, die in bezug auf y oder x äußerst einfach ist.

60. Die Parameterdarstellung oder die Darstellung durch eine dritte Größe. Wenn x und y explizite als Funktionen einer dritten Größe, des sog. Parameters gegeben sind:

$$\alpha) \quad x = \varphi(t), \qquad \beta) \quad y = \psi(t), \tag{1}$$

so ist hiermit y zugleich implizite eine Funktion von x. Um sie explizite zu erhalten, müßte man (1α) umkehren, was ergeben möge: $t = \lambda(x)$ und nun in (1β) einsetzen. Es würde folgen: $y = \psi(\lambda(x))$, womit y als Funktion von einer Funktion von x erscheint. Würde (1β) nach t aufgelöst und dann in (1α) eingesetzt werden, so erhielte man umgekehrt x als Funktion von y. Man kann aber auch t so eliminieren, daß eine Endgleichung von der Form $F(x, y) = 0$ erhalten wird, was auf [59_1] führen würde.

Beispiele: Gegeben sei VIII. [51]

$$\alpha) \quad x = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad \beta) \quad y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \tag{2}$$

Um Wurzeln zu vermeiden, löse man (β) nach t^2 auf:

$$t^2 = \frac{1-y}{1+y}$$

und setze in den Nenner von (2α) ein. Es folgt:

$$x = \frac{2t(1+y)}{1+y+1-y} = t(1+y) \quad \text{oder} \quad t = \frac{x}{1+y}.$$

Man hat also t und t^2, daher:

$$\left(\frac{x}{1+y}\right)^2 = \frac{1-y}{1+y}, \quad x^2 = (1-y)(1+y),$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{3}$$

Bereitet die Elimination des Parameters t erhebliche Schwierigkeiten, so behält man (1α) und (1β) bei mit dem Hintergedanken, daß y implizite eine Funktion von x sein soll. Ja, zuweilen führt man sogar absichtlich hinterher einen Parameter ein, obgleich y explizite oder durch eine Gleichung gegeben ist. Als Beispiel diene die Gleichung des sogen. Cartesischen Blattes, (Fig. 19):

$$x^3 + y^3 - axy = 0. \tag{4}$$

Wird $t = y : x$ als Parameter eingeführt und $y = tx$ eliminiert, so folgt $x^3 + t^3 x^3 = atx^2$ und hieraus:

$$\alpha)\quad x = \frac{at}{1+t^3}, \qquad \beta)\quad y = \frac{at^2}{1+t^3}. \tag{5}$$

Diese Parameterdarstellung ist wirklich vortrefflich. Denn x und y sind sehr einfache rationale Funktionen [70] von t, während in (4) die Berechnung von y oder x auf kubische Gleichungen führen würde.

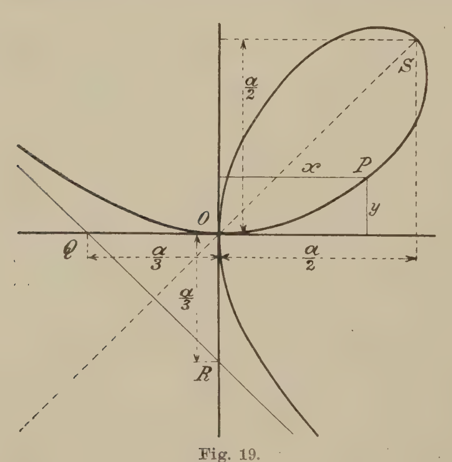


Fig. 19.

Die Parameterdarstellung (1) erfreut sich namentlich in der Mechanik einer besonderen Beliebtheit, weil hier die Zeit t, gerechnet von irgendeinem Augenblick an, sich als Parameter geradezu aufdrängt. Denn die Lage des beweglichen Punktes, also gerade das worauf es ankommt, ist dann in jedem Augenblick durch (1) bestimmt. Will man die Bahn selbst haben, so eliminiere man t. Als einfaches Beispiel diene der schiefe Wurf (Luftwiderstand nicht berück-

sichtigt, Schwere nach Größe und Richtung konstant gesetzt). Die Formeln ($1\,\alpha$) und ($1\,\beta$) lauten hier:

$$\alpha)\quad x = v_0 \cos\alpha \cdot t; \qquad \beta)\quad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}\cdot t^2. \tag{6}$$

Es bedeuten: t die Zeit, x die Abszisse, y die Ordinate des beweglichen Punktes, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, α den Abgangswinkel, g die Fallbeschleunigung. Um die Bahn selbst zu erhalten, berechne man aus der ersten Gleichung t und setze in die zweite ein. Man erhält:

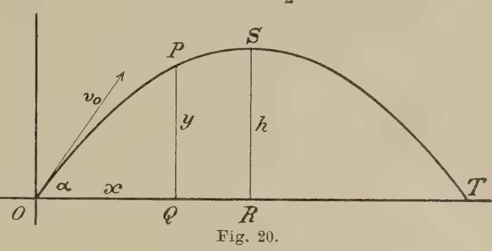


Fig. 20.

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{x^2 g}{2 v_0{}^2 \cos^2\alpha}. \tag{7}$$

Die Bahn ist also eine Parabel, deren Hauptachse zur y-Achse parallel läuft (Fig. 20) [72].

Wenn die Bewegung nicht in einer Ebene vor sich geht, so muß man ein räumliches Koordinatensystem xyz zugrunde legen. Statt der zwei Gleichungen ($1\,\alpha$) und ($1\,\beta$) entstehen dann drei

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t).$$

In der Geometrie ist der Parameter meist ein Hilfswinkel oder eine Hilfsstrecke oder sonst eine Hilfsgröße, durch welche die Lage des „laufenden Punktes" bestimmt wird. Als Beispiel diene:

Die gemeine Zykloide (Fig. 21). Sie ist die Kurve, welche ein fester Punkt des Umfanges eines auf einer Geraden rollenden Kreises

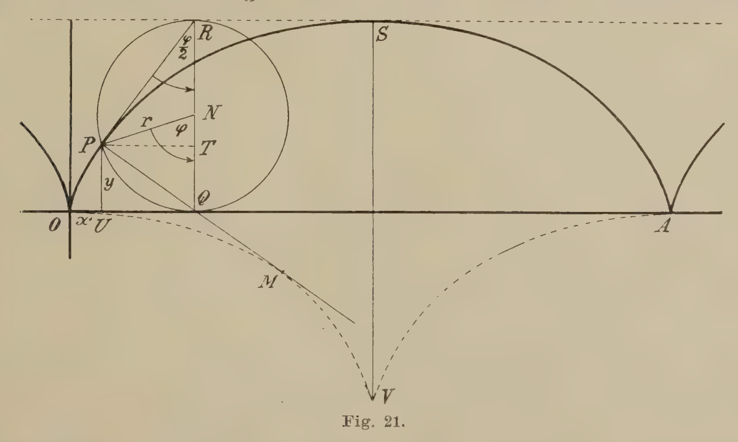


Fig. 21.

beschreibt. Es sei r der Radius des Kreises, O die (oder vielmehr eine) tiefste Lage, P eine beliebige Lage des festen Punktes, $\sphericalangle\, QNP = \varphi$

der abgerollte Zentriwinkel (als arcus). Da beim Rollen einer Kurve auf einer andern die Längen der abgerollten Kurvenstücke gleich sind, so folgt:

Strecke $OQ =$ arcus $PQ = r\varphi$ und ferner:

$$x = OU = OQ - UQ = r\varphi - r\sin\varphi,$$
$$y = UP = QN - TN = r \quad - r\cos\varphi;$$

also:

$$\alpha)\quad x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad \beta)\quad y = r(1 - \cos\varphi). \qquad (8)$$

Damit ist eine sehr vorteilhafte Parameterdarstellung der Zykloide gewonnen. Der Parameter ist φ. Setzt man $\varphi = 0$, so wird $x = 0$, $y = 0$; man kommt wieder auf O zurück. Setzt man $\varphi = \pi$, so wird $x = r\pi$, $y = 2r$; P hat den Scheitel S erreicht. Setzt man $\varphi = 2\pi$, so wird $x = 2r\pi$, $y = 0$; der Kreis ist einmal herumgerollt, P hat wieder die tiefste Lage in A inne. Setzt man $\varphi > 2\pi$, so beginnt ein zweiter, dem Bogen $OPSA$ kongruenter Zykloidenbogen, ebenso wie, negativen Werten von φ entsprechend, dem Bogen $OPSA$ beliebig viele kongruente Bögen links vorangehen usw.

Man könnte φ eliminieren. Aus (8β) folgt:

$$\cos\varphi = \frac{r-y}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r}, \quad \varphi = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{r-y}{r}\right),$$

also in (8α) eingesetzt:

$$x = r\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{r-y}{r}\right) - \sqrt{2ry - y^2}. \qquad (9)$$

In (9) ist x explizite durch y ausgedrückt. Die Umkehrung aber wäre auf elementare Weise nicht möglich, „propter sinus et arcus heterogenitatem“ [58]. Doch tut man überhaupt besser, bei (8α) und (8β) zu bleiben, zumal φ eine so einfache geometrische Bedeutung hat als abgerollter Zentriwinkel. Vgl. [182].

61. Dieser Paragraph hat zu den entwickelten Funktionen:

$$y = f(x) \qquad (1)$$

noch die unentwickelten Funktionen hinzugefügt, welche der Hauptsache nach in zwei Arten zerfallen, nämlich:

Erstens. Die implizite durch eine Gleichung gegebenen Funktionen:

$$F(x, y) = 0. \qquad (2)$$

Zweitens. Die durch eine Parameterdarstellung gegebenen Funktionen:

$$\alpha)\quad x = \varphi(t); \qquad \beta)\quad y = \psi(t). \qquad (3)$$

Denn die anderen Arten waren als besondere Fälle in ihnen enthalten [59]. Man kann (1), (2) und (3) verallgemeinern auf Funk-

tionen beliebig vieler Veränderlicher. Eine Größe z als Funktion zweier anderer x und y kann gegeben sein entweder explizite:

$$z = f(x, y) \tag{4}$$

oder durch eine beliebige Gleichung zwischen x, y, z:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

oder mittels zweier Parameter, etwa u und v:

$$\alpha)\quad x = \varphi(u, v), \qquad \beta)\quad y = \psi(u, v), \qquad \gamma)\quad z = \lambda(u, v). \tag{6}$$

Beispiel. Die Mittelpunktsgleichung der Kugel mit Radius r lautet:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0. \tag{7}$$

Sie ist von der Form (5). Durch Entwicklung von z:

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \tag{8}$$

entsteht die Form (4). Wegen der Parameterdarstellung (6) ist man aber auf unendlich viele Möglichkeiten angewiesen, da es ganz in das Belieben gestellt ist, welche Hilfsgrößen man für u und v nehmen will. Nimmt man z. B. (Fig. 22) die beiden Winkel φ und δ, welche heißen: in der Geographie Länge und Breite, in der Astronomie Rektaszension und Deklination, in der Geodäsie Azimut und Höhe, so ergibt sich aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken ORQ und OQP:

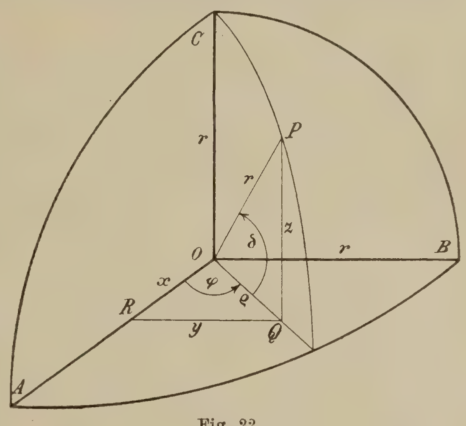


Fig. 22.

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = r \sin \delta, \quad \varrho = r \cos \delta,$$

oder nach Elimination von ϱ

$$\alpha)\ x = r \cos \varphi \cos \delta, \quad \beta)\ y = r \sin \varphi \cos \delta, \quad \gamma)\ z = r \sin \delta. \tag{9}$$

Es ist also die Form (6) entstanden; durch Elimination von φ und δ ergibt sich selbstverständlich wieder (7) oder (8).

Die bisher betrachteten Möglichkeiten, unentwickelte Funktionen zu bilden, lassen sich beliebig zusammensetzen. Es seien etwa zwei Gleichungen:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$

gegeben, so wird y nach Elimination von z eine Funktion von x allein. Behält man aber z bei und drückt durch Auflösung beider Gleichungen nach x und y diese Veränderlichen durch z aus, so gewinnt man eine

Parameterdarstellung mit dem Parameter z. Oder es seien x und y durch zwei Hilfsgrößen u und v ausgedrückt

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

während u und v durch eine Bedingungsgleichung $\lambda(u, v) = 0$ verknüpft sind, so wird y nach Elimination von u und v eine Funktion von x allein, usw. In der analytischen Geometrie werden ja oft genug, wenn es sich etwa um eine ebene, durch eine Konstruktion definierte Kurve handelt, außer den Koordinaten x und y des „laufenden" Punktes noch eine beliebige Anzahl von Hilfsgrößen $u, v, \ldots$ eingeführt und zunächst Gleichungen zwischen $x, y, u, v, \ldots$ in hinreichend großer Zahl aus der Konstruktion abgelesen; hinreichend groß heißt hier eine Gleichung mehr als Hilfsgrößen $u, v, \ldots$ vorhanden sind, so daß diese sämtlich eliminiert werden könnten. Aber selbst wenn diese Elimination nicht oder noch nicht ausgeführt ist, kann man doch sagen, daß diese Gleichungen schon implizite die Gleichung der Kurve enthalten.

62. Es gibt aber noch Möglichkeiten ganz anderer Art, Funktionen implizite zu bestimmen, etwa durch sogenannte Funktionalgleichungen, wovon in [110] ein Beispiel gegeben werden wird, oder durch sogenannte Differentialgleichungen [300], mit hinzutretenden Grenz- oder Randbedingungen oder durch sonstige den Funktionen auferlegte Bedingungen. Wenn es möglich und nicht allzu beschwerlich ist, wird man selbstverständlich in allen solchen Fällen bis zur expliziten Darstellung durchzudringen versuchen; oft aber muß man mehr oder weniger bei der impliziten Darstellung bleiben und aus ihr so zu sagen auf Umwegen die Eigenschaften der betreffenden Funktionen herausholen.

Schließlich sei noch eine besondere Betrachtung über Funktionsausdrücke angestellt. Es kann sein, daß eine Funktion in verschiedenen Spielräumen verschiedene Funktionsausdrücke hat, d. h. daß etwa zwischen x_0 und x_1 etwa $x_0 = +1$, $x_1 = +3$ die Funktion durch den Ausdruck:

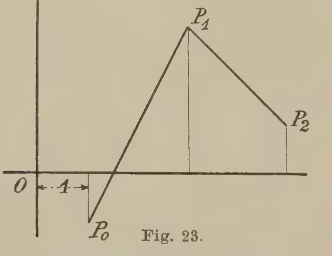


Fig. 23.

$$y = f(x), \text{ z. B. } y = 2x - 3 \tag{1}$$

und zwischen x_1 und x_2 etwa $x_1 = +3$, $x_2 = +5$ durch einen andern Ausdruck:

$$y = \varphi(x), \text{ z. B. } y = -x + 6 \tag{2}$$

bestimmt werden soll. Da für $x = +3$ aus (1) und (2) derselbe Wert $y = +3$ sich ergibt, so entsteht an dieser Stelle nicht einmal ein Sprung, sondern nur, geometrisch gesprochen, ein

Knick. Die Kurve besteht aus zwei in P_1 aneinander stoßenden und einen Winkel bildenden Strecken (Fig. 23).

Solche Darstellungen einer Funktion durch verschiedene Ausdrücke in verschiedenen Spielräumen kommen in den Anwendungen oft genug vor, z. B. bei der Bestimmung der elastischen Linie und der Inanspruchnahme eines Trägers, der an verschiedenen Stellen Einzellasten tragen soll. Ist man in derartigen Fällen berechtigt, überhaupt von einer Funktion zu sprechen?

Nein und ja! Nein, wenn man an die verschiedenen Funktionsausdrücke denkt; ja, wenn man an den allgemeinsten Begriff der Funktion als den der Abhängigkeit denkt. Welcher Art diese Abhängigkeit sei, ist doch bei diesem Begriff ganz gleichgültig, und weshalb sollte man da nicht mit der Möglichkeit rechnen, daß diese Abhängigkeit in einem Spielraum durch eine Formel, in einem andern Spielraum durch eine andere Formel ausgedrückt sei?

Dazu kommt noch dieses: Selbst bei gegebener Abhängigkeit kann man einen Funktionsausdruck $f(x)$ auf sehr mannigfaltige Weise abändern. Es ist erlaubt, Glieder hinzuzufügen, die sich gegenseitig aufheben. Es ist erlaubt, gleiche Faktoren abzusondern oder das Umgekehrte zu tun. Es ist erlaubt, mit derselben Zahl, die ja auch eine Funktion $\varphi(x)$ sein kann, zu multiplizieren und zugleich zu dividieren, wenigstens, so lange $\varphi(x)$ in dem betreffenden Spielraum nicht verschwindet. Es ist überhaupt erlaubt, Operationen auszuführen, die sich gegenseitig aufheben, z. B. statt x zu schreiben: $\sqrt{x}^2$.

Auf diese Weise kann unter Umständen der Funktionsausdruck $f(x)$ in einen anderen Funktionsausdruck $\psi(x)$ umgeformt werden, der $f(x)$ nicht im geringsten mehr ähnlich sieht und dessen Identität mit $f(x)$ sich schwer hinterher feststellen ließe, wenn man nicht die Operationen einzeln kennt, welche die Umformung zur Folge gehabt haben. So ist z. B. für jeden Wert von x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots \text{ in inf.} \tag{3}$$

aber auch für jeden Wert von x:

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \cdots \text{ in inf.} \tag{4}$$

Wer soll es den rechten Seiten von (3) und (4) ansehen, daß sie identisch sind? Im Gegenteil, würde nicht jeder, dem der innere Zusammenhang verborgen ist, der Meinung sein, es mit zwei verschiedenen Funktionen zu tun zu haben?

Mit „dem“ Funktionsausdruck ist es also so ein eigen Ding, denn genau betrachtet hat ja dieselbe Funktion, wie eben erläutert, unendlich viele Funktionsausdrücke. Sollte da nicht auch die Mög-

lichkeit erwogen werden können, daß zwei Funktionsausdrücke zwar innerhalb eines gegebenen Spielraumes für jeden Wert von x gleiche Funktionswerte ergeben, außerhalb aber nicht mehr? Weshalb also sollte nicht z. B. ein Funktionsausdruck existieren, der (1) und (2) in den betreffenden Spielräumen zugleich darstellt?

Diese Fragen sollen hier nicht weiter verfolgt werden, denn dazu gehören Hilfsmittel, welche nur dem gründlichen Kenner der höheren Mathematik zu Gebote stehen. Aber zum Nachdenken anregen, das können sie allerdings.

Übungen zu § 6.

1. Die Funktion

$$x = \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2+1}} + \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2+1}}$$

ist umzukehren.

2. Gegeben die Gleichung:

$$F(x, y) \equiv 6x^2 + 17xy + 12y^2 - 22x - 31y + 20 = 0.$$

Es soll y explizite als Funktion von x bestimmt werden.

3. Gegeben die Gleichung der Bernoullischen Lemniskate:

$$F(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Es soll für x und y eine Parameterdarstellung gefunden werden, indem man einführt

$$z = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right).$$

4. Gegeben die Gleichung der sog. Conchoide oder Muschelkurve

$$(x - l)^2 (x^2 + y^2) - d^2x^2 = 0.$$

Es soll für x und y eine Parameterdarstellung gefunden werden, indem man einführt:

$$\frac{2t}{1 - t^2} = \frac{y}{x}.$$

§ 7. Die Hyperbelfunktionen und die hyperbolischen Areafunktionen.

63. Die Hyperbelfunktionen. Sie werden aus der Exponentialfunktion e^x und ihrem reziproken Wert $1 : e^x = e^{-x}$ wie folgt zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{Kos} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \\ \operatorname{Tang} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad \operatorname{Kotg} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Daß man diesen Verbindungen die besondern Bezeichnungen:

$$\operatorname{Sin} x, \quad \operatorname{Kos} x, \quad \operatorname{Tang} x, \quad \operatorname{Kotg} x \tag{2}$$

(gesprochen Sinus Hyperbolicus x usw.) und den Namen Hyperbelfunktionen gegeben hat, läßt auf dreierlei schließen. Erstens auf einen besonders wichtigen Anlaß, sie auf diese Weise so zu sagen selbständig zu machen, da ja die Möglichkeit der Zusammensetzung gegebener Funktionen unerschöpfbar groß ist. Zweitens auf eine recht innige Verwandtschaft mit den trigonometrischen Funktionen, da der Unterschied in der Schreibweise sich auf die Wahl deutscher statt lateinischer Schrift und großer statt kleiner Anfangsbuchstaben beschränkt, während beim Sprechen das Wort hyperbolicus hinzugesetzt wird. Drittens auf eine Möglichkeit, die Hyperbelfunktionen geometrisch an einer Hyperbel zu veranschaulichen, etwa so wie die trigonometrischen Funktionen am Kreise veranschaulicht sind (§ 5).

Zunächst ergibt sich aus (1):

$$\mathfrak{Tg}\,x = \frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Cof}\,x}, \quad \mathfrak{Cotg}\,x = \frac{\mathfrak{Cof}\,x}{\mathfrak{Sin}\,x}. \tag{3}$$

$$\left(\text{Man vergleiche:} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\right) \tag{3a}$$

Es folgt weiter aus (1):

$$\mathfrak{Cof}\,x + \mathfrak{Sin}\,x = e^x, \quad \mathfrak{Cof}\,x - \mathfrak{Sin}\,x = e^{-x}, \tag{4}$$

also, da $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$ ist:

$$\mathfrak{Cof}^2\,x - \mathfrak{Sin}^2\,x = 1. \tag{5}$$

$$(\text{Man vergleiche:} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1). \tag{5a}$$

Bis auf das entgegengesetzte Vorzeichen ganz gleich gebildet! Während aber (5a) beweist, daß der Punkt, welcher $\cos x$ und $\sin x$ zur Abszisse und Ordinate hat, auf einem Kreis um O mit dem Radius 1 liegt (Fig. 15), zeigt (5), daß der Punkt P mit der Abszisse $\mathfrak{Cof}\,x$ und der Ordinate $\mathfrak{Sin}\,x$ auf einer (gleichseitigen) Hyperbel liegt, deren reelle Halbachse $= 1$ ist. Damit ist der Name „Hyperbelfunktionen" vorläufig erklärt.

Es sei also (Fig. 24):

$$\alpha)\ OQ = \mathfrak{Cof}\,x, \quad \beta)\ QP = \mathfrak{Sin}\,x \tag{6}$$

(entsprechend Fig. 15: $OQ = \cos x$, $QP = \sin x$).

Die Ähnlichkeit der Dreiecke zeigt:

$$\left.\begin{aligned} AR : OA &= QP : OQ \quad \text{oder} \quad AR : 1 = \mathfrak{Sin}\,x : \mathfrak{Cof}\,x \\ BS : OB &= OQ : QP \quad \text{oder} \quad BS : 1 = \mathfrak{Cof}\,x : \mathfrak{Sin}\,x \end{aligned}\right\} \text{ also nach (3)}$$

$$AR = \mathfrak{Tg}\,x, \quad BS = \mathfrak{Cotg}\,x \tag{7}$$

(entsprechend Fig. 15: $AR = \operatorname{tg} x$, $BS = \operatorname{cotg} x$).

Endlich ist, wie in [254] gezeigt werden wird:

$$x = 2 \cdot \text{Sektor } AOP \text{ (der Hyperbel)} \tag{8}$$

(entsprechend zu (9) [45] $x = 2$ Sektor AOP (des Kreises)).

Von den drei Deutungen der Größe x in [45], nämlich erstens als Winkel (angulus) AOP, zweitens als Bogen (arcus) AP, drittens als Fläche (area), überträgt sich hier nur die dritte. Das x ist für die Hyperbelfunktionen nach (8) eine Fläche (area), dagegen sind der Winkel AOP und der Hyperbelbogen AP von x durchaus verschieden.

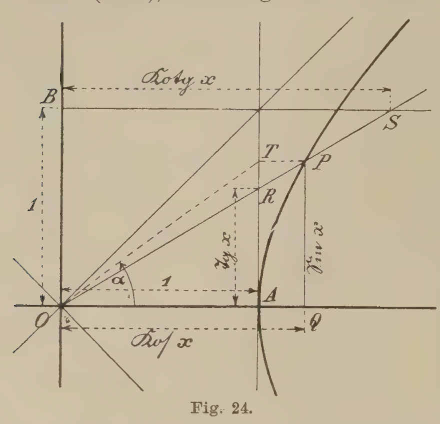


Fig. 24.

Eigentlich fehlt in der Verwandtschaft zwischen Hyperbelfunktionen und Kreisfunktionen nur ein Merkmal, nämlich die periodische Wiederkehr zu demselben Punkt P, wenn x um dieselbe (reelle) Zahl zu- oder abnimmt. Denn wenn x, das selbstverständlich dem Umlaufssinn entsprechend [9] ein Vorzeichen erhält, alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so durchläuft P den ganzen rechten Hyperbelast von der asymptotischen Annäherung an die eine Asymptote bis zu derjenigen an die andere. (Der linke Hyperbelzweig kommt gar nicht in Betracht).

64. Aus den analytischen Definitionen (1) und den analytischen Eigenschaften der Exponentialfunktion oder auch aus der eben gebrauchten geometrischen Darstellung ergibt sich der ungefähre Verlauf der Hyperbelfunktionen, wenn x wie soeben beschrieben wachsend alle Werte von $-\infty$ bis 0 und dann weiter von 0 bis $+\infty$ annimmt, wie folgt:

I. $\mathfrak{Sin}\,x$ durchläuft wachsend alle Werte von $-\infty$ bis 0 und dann weiter von 0 bis $+\infty$. Im ganzen nimmt $\mathfrak{Sin}\,x$ jeden Wert von $-\infty$ bis $+\infty$ an, jeden Wert aber nur einmal. Im besonderen ist:

$$\begin{gathered} \alpha)\ \mathfrak{Sin}\,(-\infty) = -\infty; \quad \beta)\ \mathfrak{Sin}\,(+\infty) = +\infty; \\ \gamma)\ \mathfrak{Sin}\,(0) = 0; \quad \delta)\ \mathfrak{Sin}\,(-x) = -\mathfrak{Sin}\,x. \end{gathered} \tag{1}$$

II. $\mathfrak{Kos}\,x$ durchläuft zuerst abnehmend alle Werte von $+\infty$ bis $+1$ und dann wieder wachsend alle Werte von $+1$ bis $+\infty$. Es ist also $\mathfrak{Kos}\,x$ nur positiv und $\geqq 1$. Innerhalb dieses Spielraumes wird aber jeder Wert zweimal erreicht. Im besonderen ist:

$$\begin{gathered}\alpha)\ \mathfrak{Cos}\,(-\infty) = +\infty\,; \quad \beta)\ \mathfrak{Cos}\,(+\infty) = +\infty\,; \\ \gamma)\ \mathfrak{Cos}\,(0) = +1\,, \quad \delta)\ \mathfrak{Cos}\,(-x) = +\mathfrak{Cos}\,x\,.\end{gathered} \tag{2}$$

III. $\mathfrak{Tg}\,x$ durchläuft wachsend alle Werte von -1 bis 0 und dann von 0 bis $+1$. Im ganzen nimmt $\mathfrak{Tg}\,x$ alle Werte von -1 bis $+1$ an, jeden nur einmal. Im besondern ist

$$\begin{gathered}\alpha)\ \mathfrak{Tg}\,(-\infty) = -1, \quad \beta)\ \mathfrak{Tg}\,(+\infty) = +1, \\ \gamma)\ \mathfrak{Tg}\,(0) = 0, \quad \delta)\ \mathfrak{Tg}\,(-x) = -\mathfrak{Tg}\,x\,.\end{gathered} \tag{3}$$

IV. $\mathfrak{Kotg}\,x$ durchläuft abnehmend alle Werte von -1 bis $-\infty$, springt dann unmittelbar von $-\infty$ bis $+\infty$ und nimmt weiter ab von $+\infty$ bis $+1$. Im ganzen nimmt $\mathfrak{Kotg}\,x$ alle Werte von $-\infty$ bis -1 und von $+1$ bis $+\infty$ an, jeden nur einmal. Im besonderen ist:

$$\begin{gathered}\alpha)\ \mathfrak{Kotg}\,(-\infty) = -1, \quad \beta)\ \mathfrak{Kotg}\,(+\infty) = +1, \\ \gamma)\ \mathfrak{Kotg}\,(0) = \mp\infty, \quad \delta)\ \mathfrak{Kotg}\,(-x) = -\mathfrak{Kotg}\,x\,.\end{gathered} \tag{4}$$

Es sind Tafeln der Hyperbelfunktionen berechnet worden. In der „Hütte“, Ingenieurs Taschenbuch gehen sie von $x = 0$ bis $x = +5{,}09$. Die geometrische Veranschaulichung ihres Verlaufes, entsprechend den Figuren 16 und 17, ist hier nur für:

$$y = \mathfrak{Cos}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tag{5}$$

oder etwas allgemeiner für:

$$y = h\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x}{h} = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) \tag{5a}$$

wiedergegeben. Man nennt die Kurve eine Kettenlinie (Fig. 25) (die um den Scheitel herum einer Parabel sehr ähnlich sieht, weswegen Galilei zuerst annahm, sie möchte wohl eine Parabel sein).

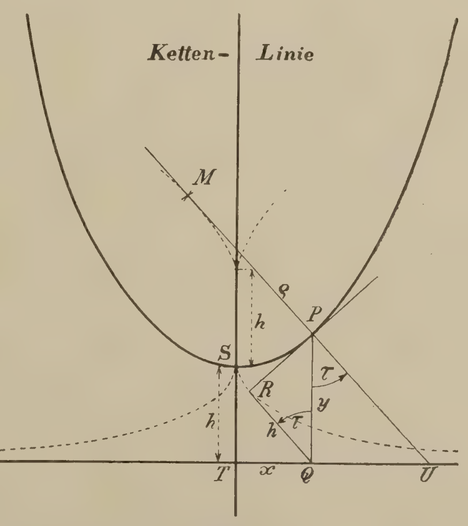


Fig. 25.

65. Man könnte das ganze Formelsystem [51], abgesehen von [51 I] und [51 IX] (da der Periodizitätsmodul π hier fehlt), in ein entsprechendes und beinahe gleichlautendes System für die Hyperbelfunktionen umwandeln. So folgt aus (3), (4) und (5) in Nummer 63, entsprechend [51 III]:

$y = \mathfrak{Sin}\, x$, so: $\mathfrak{Kof}\, x = \sqrt{y^2+1}$, $\mathfrak{Tg}\, x = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$, $\mathfrak{Kotg}\, x = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$, (1)

$y = \mathfrak{Kof}\, x$, so: $\mathfrak{Sin}\, x = \sqrt{y^2-1}$, $\mathfrak{Tg}\, x = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}$, $\mathfrak{Kotg}\, x = \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}$, (2)

(in (1) darf y positiv oder negativ, dagegen die Wurzel nur positiv sein. In (2) muß y positiv und >1 sein, während die Wurzel positiv oder negativ sein darf, vgl. [64]).

Die Additionstheoreme der Hyperbelfunktionen lassen sich aus dem Additionstheorem:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$$

der Exponentialfunktion wie folgt ableiten. Es ist nach [63 1] und [63 4]:

$$\mathfrak{Sin}\,(x_1+x_2) = \frac{e^{(x_1+x_2)} - e^{-(x_1+x_2)}}{2} = \frac{e^{x_1}\cdot e^{x_2} - e^{-x_1}\cdot e^{-x_2}}{2}$$
$$= \frac{(\mathfrak{Kof}\, x_1 + \mathfrak{Sin}\, x_1)(\mathfrak{Kof}\, x_2 + \mathfrak{Sin}\, x_2) - (\mathfrak{Kof}\, x_1 - \mathfrak{Sin}\, x_1)(\mathfrak{Kof}\, x_2 - \mathfrak{Sin}\, x_2)}{2},$$

oder nach Ausmultiplikation im Zähler und Zusammenziehung der Glieder, wenn ebenso mit $\mathfrak{Kof}\,(x_1+x_2)$ verfahren und dann auch noch x_1+x_2 durch x_1-x_2 ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Sin}\,(x_1 \pm x_2) &= \mathfrak{Sin}\, x_1\, \mathfrak{Kof}\, x_2 \pm \mathfrak{Kof}\, x_1\, \mathfrak{Sin}\, x_2, \\ \mathfrak{Kof}\,(x_1 \pm x_2) &= \mathfrak{Kof}\, x_1\, \mathfrak{Kof}\, x_2 \pm \mathfrak{Sin}\, x_1\, \mathfrak{Sin}\, x_2, \end{aligned} \quad (3)$$

also entsprechend den ersten vier Formeln von [51 IV]. So kann man allen Formeln der Goniometrie, außer denjenigen, in welchen die Periodizität der trigonometrischen Funktionen zu Tage tritt (d. h. π vorkommt), entsprechende Formeln der Hyperbelfunktionen zur Seite stellen in einer Weise, daß, wer letztere Formeln sieht, ohne eine Ahnung von Hyperbelfunktionen zu haben, wohl meinen könnte, es sollten goniometrische Formeln sein, in denen statt lateinischer deutsche Schrift und statt kleiner große Anfangsbuchstaben gebraucht wären und in denen noch eine Menge Vorzeichenfehler stecken (vgl. z. B. [63 5] und [63 5[a]].

Kurz, die äußere Verwandtschaft zwischen Hyperbelfunktionen und trigonometrischen Funktionen könnte gar nicht größer sein, als sie ist. Sollte ihr nicht auch eine ebenso große innere Verwandtschaft entsprechen? [§ 28].

66. Die hyperbolischen Areafunktionen sind die Umkehrungen der Hyperbelfunktionen und entsprechen also den gewöhnlichen arcusfunktionen. Die beiden Gleichungen:

$$y = \mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Sin} = x) \quad \text{und:} \quad x = \mathfrak{Sin}\, y,$$

ebenso:

$$y = \mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kof} = x) \quad \text{und:} \quad x = \mathfrak{Kof}\, y, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &\text{ebenso:} \quad y = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = x) \quad \text{und:} \quad x = \mathfrak{Tg}\, y, \\ &\text{ebenso:} \quad y = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kotg} = x) \quad \text{und:} \quad x = \mathfrak{Kotg}\, y \end{aligned} \tag{1}$$

bedeuten ein und dasselbe.

$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x)$ wird gesprochen: Area[1]), deren hyperbolischer Sinus $= x$ ist, usw. Also auch deutsche statt lateinischer Schrift, große statt kleiner Anfangsbuchstaben, während beim Sprechen noch hyperbolicus hinzugesetzt wird.

Die Entwicklungen von [64] ergeben im Sinne der Umkehrung:

I. $\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x)$ wächst von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst. Es ist also $\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x)$ eine (im Gebiet der reellen Zahlen) völlig eindeutige Funktion von x. Im besonderen ist:

$$\begin{aligned} &\alpha)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = -\infty) = -\infty, \quad \beta)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = +\infty) = +\infty, \\ &\gamma)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = 0) = 0, \quad \delta)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = -x) = -\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x). \end{aligned} \tag{2}$$

II. $\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kof} = x)$ existiert nur, wenn $1 \leqq x \leqq +\infty$, d. h. wenn x positiv und $\overline{\gtrless} 1$ ist. Innerhalb dieses Spielraumes hat $\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kof} = x)$ für jeden Wert von x zwei entgegengesetzt gleiche Werte, die für $x = +1$ zusammenfallen mit 0, von da aber mit x absolut wachsend alle Werte von 0 bis $\pm\infty$ annehmen. Im besonderen ist:

$$\alpha)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kof} = +1) = \pm 0, \quad \beta)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kof} = +\infty) = \pm\infty. \tag{3}$$

III. $\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = x)$ existiert nur, wenn $|x| \leqq 1$ ist. Innerhalb dieses Spielraumes durchläuft $\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = x)$ wachsend alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn x von -1 bis $+1$ wächst. Im besonderen ist:

$$\begin{aligned} &\alpha)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = -1) = -\infty, \quad \beta)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = 0) = 0, \\ &\gamma)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = +1) = +\infty, \quad \delta)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = -x) = -\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = x). \end{aligned} \tag{4}$$

IV. $\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kotg} = x)$ existiert nur, wenn $|x| \geqq 1$, also:

$$\text{entweder} \quad 1 < x < +\infty, \qquad \text{oder} \quad -1 > x > -\infty$$

ist. Durchläuft x abnehmend alle Werte von -1 bis $-\infty$ und nach einem Sprung von $-\infty$ zu $+\infty$ wieder abnehmend alle Werte von $+\infty$ bis $+1$, so durchläuft $\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kotg} = x)$ wachsend alle Werte von $-\infty$ bis 0 und darauf von 0 bis $+\infty$. Im besonderen ist:

$$\begin{aligned} &\alpha)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kotg} = -1) = -\infty, \quad \beta)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kotg} = \pm\infty) = \pm 0, \\ &\gamma)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kotg} = +1) = +\infty, \quad \delta)\ \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kotg} = -x) = -\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kotg} = x). \end{aligned} \tag{5}$$

67. Wie nach [63 1] die Hyperbelfunktionen auf die Exponentialfunktionen, so sind ihre Umkehrungen, d. h. die hyperbolischen Areafunktionen auf die Umkehrung der Exponentialfunktion, d. h. auf die logarithmische Funktion zurückführbar. Zur Ableitung der zugehörigen

---

1) Nicht arcus, denn x in Fig. 24 ist kein Bogen oder arcus, sondern eine Fläche oder Area [63].

Formeln verfahre man genau so wie in § 5 wiederholt bei Umkehrungen geschehen, d. h. man schreibe zunächst in [63 1] y statt x, so wird:

$$\mathfrak{Sin}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^y - \frac{1}{e^y}\right) = \frac{(e^y)^2 - 1}{2\, e^y}, \quad \text{oder:}$$

$$(e^y)^2 - 2\,\mathfrak{Sin}\, y\, e^y - 1 = 0, \quad \text{oder, nach } e^y \text{ aufgelöst:}$$

$$e^y = \mathfrak{Sin}\, y + \sqrt{\mathfrak{Sin}^2 y + 1}$$

(die Wurzel darf nur positiv sein, da e^y nur positive Werte annehmen kann). Die Umkehrung nach [42 2] ergibt:

$$y = \ln\left(\mathfrak{Sin}\, y + \sqrt{\mathfrak{Sin}^2 y + 1}\right).$$

Setzt man nun nach [66 1]: $\mathfrak{Sin}\, y = x$, $y = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x)$, so folgt:

$$\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Sin} = x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

In gleicher Weise verfahre man mit den drei andern Formeln von [63 1]. Es folgt das System:

$$\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Sin} = x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \tag{1}$$

$$\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kof} = x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \tag{2}$$

$$\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Tg} = x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kotg} = x) = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}. \tag{4}$$

Es sei noch bemerkt:

Zu (1): x darf alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ haben, die Wurzel aber muß, wie schon bemerkt, positiv genommen werden, wie ja auch daraus folgt, daß sonst der Numerus negativ werden würde und negative Zahlen keine (reellen) Logarithmen haben.

Zu (2): $|x|$ muß ≥ 1 sein, während die Wurzel positiv oder negativ sein darf, im Einklang mit der in [66] gemachten Bemerkung, daß $\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kof} = x)$ eine zweideutige Funktion sei, also:

$$\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kof} = x) = \ln\left(x + \left|\sqrt{x^2 - 1}\right|\right) \text{ oder } \mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kof} = x) = \ln\left(x - \left|\sqrt{x^2 - 1}\right|\right),$$

Das Produkt der beiden Numeri ist $= 1$, also sind die beiden Logarithmen entgegengesetzt gleich, also auch die beiden Werte von $\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kof} = x)$, wie es nach [66] sein muß.

Zu (3): Es muß $1 \geq x \geq -1$ sein, erstens nach [66], dann aber auch, weil sonst der Numerus negativ würde, also kein (reeller) Logarithmus vorhanden wäre.

Zu (4): Es muß $1 \leq |x|$ sein, erstens nach [66], dann aber auch, weil sonst der Numerus negativ würde, also kein (reeller) Logarithmus vorhanden wäre.

68. Die Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrungen betrachtet man als eine in mancher Hinsicht sehr willkommene Ergänzung und Abrundung des Reiches der elementaren Funktionen. Zwar sind sie für die Anwendungen viel weniger wichtig, als die Kreisfunktionen und ihre Umkehrungen, aber doch wichtig genug, daß dieser Paragraph schon deshalb kaum fehlen dürfte. Die Kettenlinie war ein Beispiel, die Bewegung im widerstehenden Mittel unter gewissen Voraussetzungen ist ein anderes [189]. Der Grund aber, welcher hier den Ausschlag zu seinen Gunsten gegeben hat, ist die Verwandtschaft zwischen Exponentialfunktionen und Hyperbelfunktionen einerseits, und zwischen Hyperbelfunktionen und trigonometrischen Funktionen andererseits.

Sie wird in § 28 wieder von einem höheren Standpunkt aufgenommen werden. Vorläufig sei als Ersatz der Winkel (Fig. 24)

$$\sphericalangle\, \alpha = \sphericalangle\, AOT$$

eingeführt, durch welchen die hyperbolischen Funktionen sehr einfach, wenn auch in ganz anderer Weise als wie eben angedeutet, in trigonometrische Funktionen übergeführt werden. Es ist:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Sin}\, x &= QP = AT = AT : 1 = AT : AO = \operatorname{tg} \alpha, \\
\mathfrak{Kos}\, x &= \sqrt{1 + \mathfrak{Sin}^2 x} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 : \cos \alpha, \\
\mathfrak{Tg}\, x &= \mathfrak{Sin}\, x : \mathfrak{Kos}\, x = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha, \\
\mathfrak{Kotg}\, x &= 1 : \mathfrak{Tg}\, x = 1 : \sin \alpha,
\end{aligned}$$

oder zusammengestellt:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Sin}\, x = \operatorname{tg} \alpha; && \mathfrak{Kos}\, x = \sec \alpha = 1 : \cos \alpha, \\
&\mathfrak{Tg}\, x = \sin \alpha; && \mathfrak{Kotg}\, x = \operatorname{cosec} \alpha = 1 : \sin \alpha, \qquad (1) \\
&\mathfrak{Sec}\, x = 1 : \mathfrak{Kos}\, x = \cos \alpha; && \mathfrak{Kosec}\, x = 1 : \mathfrak{Sin}\, x = \operatorname{cotg} \alpha.
\end{aligned}$$

Hierzu sei noch zweierlei bemerkt. 1. α geht in (1) von $-\frac{\pi}{4}$ bis $+\frac{\pi}{4}$. 2. Man verwechsle α nicht mit Winkel AOP.

Übungen zu § 7.

1. Die Additionstheoreme für

$$\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Sin} = x) \pm \mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Sin} = y)$$

usw. sollen aufgestellt werden und zwar auf zwei Weisen. Erstens wie in § 5 mit den trigonometrischen arcus-Funktionen geschehen und zweitens durch Überführung der hyperbolischen arcus-Funktionen in natürliche Logarithmen nebst nachfolgender Anwendung der Formel:

$$\ln u + \ln v = \ln (uv).$$

2. Es soll Sin $2x$, Kos $2x$, Tg $2x$, Kotg $2x$, ... bis Sin $6x$, Kos $6x$, Tg $6x$, Kotg $6x$ entwickelt und mit den entsprechenden Entwicklungen der Kreisfunktionen verglichen werden.

3. Ar (Sin $= -5{,}4321$), Ar (Kos $= +1{,}2395$) sollen mit einer fünfstelligen Logarithmentafel berechnet werden (fünf Stellen).

4. Sin (2,3785), Kos (2,3785), Tg (2,3785), Kotg (2,3785) sind mit einer fünfstelligen Logarithmentafel zu berechnen. Fünf Stellen.

§ 8. Einteilung der Funktionen.

(Die ganzen Funktionen.)

69. Die übliche Einteilung der Funktionen in zwei Hauptgruppen, in algebraische und in transzendente Funktionen, bezieht sich auf die Beschaffenheit des Funktionsausdruckes.

Algebraisch heißt eine Funktion von x, wenn in ihrem Funktionsausdruck mit x unter Hinzunahme möglicherweise vorhandener, wenn auch vielleicht willkürlicher Konstanten oder Koeffizienten nur die sechs spezifisch algebraischen Operationen: Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Wurzelausziehen vorgenommen worden sind und zwar nur in einer endlichen Anzahl, so daß es sich nicht etwa um einen unendlichen Ausdruck, vielleicht eine unendliche Reihe oder ein unendliches Produkt handelt (§ 10). Algebraisch sind z. B. die Ausdrücke:

$$\sqrt{x^2+5x+6}; \quad 7+4x-x^3, \quad \frac{5+3x}{7-4x}.$$

Transzendent heißt jede Funktion, welche nicht algebraisch ist, z. B.

$$\sin x, \ \mathfrak{Sin}\, x, \ e^x, \ \ln x, \ \operatorname{arc}(\cos = x).$$

Zu dieser Einteilung sei noch bemerkt:

Erstens. Das Beiwort algebraisch oder transzendent bezieht sich ausschließlich auf die Art und Weise, wie x und nicht wie etwa willkürliche Konstante in dem Funktionsausdruck enthalten sind. Der Ausdruck $x \sin a + \sqrt{1-x^2}\cos a$ stellt eine algebraische Funktion von x vor, obgleich mit a transzendente Operationen vorgenommen worden sind.

Zweitens. Haben bei einer Zusammensetzung transzendente und algebraische Funktionen mitgewirkt, so heißt das Ergebnis trotzdem transzendent, auch wohl gemischt transzendent algebraisch, z. B.:

$$x^3 \sin x; \quad \sqrt{x} + \ln x, \quad x - \varepsilon \sin x.$$

Drittens. Gelegentlich kann eine algebraische Funktion in transzendenter Form erscheinen, z. B. $e^{3\ln x}$, denn dieser Ausdruck ist nichts anderes als eine andere Form für x^3.

Viertens. Die Bezeichnungen algebraisch und transzendent werden auch auf Funktionen mehrerer Veränderlicher angewendet. So ist:

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + ex + fy + g$$

eine algebraische Funktion von x und y, dagegen

$$z = \sin(x + e^y)$$

eine transzendente Funktion von x und y.

Fünftens. Die Bezeichnungen algebraisch und transzendent werden auch auf implizite durch eine Gleichung $F(x,y) = 0$ definierte Funktionen angewendet. Bezeichnet F eine algebraische Funktion von x und y, so heißt auch y eine algebraische Funktion von x, ganz gleichgültig, ob die Gleichung algebraisch auflösbar sei oder nicht. So bestimmt die Gleichung:

$$y^5 - 2xy^2 + x^5 - 7 = 0$$

eine (implizite) algebraische Funktion von x, obgleich ein expliziter algebraischer Ausdruck für y, der dieser Gleichung genügen würde, nicht existiert. Bezeichnet aber F eine transzendente Funktion von x und y, so ist auch y implizite eine transzendente Funktion von x, vorbehaltlich der gelegentlichen vorhin schon erwähnten Ausnahmen, daß eine algebraische Funktion verkappt unter einer transzendenten Flagge segelt, wie in dem Beispiel $\ln x + \ln y = 1$. Denn diese Gleichung kann umgeformt werden in:

$$\ln(xy) = 1 \quad \text{oder auch in:} \quad xy = e,$$

so daß y eine algebraische Funktion von x wird.

70. Die transzendenten Funktionen vollständig in Gruppen oder Unterabteilungen zu bringen, ist schlechterdings unmöglich. Zwar hat man einige besonders benannt, wie die trigonometrischen Funktionen, die logarithmischen Funktionen, die Exponentialfunktionen. Aber schon die aus ihnen zusammengesetzten Funktionen spotten bei der unbegrenzten Möglichkeit, immer wieder zusammenzusetzen, jeder Bemühung um ein klares Einteilungsprinzip. Dann aber kennt der Mathematiker von Fach außerdem gar viele Funktionen von höherer Transzendenz, wie die elliptischen, die hyperelliptischen, die Abelschen Funktionen usw. Die algebraischen (expliziten) Funktionen werden eingeteilt in irrationale und rationale Funktionen, z. B. die Ausdrücke:

$$\sqrt{x^3}, \quad \sqrt{x + \sqrt{x}}, \quad \frac{5 + 3\sqrt{x}}{7 - 5\sqrt{1 + x^2}},$$

sind irrational, weil x unter Wurzelzeichen vorkommt. Dagegen sind algebraische Ausdrücke ohne Wurzeln, wie:

$$x^2, \quad \frac{x + 5}{3 - 7x}, \quad 5x^3 - 8x^2 + 11x - 7$$

rational. Doch können gelegentlich auch rationale Funktionen irrational scheinen, wie die Funktion $\sqrt[3]{x^6}$, welche nichts anderes ist als x^2.

Die rationalen Funktionen werden wieder eingeteilt in die gebrochen rationalen und die ganzen rationalen Funktionen; bei ersteren hat der Funktionsausdruck eine Bruchform, z. B. ist:

$$\frac{x+5}{3-7x}$$

eine gebrochene rationale Funktion von x. Bei letzteren ist dies nicht der Fall, z. B. sind:

$$x^2, \quad 5x^3 - 8x^2 + 11x - 7$$

ganze rationale Funktionen von x.

Für die Folge wird eine ganze bez. gebrochene rationale algebraische Funktion kurz eine ganze bez. gebrochene Funktion genannt und als solche mit:

$$G(x) \quad \text{bez.} \quad R(x)$$

bezeichnet werden.

Genau wie in [69] bei den Hauptgruppen geschehen, so kann auch die weitere Teilung in Untergruppen auf Funktionen von mehreren Veränderlichen ausgedehnt werden. So ist z. B. $ax^2 + bxy + cy^2 + ey + f$ eine ganze Funktion $G(x, y)$, dagegen $\frac{x+2y+3}{4x+5y+6}$ eine gebrochene rationale Funktion $R(x, y)$. Eine ganze Funktion mehrerer Veränderlicher heißt homogen, wenn alle Glieder denselben Grad haben. So ist z. B.

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

die allgemeinste homogene ganze Funktion zweiten Grades von x und y. Setzt man $y = xz$, schreibt sie dann in der Form:

$$x^2(a + bz + cz^2)$$

und erweitert auf beliebige Grade, so folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra [76]: Eine homogene ganze Funktion zweier Veränderlicher kann auf nur eine Weise in Faktoren ersten und nicht mehr zerlegbare Faktoren zweiten Grades zerlegt werden. Beispiele:

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = (x+y)(x+2y),$$
$$x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 = (x-y)(x-2y)(x-3y),$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2).$$

71. Das eingehende Studium der algebraischen Funktionen ist die Aufgabe der höheren Algebra, eine sehr schöne, aber auch sehr schwierige und sehr umfassende Aufgabe, weil der Fragen, welche aufgeworfen werden können, so viele und so vielseitige sind. Die Ergebnisse, wenigstens die allgemeinsten und einfachsten, kommen

auch der Differential- und Integralrechnung sehr zugute; deshalb mögen einige hier genannt und zum Teil auch abgeleitet werden.

Die ganze Funktion ersten Grades

$$y = a + bx = G_1(x) \qquad (1)$$

ist die einfachste aller Funktionen überhaupt, wie sie auch geometrisch vertreten wird durch die einfachste aller Kurven, die Gerade. Ein Merkmal, welches ihr von allen Funktionen allein zukommt, ist die Proportionalität der Veränderungen von x und y. Man nehme zwei Wertepaare (xy) und $(x_1 y_1)$ an, welche (1) genügen, also daß:

$$y = a + bx, \quad y_1 = a + bx_1$$

ist und bilde die beiden Differenzen

$$\Delta x = x_1 - x; \quad \Delta y = y_1 - y = b(x_1 - x);$$

also:

$$\Delta y = b\Delta x; \quad A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = b = \operatorname{tg}\varphi \quad [28]. \qquad (2)$$

Es sind Δy und Δx einander proportional oder der Differenzenquotient A ist konstant. Umgekehrt. Hat eine Funktion die Eigenschaft, daß ihr (erster) Differenzenquotient konstant ist, so kann sie nur eine ganze Funktion ersten Grades sein. Denn aus (2) folgt durch Umkehrung:

$$\Delta y = A\Delta x; \quad (y_1 - y) = b(x_1 - x); \quad y = (y_1 - bx_1) + bx$$

und dies ist wieder (1), wenn man das zweite Paar $(x_1 y_1)$ konstant, das erste (xy) als veränderlich ansieht und $y_1 - bx_1$ durch a ersetzt.

Ein zweites Merkmal einer ganzen Funktion ersten Grades ist, daß ihre Umkehrung auch eine ganze Funktion ersten Grades ergibt, denn aus

$$y = a + bx \quad \text{folgt:} \quad x = \left(-\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{1}{b}\right) y.$$

Ein drittes Merkmal ist, daß durch Zusammensetzung zweier ganzen Funktionen ersten Grades wieder eine ganze Funktion ersten Grades entsteht. Aus $y = a + bx$ und $z = a_1 + b_1 y$ folgt durch Zusammenziehung:

$$z = a_1 + b_1(a + bx) = (a_1 + b_1 a) + (bb_1)x.$$

72. Die ganze Funktion zweiten Grades oder der quadratische Ausdruck

$$y = G_2(x) = a + bx + cx^2 \qquad (1)$$

hat drei willkürliche Koeffizienten a, b, c, nur darf c nicht verschwinden, weil sonst der zweite Grad sich auf den ersten reduzieren würde. Eine Verbindung zwischen ihnen werde aus sofort hervor-

tretenden Gründen durch einen besonderen Buchstaben hervorgehoben. Sie ist die sogenannte Determinante oder Diskriminante des Ausdruckes:

$$D = ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2, \tag{2}$$

welche man sich ein für allemal merke.

Geometrisch wird (1) veranschaulicht durch eine (gewöhnliche) Parabel, deren Hauptachse zur y-Achse parallel ist (Fig. 26). Man forme nämlich mittelst der „quadratischen Ergänzung" um in:

$$y = c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \left(\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c} - \left(\frac{b}{2c}\right)^2\right) = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4c},$$

oder: $$y = c\left[\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{D}{c^2}\right]. \tag{1a}$$

Fig. 26.

Auch diese Umformung sei hier ein für allemal gemacht. Setzt man zur Abkürzung:

$$-\frac{b}{2c} = \alpha, \quad \frac{D}{c} = \beta, \quad p = \frac{1}{2|c|} \tag{3}$$

und $$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \tag{4}$$

so geht (1a) über in:

$$y' = \pm\frac{x'^2}{2p}. \tag{1b}$$

Damit ist der Beweis erbracht, denn (4) drückt eine Parallelverschiebung aus und (1b) ist bekanntlich die Scheitelgleichung einer Parabel mit dem Halbparameter p, deren Scheitel sich in S befindet, deren Hauptachse die y'-Achse ist und deren Krümmung in S um die $+y'$- oder die $-y'$-Achse geht, je nachdem rechts das + Zeichen oder das — Zeichen steht, also je nachdem c positiv oder negativ ist.

73. Zerlegung in Faktoren ersten Grades. Da das Produkt zweier ganzer Funktionen ersten Grades stets eine ganze Funktion zweiten Grades ergibt, z. B.:

$$(3 + 7x)(4 - 5x) \equiv 12 + 13x - 35x^2,$$

so liegt die Frage sehr nahe, ob und wann es möglich ist, umgekehrt eine gegebene ganze Funktion zweiten Grades in zwei Faktoren ersten Grades zu zerlegen, so daß die Identität besteht:

$$a + bx + cx^2 \equiv (dx + e)(fx + g). \tag{1}$$

Sie läßt sich ein klein wenig vereinfachen, wenn man

$$\frac{e}{d} = -x_0, \quad \frac{g}{f} = -x_1, \quad \text{oder:} \quad e = -dx_0, \quad g = -fx_1$$

setzt und sich überlegt, daß $df = c$ sein muß, wie sich nach Multiplikation der beiden Faktoren in (1) durch Vergleichung der Koeffizienten

des Höchstgliedes auf der Stelle ergibt. Also: Wann ist bei gegebenem a, b, c und bei gesuchtem x_0 und x_1 die Identität:

$$a + bx + cx^2 \equiv c(x - x_0)(x - x_1) \tag{1a}$$

möglich? Um diese Frage zu entscheiden, setze man für x im besonderen einmal x_0 und das anderemal x_1. In beiden Fällen verschwindet die rechte, also auch die linke Seite, d. h. x_0 und x_1 müssen die Wurzeln der quadratischen Gleichung sein:

$$y = a + bx + cx^2 = G_2(x) = 0. \tag{2}$$

Sie folgen aus (1a) in [72] sofort, nämlich:

$$\begin{matrix} x_0 \\ x_1 \end{matrix} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{c} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{-D}}{c}. \tag{3}$$

Umgekehrt: Sind x_0 und x_1 Wurzeln von (2), so ist identisch, d. h. für jeden Wert von x

$$G_2(x) \equiv a + bx + cx^2 \equiv c(x - x_0)(x - x_1).$$

Beweis. Es ist nach (3)

$$x_0 + x_1 = -\frac{2b}{2c} = -\frac{b}{c}; \quad x_0 \cdot x_1 = +\frac{a}{c},$$

mithin:

$$c(x - x_0)(x - x_1) = c(x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0 x_1)$$
$$= c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right) = a + bx + cx^2.$$

Nach (3) ist das Vorzeichen der Diskriminante D entscheidend für die Möglichkeit der Zerlegung.

Erster Fall: $D > 0$. Die beiden Wurzeln x_0 und x_1 sind komplex. Die Zerlegung in (reelle) Faktoren ersten Grades ist nicht möglich. Beispiel:

$$y = 1 + 4x + 5x^2.$$

Hier ist $D = 5 \cdot 1 - 2^2 = +1$; die Zerlegung ist nicht möglich.

Im Zusammenhang hiermit steht, daß y nach (1a) in [72], wenn $D > 0$ ist, erstens niemals verschwinden, zweitens aber auch niemals sein Vorzeichen wechseln kann, wenn man für x andere und andere Werte einsetzt, sondern immer positiv oder immer negativ bleibt; je nachdem c (oder a) positiv oder negativ ist. (Wenn nämlich D positiv ist, muß $ac = D + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ erst recht positiv sein, so daß a und c alsdann gleiche Vorzeichen haben müssen.)

Zweiter Fall: $D = 0$. Die beiden Wurzeln x_0 und x_1 sind reell, fallen aber zusammen. Es ist:

$$x_0 = x_1 = -\frac{b}{2c}.$$

Die beiden Faktoren ersten Grades sind einander gleich. Die Funktion kann zwar verschwinden (nämlich für $x = x_0 = x_1$), aber nicht ihr Vorzeichen wechseln. Beispiel:

$$y = 12 - 12x + 3x^2.$$

Hier ist:

$$D = 3 \cdot 12 - 6^2 = 0, \quad x_0 = x_1 = \tfrac{12}{6} = +2,$$

$$3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)(x-2) = 3(x-2)^2.$$

Allgemein geht im vorliegenden Falle (1 a) in [72] über in:

$$y = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2.$$

Dritter Fall: $D < 0$. Die beiden Wurzeln x_0 und x_1 sind reell und voneinander verschieden. Die Funktion zweiten Grades ist in zwei reelle Funktionen ersten Grades zerlegbar. Beispiel:

$$y = 4 - 12x + 3x^2.$$

Hier ist:

$$D = 4 \cdot 3 - 6^2 = -24, \quad \begin{matrix} x_0 \\ x_1 \end{matrix} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{3},$$

$$3x^2 - 12x + 4 = 3\left(x - \frac{6 + \sqrt{24}}{3}\right)\left(x - \frac{6 - \sqrt{24}}{3}\right).$$

Damit steht im Zusammenhange, daß y zweimal verschwinden kann und dabei jedesmal sein Vorzeichen wechselt, wie auch (1 a) in [72] zeigt, da in der eckigen Klammer das erste Glied positiv ist und alle Werte von 0 bis $+\infty$ zweimal annehmen kann, während das zweite Glied einen negativen und konstanten Wert hat.

74. Die ganze Funktion zweiten Grades hat das ihr allein angehörende Merkmal, daß der aus irgend drei Wertepaaren (xy), (x_1y_1), (x_2y_2) gebildete zweite Differenzenquotient B [30] immer denselben Wert hat. Es ist nämlich $B = 2c$. (Vergl. $A = b$ in [71]).

Beweis. Nach [30] bilde man aus x, x_1, x_2 und:

$$y = a + bx + cx^2, \quad y_1 = a + bx_1 + cx_1^{\,2}, \quad y_2 = a + bx_2 + cx_2^{\,2}$$

zunächst die beiden ersten Differenzenquotienten:

$$A = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{(a + bx_1 + cx_1^{\,2}) - (a + bx + cx^2)}{x_1 - x} = \frac{b(x_1 - x) + c(x_1^{\,2} - x^2)}{x_1 - x},$$

d. h.:

$$A = b + c(x_1 + x); \quad \text{ebenso:} \quad A_1 = b + c(x_2 + x_1)$$

und darauf den zweiten Differenzenquotienten [30 7]:

$$B = \frac{\Delta A}{\frac{1}{2}(\Delta x + \Delta x_1)} = \frac{2(A_1 - A)}{x_2 - x} = \frac{2[\{b + c(x_2 + x_1)\} - \{b + c(x_1 + x)\}]}{x_2 - x},$$

d. h.:

$$B = 2c. \tag{1}$$

Umgekehrt: Hat eine Funktion die Eigenschaft, daß der aus irgend drei Wertepaaren gebildete zweite Differenzenquotient B konstant (aber $\neq 0$) ist, so ist sie ganz und vom zweiten Grade.

Beweis. Es ist ganz allgemein [30 11]:

$$\frac{B}{2!} = \frac{y}{(x - x_1)(x - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{(x_2 - x)(x_2 - x_1)},$$

daher, nach y aufgelöst:

$$y = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + \frac{B}{2!}(x - x_1)(x - x_2).$$

Man betrachte hier (x_1, y_1) und (x_2, y_2) als zwei gegebene Wertepaare, dagegen (x, y) als ein veränderliches Wertepaar. Dann ist die rechte Seite eine ganze Funktion zweiten Grades, denn das erste und das zweite Glied sind jedes vom ersten und das dritte ist vom zweiten Grade, so daß nach Auflösung und Zusammenziehung ein Ausdruck von der Form $a + bx + cx^2$ entsteht. Der Koeffizient des Höchstgliedes würde offenbar werden:

$$c = \frac{B}{2!}, \tag{2}$$

wie es nach (1) sein muß.

75. Die ganze Funktion n^{ten} Grades oder n^{ter} Ordnung:

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + lx^{n-1} + mx^n = G_n(x) \tag{1}$$

hat $n + 1$ willkürliche Koeffizienten, nur darf m, der Koeffizient des Höchstgliedes nicht verschwinden, weil sich sonst der Grad erniedrigen würde. Die durch (1) dargestellte Kurve nennt man wohl eine allgemeine parabolische Kurve oder eine Parabel n^{ter} Ordnung, welche Bezeichnung offenbar darauf gegründet wird, daß die Kurve sich für $n = 2$ in eine gewöhnliche (Apollonische) Parabel verwandelt [72]. (Für $n = 1$ wird die Kurve eine Gerade; also darf eine Gerade auch eine Parabel erster Ordnung genannt werden.)

Für sehr große Werte von $|x|$ entscheidet in (1) das Vorzeichen des Höchstgliedes, mit welchem verglichen die übrigen Glieder als von niederer Ordnung dann nicht mehr in Betracht kommen. Die Parabel n^{ter} Ordnung zeigt demgemäß ein verschiedenes Verhalten für gerade und für ungerade n. Ist n gerade, so hat y für sehr große $|x|$ dasselbe Vorzeichen, nämlich dasjenige von m, gleichgültig ob x positiv oder negativ angenommen wird, da dann x^n immer positiv ist; ist aber n ungerade, so hat y für sehr große $|x|$ entgegengesetzte Vorzeichen, wenn x positiv und wenn x negativ angenommen wird, da dann auch x^n positiv oder negativ ist. Die Gerade und die gewöhnliche Parabel zeigen ja schon vollkommen deutlich diesen Unterschied.

Überhaupt ist der Grad oder die Ordnung n für die meisten Eigenschaften der Funktion maßgebend, wie sich z. B. in dem Satze zeigt, daß dieser Grad unverändert bleibt bei irgendeiner linearen Substitution, d. h. bei einer Substitution ersten Grades:

$$x = px' + q, \tag{2}$$

mittels welcher x durch x' ersetzt werden soll. Denn die Einsetzung von (2) in (1) ergibt:

$$y = a + b(px' + q) + c(px' + q)^2 + \cdots + l(px' + q)^{n-1} + m(px' + q)^n,$$

oder, nachdem die Potenzen von $px' + q$ mittels des binomischen Lehrsatzes entwickelt und die Glieder von gleichem Grade wieder zusammengezogen worden sind:

$$y = a' + b'x' + c'x'^2 + \cdots + l'x'^{n-1} + m'x'^n,$$

also wieder eine ganze Funktion n^{ten} Grades; die sich nicht auf den $n - 1^{\text{ten}}$ Grad reduzieren kann, da m' nur von dem letzten Gliede: $m(px' + q)^n$ herstammt und daher $= mp^n$ ist, folglich nur verschwinden würde, wenn $p = 0$ wäre, was nicht vorausgesetzt wird.

Wohl aber ist es stets möglich, durch die Substitution (2) den Koeffizienten l' des nächsthöheren Grades zum Verschwinden zu bringen. Es ist dies eine Erweiterung der seit Jahrtausenden bekannten Theorie der „quadratischen Ergänzung“ [72], welche z. B. benutzt wird, um Gleichungen dritten Grades: $a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$ auf die „reduzierte“ Form $x'^3 + mx' + n = 0$ zurückzuführen, worauf die Formel des Cardan oder für den Fall des sogenannten Casus irreducibilis die trigonometrische Lösung des Vieta anzuwenden ist.

76. Über die Möglichkeit, in Faktoren niederen Grades zu zerlegen, entscheidet der Fundamentalsatz der Algebra. Eine ganze Funktion n^{ten} Grades läßt sich immer und nur auf eine Weise zerlegen in Faktoren ersten Grades und in Faktoren zweiten Grades mit positiver Determinante [73], d. h. in solche Faktoren zweiten Grades, die sich nicht in zwei reelle Faktoren ersten Grades zerlegen lassen.

Die Worte „nur auf eine Weise“ sind zu verstehen, daß erstens abgesehen wird von der Reihenfolge der Faktoren, (kommutatives Gesetz [3]) und zweitens abgesehen wird von konstanten Faktoren, insofern etwa alle Koeffizienten eines Faktors mit ein und derselben Zahl λ multipliziert und dafür alle Koeffizienten eines anderen Faktors durch λ dividiert werden könnten.

Nur für $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ und $n = 5$ ist es der elementaren Algebra möglich gewesen, diesen Satz zu beweisen. Für ein beliebiges n muß auf die höhere Algebra verwiesen werden, im besonderen auf die grundlegenden Forschungen des gewaltigen Mathematikers Gauß, der den Fundamentalsatz zuerst allgemein bewiesen hat.

Der Fundamentalsatz hängt auf das innigste zusammen mit der Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades. Der Ansatz, einen der etwa vorhandenen Faktoren zweiten Grades $=0$ zu setzen, führt zu nichts, da die Diskriminante positiv sein sollte, also die beiden Wurzeln komplex sind. Wohl aber gibt jeder Faktor ersten Grades $=0$ gesetzt, eine Wurzel der Gleichung:

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + lx^{n-1} + mx^n = 0, \tag{1}$$

wie umgekehrt irgendeine Wurzel x_0 dieser Gleichung einen Faktor $x - x_0$ bestimmt. Denn es ist allgemein:

$$y - y_0 = b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + \cdots + l(x - x_0)^{n-1} + m(x - x_0)^n.$$

Ist $y_0 = 0$, d. h. ist x_0 eine Wurzel von (1), so vereinfacht sich die linke Seite. Sie wird y selbst. Bei der rechten Seite kann in jedem Glied der Faktor $x - x_0$ nach der allgemeinen Formel:

$$x^n - x_0{}^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0{}^{n-1})$$

abgesondert werden. Also hat auch y diesen Faktor $x - x_0$.

Folglich hat die Gleichung (1) so viel reelle Wurzeln, als Faktoren ersten Grades vorhanden sind, wobei allerdings, wie schon in [73] für $n = 2$ hervorgehoben worden ist, mehrere Faktoren, also auch mehrere Wurzeln zusammenfallen können.

Fehlen Faktoren zweiten Grades, so existieren n reelle Wurzeln, andernfalls ist deren Anzahl um eine gerade Zahl geringer, also $n - 2$, $n - 4, \ldots$ Eine Gleichung ungeraden Grades hat daher mindestens eine reelle Wurzel. Eine Gleichung geraden Grades kann aber möglicherweise überhaupt keine reelle Wurzel haben, wenn nämlich nur Faktoren zweiten Grades (mit positiver Determinante) vorhanden sind. In diesem Falle kann die Funktion niemals ihr Vorzeichen wechseln, sondern ergibt, was auch für x eingesetzt wird, entweder nur positive oder nur negative Werte, je nachdem m positiv oder negativ ist.

Noch sei erwähnt, daß man zwei Funktionen $G_n(x)$ und $G_m(x)$ relativ prim zueinander nennt, wenn sie weder einen Faktor ersten, noch einen Faktor zweiten Grades gemeinsam haben. Ob sie relativ prim sind oder nicht, findet man, wie bei gewöhnlichen Zahlen, durch einfaches, fortgesetztes Ausdividieren, wovon [161] ein Beispiel liefern wird.

Unendlich große Wurzeln. Ist x_0 eine Wurzel von (1), so hat die Funktion $G_n(x)$ den Faktor $x - x_0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Faktor:

$$1 - \frac{x}{x_0}.$$

Wird $|x_0|$ über alle Grenzen vergrößert, so verschwindet zuletzt der reziproke Wert $1 : x_0$ und der eben genannte Faktor ersten Grades

wird konstant. Folglich reduziert sich $G_n(x)$ auf den $n-1^{\text{ten}}$ Grad und wenn p Wurzeln unendlich groß werden, auf den $(n-p)^{\text{ten}}$ Grad. Und umgekehrt, wenn der Koeffizient m oder die beiden Koeffizienten m und l usw. verschwinden, d. h. wenn die Funktion n^{ten} Grades zu einer Funktion $n-1^{\text{ten}}$, $n-2^{\text{ten}}$, ... Grades wird, so sind eine, zwei, ... Wurzeln der Gleichung (1) unendlich groß geworden.

77. Die ganze Funktion n^{ten} Grades:

$$y = G_n(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + lx^{n-1} + mx^n \tag{1}$$

hat das ihr allein zukommende Merkmal, daß der aus irgend $n+1$ Wertepaaren

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n) \tag{2}$$

gebildete, in [31] mit L bezeichnete n^{te} Differenzenquotient immer denselben Wert, nämlich:

$$L = n!\, m \tag{3}$$

erhält. Umgekehrt. Hat eine Funktion die Eigenschaft, daß der aus $n+1$ Wertepaaren (2) gebildete Differenzenquotient L immer den gleichen Wert ergibt, welche Wertepaare man auch herausgreift, so ist die Funktion eine ganze Funktion n^{ten} Grades und der Koeffizient des Höchstgliedes ist durch die Formel bestimmt:

$$m = L : n! \tag{3a}$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ siehe den Beweis [71] und [74].

Für ein beliebiges n empfiehlt es sich, erst die Umkehrung zu beweisen.

Erster Beweis. Man nehme die Formel [31 4], ersetze aber gemäß der in [28] getroffenen Vereinbarung x und y durch x_0 und y_0, betrachte $(x_0, y_0)(x_1, y_1), \ldots (x_{n-1}, y_{n-1})$ als gegeben, so daß auch $A, B, \ldots$ bis K als gegeben angesehen werden können. Dagegen seien x_n und y_n veränderlich, so daß der Index n fortgelassen wird, worauf sie einfach x und y heißen. Nach diesen kleinen Abänderungen wird die genannte Formel:

$$\begin{aligned} y = y_0 &+ \frac{A}{1!}(x-x_0) + \frac{B}{2!}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{C}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &+ \cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{K}{(n-1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2}) \\ &+ \frac{L}{n!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Rechts sind $y_0, x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, A, B, \ldots K$ als gegeben zu betrachten, wie eben erläutert. Dagegen ist x veränderlich. Wenn nun, wie vorausgesetzt, der Wert von L überhaupt konstant ist, so ist die rechte Seite von (4) eine ganze Funktion n^{ten} Grades, die allerdings

erst nach Potenzen von x entwickelt werden müßte, wenn es auf die Form (1) ankäme, was aber ganz und gar nicht der Fall ist. Die höchste Potenz kann nur vom letzten Gliede stammen, da nur dieses den Höchstgrad n erreicht. Somit wird der zugehörige Koeffizient in der Tat durch (3a) bestimmt.

Zweiter Beweis. Man nehme $n + 2$ Wertepaare:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots\ (x_{n-1}, y_{n-1})\,(x_n, y_n)\,(x, y). \tag{5}$$

Wenn der n^{te} Differenzenquotient zwischen je $n + 1$ dieser $n + 2$ Wertepaare konstant $= L$ ist, so muß nach [32] der $(n + 1)^{\text{te}}$ Differenzenquotient zwischen ihnen allen verschwinden. Also nach [31 3] (nur $n + 1$ statt n gesetzt):

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)(x_0 - x)} \\ & + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)(x_1 - x)} \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})(x_n - x)} \\ & + \frac{y}{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)}, \end{aligned} \tag{6}$$

oder wenn aus dieser Gleichung y berechnet wird:

$$\begin{aligned} y = & y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} \\ & + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)} \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}. \end{aligned} \tag{7}$$

Man betrachte von den $(n + 2)$ Wertepaaren (5) nur das letzte als veränderlich, die übrigen als gegeben. Dann wird jedes Glied der rechten Seite von (7) eine ganze Funktion n^{ten} Grades, also auch (7) selbst. Allerdings könnten ja die Glieder höchsten Grades sich aufheben. Doch dies tritt nur dann ein, wenn, was ja nicht sein soll, L verschwindet. Denn der Koeffizient von x^n in (7) ist:

$$\begin{aligned} m = & \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)} \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}, \end{aligned}$$

d. h. (nach [31 3]): $m = L : n!$

Die Umkehrung ist also bewiesen und sogar auf zwei verschiedene Weisen. Was den Satz selbst betrifft, so überlege man, daß (1), (4)

und (7) zwar in der äußeren Form verschieden sind, aber doch zur Identität gebracht werden können.

Man darf also (7) statt (1) nehmen. Da aber ferner (7) aus (6) folgt, so darf man auch (6) statt (1) nehmen. Also folgt aus (1), daß der $(n+1)^{\text{te}}$ Differenzenquotient zwischen irgend $n+2$ Wertepaaren (5) verschwindet, d. h. daß der n^{te} Differenzenquotient zwischen irgend $n+1$ Wertepaaren konstant ist, w. z. b. w.

Beispiel. Gegeben sei die Funktion:

$$y = 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5.$$

Man setze für x die 6 Werte ein: $+1, -1, -3, 0, +2, -2$, so folgen für y die 6 Werte: $+2, 0, -146, +1, +39, -13$.

Also muß der fünfte Differenzenquotient zwischen den sechs Wertepaaren

$$\binom{+2}{+1}, \quad \binom{0}{-1}, \quad \binom{-146}{-3}, \quad \binom{+1}{0}, \quad \binom{+39}{+2}, \quad \binom{-13}{-2}$$

nach [77 3] den Wert haben $5!\,1 = 120$ (Probe schon in [32] und sogar zweimal).

78. Interpolationsformeln. Die Formel [77 4] schreibt man Newton, die Formel [77 7] schreibt man Lagrange zu. Beide Formeln lösen die Aufgabe, eine ganze Funktion n^{ten} Grades zu ermitteln, wenn irgend welche $n+1$ Wertepaare:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots\ (x_n, y_n) \tag{1}$$

gegeben sind, oder geometrisch ausgedrückt die Aufgabe, eine parabolische Kurve n^{ter} Ordnung durch irgend welche $n+1$ Punkte der Ebene hindurchzulegen (bei gegebener Richtung der x-Achse). Sie werden sehr häufig als Interpolationsformeln benutzt, um für beliebige Werte von x, die in dem Gesamtspielraum der Werte $x_0, x_1, \ldots x_n$ liegen, die zugehörigen Werte von y zu ermitteln, wenn auch vielleicht nur angenähert.

Die Interpolationsformel von Lagrange, also die Formel [77 7] hat folgende Vorzüge. Erstens. Sie geht unmittelbar auf die gegebenen Wertepaare (1) zurück. Zweitens. Sie ist völlig symmetrisch, denn bei der Vertauschung der Wertepaare (1) vertauschen sich rechts die Glieder. Drittens. Ihre Richtigkeit läßt sich sofort auf die leichteste Weise bestätigen. Setzt man z. B. in [77 7] $x = x_0$, so wird der erste Bruch $= 1$, weil sein Zähler mit dem Nenner identisch wird, während die andern Brüche verschwinden, weil ihre Zähler wegen des Faktors $x - x_0$ verschwinden. Es folgt also $y = y_0$, wie es sein muß usw. Zahlenbeispiel: Erste Übungsaufgabe.

Die Interpolationsformel von Newton, also die Formel [77 4] entbehrt der genannten drei Vorzüge. Denn erstens setzt sie die

aus (1) zusammengesetzten Differenzenquotienten $A, B, \ldots K, L$ als vorher bereits berechnet voraus. Zweitens. Die Symmetrie ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Drittens. Auch die Probe auf ihre Richtigkeit ist lange nicht so durchsichtig wie bei [77 7].

Dafür hat die Newtonsche Formel andere Vorteile. Erstens. Sie ist, wenn $A, B, \ldots K, L$ berechnet sind, erheblich einfacher, da das erste Glied konstant, das zweite vom ersten Grade, das dritte vom zweiten Grade usw. und nur das letzte Glied vom n^{ten} Grade in bezug auf x ist, während bei Lagrange alle Glieder vom n^{ten} Grade sind. Zweitens. Wenn die Werte

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$$

eine arithmetische Reihe bilden (oft kann man sich so einrichten, daß es geschieht), so ist die Berechnung der $A, B, \ldots K, L$ sehr einfach, da sie dann nach [29 3] erfolgen kann, so daß nur die höheren Differenzen der y zu bilden und durch die entsprechenden Potenzen von

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \cdots = \Delta x_{n-1}$$

zu dividieren sind. Zahlenbeispiel: Erste Übungsaufgabe.

Im übrigen können die Newtonsche und Lagrangesche Formel nur äußerlich verschieden sein, da sie ja dieselbe Funktion bestimmen.

Sind nur zwei Wertepaare gegeben, so wird die Formel vom ersten Grade. Man interpoliert dann „linear", wie z. B. bei dem Gebrauch der P. P. in logarithmischen Rechnungen zur Berücksichtigung der letzten Ziffern des Numerus (vgl. [136]). Diese Art Interpolation setzt voraus, daß der Verlauf der Funktion in dem betreffenden Spielraum zu wenig von dem geradlinigen Verlauf abweicht, als daß der Unterschied in Betracht käme [136]. Ist die Abweichung zu groß, so nehme man drei Wertepaare und interpoliere mittels einer Parabel usw.

Selbstverständlich kann man auch mit anderen als mit ganzen Funktionen interpolieren; doch nur ausnahmsweise wird sich bei einer solchen Abweichung ein Vorteil herausstellen. Man müßte schon über die Art der Funktion wenigstens ungefähr unterrichtet sein oder sonstige Anhaltspunkte haben zur Verwertung anderer als der ganzen Funktionen, z. B. daß die Rechnungen nach der Lagrangeschen oder Newtonschen Formel bei einer großen Zahl von gegebenen Wertepaaren recht umständlich werden. Aber dann kann man ja den Spielraum in mehrere Teile zerlegen und für jeden Teil einen niederen Grad nehmen. Kurz, die ganzen Funktionen empfehlen sich ganz besonders für die Interpolation und zwar nicht allein durch ihre Einfachheit, sondern auch durch ihren einfachen geometrischen Verlauf, der kaum jemals unvorhergesehene Überraschungen bietet, die sich bei der Zeichnung durch unvorhergesehene Wendungen und starke Krümmungen

zwischen den gegebenen Punkten zu erkennen geben würden (Fig. 27). Übrigens kann man auch „graphisch" interpolieren, wobei die Wertepaare (1) am besten auf Millimeterpapier eingetragen werden, um alsdann eine möglichst „glatte" Kurve durch sie hindurch zu legen und darauf für einen beliebigen Wert von x den zugehörigen Wert von y abzulesen.

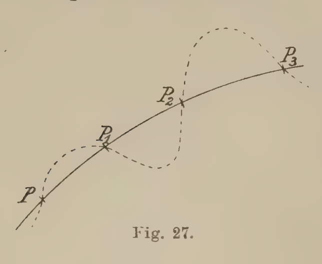


Fig. 27.

Interpolieren und Extrapolieren. Jede Interpolation ist mehr oder minder unsicher, denn so gewiß, als man durch eine beliebige Anzahl gegebener Punkte unendlich viele Kurven bestimmen kann, so gewiß ist es auch, daß analytisch unendlich viele Interpolationsformeln möglich sind. Von welchen Gesichtspunkten man sich leiten lassen soll, um die „beste" zu erhalten, ist soeben kurz erläutert worden; es ließe sich allerdings vieles noch weiter ausspinnen.

Die Unsicherheit nimmt zu, wenn die Interpolationsformel zum Extrapolieren benutzt wird, d. h. wenn man in sie für x Werte setzt, welche außerhalb der gegebenen Werte liegen. Je weiter, desto mehr Mißtrauen wird man den errechneten Werten berechtigter Weise entgegen bringen und es ist daher nicht zu viel behauptet, daß der Gebrauch einer Interpolationsformel zum Extrapolieren im allgemeinen ein Mißbrauch sei, vor dem man sich besonders in den Anwendungen sehr zu hüten habe. Dies gilt namentlich von den vielen hunderten und tausenden von Formeln, welche sich in der Technik oder den Naturwissenschaften gut bewährt haben, aber oft keine eigentliche Begründung oder Ableitung aufweisen können. Man kann nicht wissen, ob eine solche empirische Formel, welche z. B. die Spannung des gesättigten Wasserdampfes als Funktion der Temperatur zwischen etwa $t = 100$ und $t = 150$ gut ausdrückt (t = Temperatur in Celsiusgraden), für $t = 200$ oder gar $t = 300$ überhaupt noch Annäherungswerte gibt. Durch unberechtigte Extrapolationen mit solchen Interpolationsformeln, die weiter nichts sind, als solche, ist schon mancher Irrtum herbeigeführt worden.

Übungen zu § 8.

1. Zwischen den Wertepaaren:

$$(-1, +5), \quad (+2, +9), \quad (+3, +10), \quad (+7, +4)$$

soll interpoliert werden erstens nach der Formel von Newton, zweitens nach der Formel von Lagrange und drittens durch Bestimmung der Koeffizienten a, b, c, d in der ganzen Funktion dritten Grades $y = a + bx + cx^2 + dx^3$. Anwendung auf die ganzzahligen Zwischenwerte

$x = 0, +1, +4, +5, +6$. Schließlich sind die beiden ersten Formeln durch Entwicklung nach Potenzen von x mit der dritten zur Identität zu bringen.

2. Es ist nachzuweisen, daß die Funktion:

$$y = \text{arc}\,(\sin = -4\cos^3 x + 3\cos x)$$

trotz ihrer scheinbaren Transzendenz doch algebraisch ist.

3. Gegeben:

$$X = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad Y = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad Z = a_3 x + b_3 y + c_3 z.$$

Welche Bedingungen müssen zwischen den neun Koeffizienten a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 erfüllt sein, damit das Wertsystem (xyz) mit dem Wertsystem (XYZ) vertauscht werden kann?

4. Es ist nachzuweisen, daß eine ganze Funktion $f(x)$ n^{ten} Grades von x, wenn sie in n verschiedene relle Funktionen ersten Grades zerlegbar ist, so viele Vorzeichenwechsel und so viele Vorzeichenfolgen in den Koeffizienten hat, als die Gleichung $f(x) = 0$ positive und negative Wurzeln hat.

5. Zeichenregel des Cartesius. Eine Gleichung n^{ten} Grades hat höchstens so viel positive Wurzeln, als in den Koeffizienten Zeichenwechsel und höchstens so viel negative Wurzeln, als in den Koeffizienten Zeichenfolgen enthalten sind.

Dritter Abschnitt.

Entwicklung des Stetigkeitsbegriffes.

§ 9. Stetigkeit, Unstetigkeit. Das unendlich Kleine und das unendlich Große.

79. Stetige Größen oder Kontinua. Die ursprüngliche natürliche ganze Zahl dient zum Zählen gegebener Vielheiten von Dingen Der Mathematiker bezeichnet sie als durchaus unstetig, insofern sie sich nur sprunghaft um eine oder mehrere Einheiten ändern kann. Erst durch Einschaltung der Brüche und der Irrationalzahlen im allerweitesten Sinne entsteht die stetige Zahl, welche bei Ziffernrechnungen als unendlicher Dezimalbruch alle stetigen Größen, oder, wie man wohl sagt, alle Kontinua, wie Längen, Winkel, Flächen, Zeiten usw. nach vorangegangener Wahl der zugehörigen Größeneinheiten auf das genaueste vertreten kann.

Die einfachste Art einer stetigen Änderung einer stetigen Größe besteht darin, daß sie nur wachsend oder nur abnehmend von einem Wert zum andern übergeht und dabei alle Zwischenwerte in stetiger Folge durchläuft, also jeden derselben nur einmal annimmt. Man kann aber auch voraussetzen, ohne die Stetigkeit der Veränderung aufzuheben, daß Umkehrstellen vorhanden seien, in welchen das Wachsen in ein Abnehmen oder das Abnehmen in ein Wachsen übergeht, wenn nur zwischen zwei solchen Stellen während der Veränderung alle Zwischenwerte in stetiger Folge durchlaufen werden. Die alltäglichste Erfahrung zeigt, daß z. B. eine abhängige Veränderliche sich in der eben beschriebenen Weise ändern kann, selbst wenn die ursprüngliche Veränderliche nur wächst oder nur abnimmt.

Stetige Funktionen. Eine Funktion $y = f(x)$ heißt stetig, wenn einer stetigen Veränderung von x eine stetige Veränderung von y entspricht. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Funktion eindeutig sei, oder doch, wenn an sich mehrdeutig, durch Beschränkung auf je einen Wert eindeutig gemacht worden sei [16]. Die zweideutige Funktion: $y = \sqrt{1 + x^2}$ kann also erst stetig werden, wenn man nicht unvermittelt von einem positiven Wert der Wurzel zu einem negativen Wert überspringt. Dann aber ist sie auch wirklich stetig, wie sich in aller Strenge nachweisen läßt.

In diesem Sinne soll von nun an eine stetige Funktion eindeutig stetig sein, aber das Beiwort „eindeutig" als selbstverständlich fortgelassen werden.

80. Unstetigkeitsstellen und Unendlichkeitsstellen. Die bisher in § 4 bis § 8 durchgenommenen Funktionen sind im allgemeinen stetig. Doch haben einige von ihnen Unstetigkeitsstellen. So ist z. B. die Funktion $y = 1 : x$ für alle Werte von x stetig, nur nicht für $x = 0$. Denn geht x in stetiger Weise durch 0 hindurch, etwa von negativen zu positiven Werten über, so springt y unvermittelt von $-\infty$ bis $+\infty$ [39]. Der gleiche Sprung von $-\infty$ bis $+\infty$ oder von $+\infty$ bis $-\infty$ wird ja auch von $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ gemacht [49] und [50].

Diese als Beispiele angeführten Unstetigkeitsstellen sind für y zugleich Unendlichkeitsstellen. Es ist ja auch selbstverständlich, daß umgekehrt jede Unendlichkeitsstelle zugleich eine Unstetigkeitsstelle sein wird, weil Stetigkeit bei unendlichen Werten überhaupt nicht mehr in Frage kommt. Es lassen sich aber auch Beispiele bilden, in welchen eine Unstetigkeitsstelle keine Unendlichkeitsstelle ist. Man betrachte etwa die Funktion:

$$y = e^{\frac{1}{x}};$$

sie ist für alle (endlichen) Werte von x stetig, nur nicht für $x = 0$, da alsdann der Exponent von $-\infty$ bis $+\infty$, also y selbst von $e^{-\infty} = 0$ bis $e^{+\infty} = +\infty$ springt. Die Unstetigkeitsstelle $x = 0$ ist also nur noch einseitig eine Unendlichkeitsstelle, denn der Sprung geht nicht mehr von $-\infty$ bis $+\infty$, sondern von 0 bis $+\infty$. Doch nun betrachte man etwa die Funktion:

$$y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}};$$

sie ist für alle (endlichen) Werte von x stetig, nur nicht für $x = 2$, da alsdann der Exponent von $-\infty$ bis $+\infty$ springt. Der Nenner springt also von $1 + 0 = 1$ bis $1 + \infty = \infty$, folglich springt y selbst von $\frac{1}{1} = 1$ bis $\frac{1}{\infty} = 0$. Die Unstetigkeitsstelle hat ganz aufgehört, eine Unendlichkeitsstelle zu sein. Der Sprung ist endlich geworden, denn er geht von $+1$ bis 0.

Unstetige Funktionen. Es wäre leicht genug, in Anlehnung an das letzte Beispiel Funktionen zu bilden, welche nicht nur an einer, sondern sogar an beliebig vielen Stellen unstetig sind. Wenn man annimmt, daß sich solche Stellen immer mehr häufen, dichter und dichter aneinander rücken, so gelangt man zuletzt zu

dem Begriff einer völlig, durch und durch unstetigen Funktion, d. h. einer Funktion, welche nirgends, auch nicht in einem noch so kleinen Spielraum stetig ist. Ob es möglich ist, eine solche Funktion auch wirklich mathematisch durch einen Funktionsausdruck wiederzugeben, darauf kommt es hier gar nicht an, sondern nur auf die Auffassung der Stetigkeit nicht sowohl als einer Eigenschaft, die den Funktionen an und für sich zukommt und die nur einige unter ihnen und auch nur an vereinzelten Stellen verlieren, als vielmehr einer Eigenschaft, welche überhaupt erst vorauszusetzen ist, weil sie in dem ursprünglichen Funktionsbegriff a priori gar nicht liegt, oder doch nur wegen der durchgängigen Stetigkeit der einfacheren mathematischen Funktionen stillschweigend hineingelegt worden ist.

„Natura non facit saltum", d. h. die Abhängigkeiten der Wirklichkeit sind stetig. Ob dieser uralte Satz auch in mathematischem Sinne streng richtig sei, kann durch Erfahrung schwerlich jemals bejaht, noch verneint werden, wenn, wie man annimmt, unsere Beobachtungen und Messungen immer eine Grenze der Genauigkeit haben werden, die man zwar weiter und weiter treiben, aber niemals zum Verschwinden bringen kann. Daher wäre sehr wohl möglich, daß einerseits eine Naturerscheinung, welche nach Wahrnehmung und Messung stetig zu sein scheint, trotzdem unstetig erfolgt, nur daß die Sprünge zu klein sind, um bemerkt zu werden. Andererseits könnte eine sprunghaft scheinende Veränderung trotzdem stetig verlaufen, wenn sie so schnell vor sich geht, daß Zwischenstufen nicht bemerkt werden. Und so beweist eigentlich weder scheinbare Stetigkeit etwas für, noch scheinbare Unstetigkeit etwas gegen die wirkliche Stetigkeit in der Natur. Man nimmt letztere an, weil erstens die scheinbare Stetigkeit weitaus überwiegt und weil zweitens bei scheinbarer Unstetigkeit schärfere Messungen sehr oft vorher nicht bemerkte Zwischenstufen aufgezeigt haben. So zweifelt man nicht daran, daß das Geschoß sich stetig im Rohr bewegt; und in der Tat ist es der inneren Ballistik gelungen, diese Bewegung bis zu einem gewissen Grade messend zu verfolgen, obgleich die ganze Zeit vom Abbrennen des Pulvers bis zum Austritt aus dem Rohr nur Bruchteile einer hundertstel Sekunde beträgt.

Es ist daher erklärlich, daß der Begriff der Stetigkeit, der Kontinuität nicht nur für die reine Mathematik, sondern auch für ihre Anwendungen in der Mechanik, der Physik, den Naturwissenschaften, der Technik usw. unermeßliche Bedeutung erlangt hat. Für die reine Mathematik dient als Hauptbeispiel die Differential- und Integralrechnung, welche durchaus stetige Veränderungen voraussetzt und was ihre Anwendung angeht, so genügt ein Blick etwa in die „Hütte", des Ingenieurs Taschenbuch, um die Fülle der Differential-

und Integralformeln in den verschiedensten Gebieten der technischen Wissenschaften zu zeigen.

81. Das unendlich Kleine. Stetigkeit ist nicht möglich ohne das unbegrenzt Kleine oder das verschwindend Kleine, oder wie man meist sagt, das unendlich Kleine. Wenn etwa ein Länge b durch stetige Vergrößerung oder Verkleinerung in eine andere Länge a übergeht, so muß der Unterschied, ehe er ganz verschwindet, kleiner werden als jede noch so kleine, aber gegebene Länge. Denn andernfalls würde ja zu allerletzt ein, wenn auch noch so kleiner Sprung übrig bleiben. Eine unendlich kleine Zahl ist also eine Zahl, welche sich der Null unbegrenzt annähert, oder deren absoluter Wert kleiner gedacht wird als jede noch so kleine, aber gegebene Zahl. Eine unendlich kleine Zahl ist, kurz gesagt, eine Zahl, welche noch nicht $= 0$ ist, aber doch $= 0$ wird. (Oder auch manchmal eine Zahl, welche eben anfängt, von 0 abzuweichen.)

Aus dieser Erklärung ist zu entnehmen:

1. Eine unendlich kleine Zahl kann niemals einen in Ziffern wirklich angebbaren Wert haben. Hier liegt für den Mathematiker das unterscheidende Merkmal zwischen seinem unendlich klein und dem gewöhnlichen sehr klein oder außerordentlich klein, das ja im Sprachgebrauch auch unendlich klein heißen könnte.

2. Unendlich kleine Zahlen bedeuten an und für sich gar nichts, sondern sind immer nur Mittel zum Zweck, nämlich Mittel zur Auffindung wirklicher Zahlen oder Werte. Wenn z. B. beim Integrieren eine Linie oder eine Fläche oder ein Volumen, kurz ein „Kontinuum“ in unendlich viele unendlich kleine Teile zerlegt gedacht wird, so geschieht es in der Absicht, aus ihnen das „Integrum“, das Ganze, völlig genau, ohne den kleinsten Fehler durch ein sogenanntes Integrationsverfahren zu ermitteln. Ist dies geschehen, so hat das unendlich Kleine seine Arbeit getan und kann gehen. Es verschwindet spurlos von der Bildfläche.

3. Bei algebraischer Auffassung werden die unendlich kleinen Zahlen selbstverständlich auch algebraisch, also positiv oder negativ. Das unendlich Kleine haftet nur an dem absoluten Werte.

Das unendlich Große. Eine unendlich große Zahl ist eine Zahl, deren absoluter Wert größer gedacht werden soll, als jede noch so große, aber als gegeben betrachtete absolute Zahl. Sie soll nicht $= \infty$ sein, sondern $= \infty$ werden. Auch sie kann also gleich der unendlich kleinen Zahl niemals einen in Ziffern angebbaren wirklichen Wert haben. Auch sie bedeutet an und für sich gar nichts, sondern ist immer nur Mittel zum Zweck, um nachher spurlos von der Bildfläche zu verschwinden. Auch sie wird bei algebraischer Auf-

fassung positiv oder negativ unendlich groß, da das unendlich Große nur an dem absoluten Werte haftet.

Übrigens stehen das unendlich Kleine und das unendlich Große in dem folgenden Reziprozitätsverhältnis: Ist ε unendlich klein, so ist der reziproke Wert:

$$n = \frac{1}{\varepsilon} \tag{1}$$

unendlich groß. Umgekehrt: Ist n unendlich groß, so ist der reziproke Wert:

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \tag{2}$$

unendlich klein. So kann man nach Belieben unendlich kleine durch unendlich große Zahlen oder umgekehrt ausdrücken, wovon die höhere Mathematik den vielseitigsten Gebrauch macht, z. B. [88 1], [111 7], [197].

Das Endliche. Im Gegensatz zu den unendlich kleinen und zu den unendlich großen Zahlen bezeichnet man wirkliche Zahlen als endlich. Dabei werden ± 0 und $\pm \infty$ in der Regel ausgeschlossen, als Grenzen der unendlich kleinen und der unendlich großen Zahlen. Endlich heißt daher meistens: a) nicht 0; b) nicht ∞; c) nicht unendlich klein; d) nicht unendlich groß.

Doch kann 0 auch als endlich bezeichnet werden in dem Sinne, daß endlich hauptsächlich zu unendlich groß in Gegensatz gebracht wird. Es ist daher vorsichtig, wenn 0 ausgeschlossen werden soll, zu sagen „endlich und von 0 verschieden“.

82. Bei der Anwendung der vier Grundrechnungsarten auf das unendlich Kleine und unendlich Große in Verbindung mit endlichen Zahlen ergeben sich folgende achtzehn Ausdrücke, in denen a eine endliche Zahl (von 0 verschieden), $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ unendlich kleine Zahlen, n, n_1, n_2 unendlich große Zahlen bedeuten.

a) Addieren und Subtrahieren, d. h. algebraisches Addieren:

I. $\pm a \pm \varepsilon$, II. $\pm a \pm n$, III. $\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$, IV. $\pm \varepsilon \pm n$, V. $\pm n_1 \pm n_2$.

b) Multiplizieren:

VI. $a \cdot \varepsilon$, VII. $a \cdot n$, VIII. $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$, IX. $n_1 \cdot n_2$, X. $\varepsilon \cdot n$.

c) Dividieren:

XI. $\frac{a}{\varepsilon}$, XII. $\frac{\varepsilon}{a}$, XIII. $\frac{a}{n}$, XIV. $\frac{n}{a}$,

XV. $\frac{\varepsilon}{n}$, XVI. $\frac{n}{\varepsilon}$, XVII. $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, XVIII. $\frac{n_1}{n_2}$.

I. ist endlich, II. ist unendlich groß, III. ist unendlich klein (oder auch möglicher Weise $= 0$), IV. ist unendlich groß, V. ist zweifelhaft, VI. ist unendlich klein, VII. ist unendlich groß, VIII. ist un-

endlich klein, IX. ist unendlich groß, X. ist zweifelhaft, XI. ist unendlich groß, XII. ist unendlich klein, XIII. ist unendlich klein, XIV. ist unendlich groß, XV. ist unendlich klein, XVI. ist unendlich groß, XVII. ist zweifelhaft, XVIII. ist zweifelhaft.

Daß diese Angaben, so weit sie das Ergebnis bestimmt angeben als unendlich groß, endlich, oder unendlich klein, offenbar richtig sind, ergibt sich unmittelbar aus den vorangegangenen Erklärungen über das unendlich Kleine, das unendlich Große, das Endliche. Man nehme z. B. I. Die algebraische Summe einer endlichen (von 0 verschiedenen) und einer unendlich kleinen Zahl ist selbstverständlich eine endliche, von ersterer unendlich wenig abweichende Zahl. Oder man nehme II. Wächst $\pm n$ absolut über alle Grenzen, so wächst auch $\pm a \pm n$ absolut über alle Grenzen, d. h. $\pm a \pm n$ ist unendlich groß usw. usw.

Es bleiben noch V., X., XVII., XVIII.; diese Verbindungen können sowohl unendlich große, als auch unendlich kleine, als auch endliche Zahlen ergeben; es kommt ganz darauf an, wie der Fall liegt. Man betrachte zunächst V., also $\pm n_1 \pm n_2$. Haben die Glieder einerlei Vorzeichen, so ist V. selbstverständlich unendlich groß und hat dasselbe Zeichen, z. B.:

$$n + n = 2n = \text{unendlich groß.}$$

Haben sie aber entgegengesetzte Vorzeichen, so kann V. unendlich groß, oder auch endlich, oder auch unendlich klein sein. Es sei z. B. $n_1 = n$, $n_2 = 2n$, so ist:

$$n_1 - n_2 = n - 2n = -n = \text{unendlich groß.}$$

Oder es sei $n_1 = n$, $n_2 = n + 5$, so ist:

$$n_1 - n_2 = n - (n + 5) = -5 = \text{endlich.}$$

Oder es sei $n_1 = n$, $n_2 = n + \varepsilon$, so ist:

$$n_1 - n_2 = n - (n + \varepsilon) = -\varepsilon = \text{unendlich klein.}$$

Ferner betrachte man X., also $\varepsilon \cdot n$. Dieser Ausdruck kann unendlich groß, endlich und unendlich klein werden. Es sei z. B. $n = 1 : \varepsilon^2$, so ist:

$$\varepsilon \cdot n = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon} = \text{unendlich groß.}$$

Oder es sei $n = 1 : \varepsilon$, so ist:

$$\varepsilon \cdot n = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1 = \text{endlich.}$$

Oder es sei $\varepsilon = 1 : n^2$, so ist:

$$\varepsilon \cdot n = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n} = \text{unendlich klein.}$$

Die Nummern XVII und XVIII können nach dem in [81] auf-

gestellten Reziprozitätsgesetze auf X zurückgeführt werden, indem man setzt: $\varepsilon_2 = 1 : n_2$, $n_2 = 1 : \varepsilon_2$.

Sie gehen dann über in:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \varepsilon_1 \cdot n_2; \qquad \frac{n_1}{n_2} = n_1 \cdot \varepsilon_2 .$$

Die vier eben betrachteten Fälle haben das eine Merkmal gemeinsam, daß sie unbestimmte Ausdrücke ergeben, wenn die in ihnen vorkommenden unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen durch ihre Grenzwerte, also durch 0 und ∞ ersetzt werden. Man erhält dann nämlich:

$$\infty - \infty, \quad 0\,\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Umgekehrt: Wenn ein Ausdruck, in dem unendlich kleine oder unendlich große Zahlen, oder auch beide Arten vorkommen, dann unbestimmbar wird, wenn man statt ihrer ihre Grenzwerte 0 und ∞ einsetzt, so läßt sich überhaupt nicht allgemein, sondern höchstens von Fall zu Fall entscheiden, ob er unendlich groß, endlich, oder unendlich klein wird. Außer den vier genannten gehören z. B. hierher:

$$(1 + \varepsilon)^n, \quad \varepsilon_1^{\varepsilon_2}, \quad n^\varepsilon,$$

denn aus ihnen werden alsdann die unbestimmten Ausdrücke [16]:

$$1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Beispiele in § 10. Jetzt sei zur nachdrücklichen Hervorhebung der Wichtigkeit solcher Betrachtungen nur erwähnt, daß ein „Differentialquotient", ehe sein Wert bestimmt wird [§ 13], von der Form $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$, ein Integral aber von der Form $\varepsilon \cdot n$ ist oder genauer ausgedrückt, von der Form einer Summe ist, welche nur unendlich kleine, dafür aber unendlich viele Summanden hat [§ 30].

83. Verschiedene Ordnungen des unendlich Großen und des unendlich Kleinen. Auf die Ausführungen in [82] beziehen sich die folgenden Erklärungen:

Erste Erklärung. Zwei unendlich kleine Zahlen ε_1 und ε_2 heißen von gleicher Ordnung unendlich klein, wenn der Bruch

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \text{ also auch der Bruch } \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

endlich und von 0 verschieden ist.

Zweite Erklärung. Zwei unendlich kleine Zahlen ε_1 und ε_2 heißen von verschiedener Ordnung unendlich klein, wenn der Bruch

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \text{ also auch der Bruch } \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

nicht endlich, sondern unendlich klein, bez. unendlich groß oder umgekehrt unendlich groß, bez. unendlich klein ist. Diejenige der beiden

Zahlen ε_1 und ε_2 heißt alsdann von höherer Ordnung unendlich klein, deren absoluter Wert kleiner ist.

So sind $\varepsilon_1 = \varepsilon$ und $\varepsilon_2 = 3\varepsilon$ von gleicher Ordnung unendlich klein, denn ihr Verhältnis ist, wie klein auch ε gesetzt wird,

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon}{3\varepsilon} = \frac{1}{3} = \text{endlich.}$$

Ist dagegen $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2$, so ist ε_2 von höherer Ordnung unendlich klein als ε_1, denn ihr Verhältnis ist:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1{}^2}{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 = \text{unendlich klein.}$$

Entsprechend gelte für unendlich große Zahlen die:

Dritte Erklärung. Zwei unendlich große Zahlen n_1 und n_2 heißen von gleicher Ordnung unendlich groß, wenn der Bruch:

$$\frac{n_1}{n_2}, \quad \text{also auch der Bruch } \frac{n_2}{n_1}$$

endlich und von 0 verschieden ist.

Vierte Erklärung. Zwei unendlich große Zahlen n_1 und n_2 heißen von verschiedener Ordnung unendlich groß, wenn der Bruch:

$$\frac{n_1}{n_2}, \quad \text{also auch der Bruch } \frac{n_2}{n_1}$$

nicht endlich, sondern unendlich groß, bzw. unendlich klein, oder umgekehrt unendlich klein, bzw. unendlich groß ist. Diejenige der beiden Zahlen n_1 und n_2 heißt dann von höherer Ordnung unendlich groß, deren absoluter Wert größer ist.

So sind $n_1 = n$, $n_2 = 3n$ von gleicher Ordnung unendlich groß, denn ihr Verhältnis ist, wie groß auch n gesetzt wird:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3} = \text{endlich.}$$

Ist dagegen $n_2 = n_1{}^2$, so ist n_2 von höherer Ordnung unendlich groß als n_1, denn ihr Verhältnis ist:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_1{}^2}{n_1} = n_1 = \text{unendlich groß.}$$

Man kann sagen: Eine unendlich kleine Zahl ε_2 bleibt unendlich klein, selbst verglichen mit einer unendlich kleinen Zahl ε_1, wenn ε_2 von höherer Ordnung unendlich klein ist. Man kann aber auch umgekehrt sagen: Eine unendlich kleine Zahl ε_2 wird unendlich groß im Vergleich zu einer anderen unendlich kleinen Zahl ε_1, wenn ε_2 von niederer Ordnung unendlich klein ist. Sind aber ε_1 und ε_2 von gleicher Ordnung, so sagt man auch: die eine verglichen mit der anderen und die andere verglichen mit der einen wird endlich. Entsprechend drückt man sich bei unendlich großen Zahlen aus.

84. Wenngleich aus den gegebenen Erklärungen mit voller Klarheit hervorgeht, daß der Ordnungsbegriff bei unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen immer nur relative, niemals aber absolute Bedeutung haben soll und haben kann, so sei dies doch noch zur Vorsicht ausdrücklich hiermit hervorgehoben. An und für sich ist eine unendlich kleine oder unendlich große Zahl nur schlechthin unendlich klein oder unendlich groß in dem Sinne von [81]. Von einer Ordnung kann erst die Rede sein bei mehreren zu vergleichenden unendlich kleinen oder unendlich großen Zahlen.

Alsdann aber greift man sehr oft eine, die etwa zuerst kommt, als unendlich kleine, bzw. unendlich große Zahl „erster" Ordnung heraus, um auch den anderen, wenn irgend möglich, bestimmte Ordnungen beilegen zu können. Wenn z. B. ε unendlich klein von der ersten Ordnung genannt wird, so ist auch 3ε von der ersten Ordnung, dagegen sind $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4 \ldots$ von der zweiten, dritten, vierten Ordnung, und ferner $\sqrt{\varepsilon}, \sqrt[3]{\varepsilon^2} \ldots$ von der Ordnung $\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \ldots$ unendlich klein.

Entsprechendes gilt für unendlich große Zahlen. Es ist sogar durchaus angemessen, n von gleicher Ordnung unendlich groß zu setzen, wie ε unendlich klein ist, wenn das Produkt $\varepsilon \cdot n$ einen endlichen Wert hat. Hiernach wäre also z. B. $1 : \varepsilon$ unendlich groß von der ersten Ordnung, wenn ε selbst unendlich klein von der ersten Ordnung ist.

Die Einführung der Ordnung in unendlich kleine und unendlich große Zahlen kommt auch bei den folgenden Redewendungen zur Geltung: Endliche Zahlen heißen einander gleich, abgesehen von unendlich kleinen Größen, wenn ihr Unterschied unendlich klein ist. Unendlich kleine Zahlen von gleicher Ordnung aber heißen einander gleich, abgesehen von höheren Ordnungen, wenn ihr Unterschied von höherer Ordnung unendlich klein ist. Entsprechend heißen unendlich große Zahlen von gleicher Ordnung einander gleich, abgesehen von niederen Ordnungen, wenn ihr Unterschied von niederer Ordnung unendlich groß ist, als sie selbst oder endlich, oder sogar unendlich klein ist. Beispiele hierzu:

Erstens. Die beiden endlichen Zahlen:

$$a = \frac{6 + 5\varepsilon}{3 - 2\varepsilon}; \quad b = \frac{2 - 7\varepsilon}{1 + 4\varepsilon}$$

sind einander gleich bis auf unendlich kleine Größen. Denn ihr Unterschied ist:

$$a - b = \varepsilon \cdot \frac{54 + 6\varepsilon}{(3 - 2\varepsilon)(1 + 4\varepsilon)}.$$

Der Faktor ε ist unendlich klein, der Bruch ist endlich, weil Zähler und Nenner endlich sind, also ist $a - b$ unendlich klein, w. z. b. w.

Zweitens. Die beiden unendlich kleinen Zahlen:

$$a = 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}; \quad b = \frac{\varepsilon^2}{2}, \ (\sqrt{1-\varepsilon^2} \text{ sei positiv})$$

sind einander gleich bis einschließlich Größen von niederer als der vierten Ordnung in bezug auf ε, denn ihr Unterschied ist:

$$a - b = 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{\varepsilon^2}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{\varepsilon^2(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})}{2(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})}$$
$$= \frac{\varepsilon^4}{2(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^2}.$$

Der Nenner ist endlich, also ist $a - b$ von der vierten Ordnung unendlich klein.

Drittens. Die beiden unendlich großen Zahlen:

$$a = |\sqrt{n^2+4n+7}|, \quad b = |n+1|$$

sind einander gleich bis auf endliche Größen. Denn ihr Unterschied ist:

$$a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{n^2+4n+7-(n^2+2n+1)}{\sqrt{n^2+4n+7}+n+1} = \frac{2n+6}{\sqrt{n^2+4n+7}+n+1}.$$

Setzt man hier $n = 1 : \varepsilon$ und multipliziert Zähler und Nenner mit ε, so folgt:

$$a - b = \frac{2+6\varepsilon}{\sqrt{1+4\varepsilon+7\varepsilon^2}+1+\varepsilon}.$$

Der Bruch ist endlich, weil Zähler und Nenner endlich sind.

Viertens. Die beiden unendlich großen Zahlen:

$$a = |\sqrt{n^2+7}|, \quad b = |\sqrt{n^2+3}|$$

sind einander gleich bis auf unendlich kleine Größen. Denn ihr Unterschied ist

$$a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{4}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+3}}.$$

Der Bruch ist unendlich klein, da der Zähler endlich, der Nenner unendlich groß ist.

85. Das Rechnen mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen wird noch sehr gründlich geübt werden, denn auf ihm beruht die Differential- und Integralrechnung, welche deshalb auch Infinitesimalrechnung genannt wird. Hier sei nur noch eine formale Definition einer stetigen Funktion aufgestellt, welche schärfer und bestimmter zum Ausdruck bringen soll, was in [79] über solche Funktionen steht. Gegeben sei die Funktion:

$$y = f(x). \tag{1}$$

Man nehme für die ursprüngliche Veränderliche zwei unendlich wenig

verschiedene Werte, oder wie man kurz sagt, zwei „Nachbarwerte“ x und $x_1 = x + \varepsilon$. Sind dann auch: $y = f(x)$ und $y_1 = f(x_1) = f(x + \varepsilon)$ Nachbarwerte, d. h. darf man setzen $y_1 = y + \varepsilon_1$ oder:

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon_1 \tag{2}$$

mit der Maßgabe, daß ε_1 mit ε zugleich unendlich klein wird, so ist eben die Funktion $f(x)$ stetig. Beispiel: Die Funktion:

$$y = f(x) = \frac{5 + 3x}{7 - 2x} \tag{3}$$

ist stetig, außer für $x = +\frac{7}{2}$. Man bilde:

$$f(x + \varepsilon) = \frac{5 + 3(x + \varepsilon)}{7 - 2(x + \varepsilon)} = \frac{5 + 3x}{7 - 2x} + \left(\frac{5 + 3(x + \varepsilon)}{7 - 2(x + \varepsilon)} - \frac{5 + 3x}{7 - 2x}\right)$$

$$= f(x) + \frac{[5 + 3(x + \varepsilon)](7 - 2x) - (5 + 3x)[7 - 2(x + \varepsilon)]}{(7 - 2x)(7 - 2(x + \varepsilon))}$$

$$= f(x) + \frac{31\varepsilon}{(7 - 2x)(7 - 2(x + \varepsilon))}.$$

Der Bruch ist eine unendlich kleine Größe ε_1 (außer für $x = 7:2$), denn sein Zähler ist unendlich klein, sein Nenner aber ist endlich und von 0 verschieden.

Also ist (2) erfüllt, d. h. die betrachtete Funktion ist stetig, außer für $x = +7:2$. Und in der Tat springt sie für diesen Wert von $-\infty$ bis $+\infty$ (vgl. [39]).

Übungen zu § 9.

1. Die Abplattung α einer Ellipse wird von der zweiten Ordnung unendlich klein, wenn die Exzentrizität ε von der ersten Ordnung unendlich klein wird.

2. Setzt man x unendlich klein, so wird $x - \sin x$ von der dritten Ordnung unendlich klein.

3. Die Differenz:

$$\varepsilon = \sqrt[n]{a} - 1$$

(a positiv, nicht $= 1$, nicht $= 0$, Wurzel positiv), wird unendlich klein, wenn n unendlich groß wird und zwar so, daß εn endlich bleibt.

4. Gegeben die Parabel und der Kreis:

$$y = \frac{x^2}{2p}; \quad Y = p - \sqrt{p^2 - X^2},$$

welche sich im Ursprung O berühren. Von welcher Ordnung wird $Y - y$ unendlich klein, wenn X und x einander gleich und von der ersten Ordnung unendlich klein gesetzt werden.

§ 10. Grenzfälle. Grenzwert oder limes. Unendliche Ausdrücke.

86. Was der Mathematiker unter Grenzfall A eines allgemeinen Falles B versteht, das werden die folgenden zehn Beispiele wohl vollkommen deutlich klar machen. Der Name soll sagen, daß zwar B nicht eigentlich A als Sonderfall einschließe, daß es aber doch möglich sei, A dem B über alle Grenzen hinaus anzunähern.

1. Der Kreis ist kein regelmäßiges Vieleck. Läßt man aber die Eckenzahl des letzteren unbegrenzt wachsen, so nähert es sich augenscheinlich unbegrenzt dem Kreise. Also ist der Kreis ein Grenzfall aller regelmäßigen Vielecke.

2. Eine Irrationalzahl ist keine Rationalzahl, d. h. weder eine ganze Zahl noch ein Bruch zweier ganzer Zahlen. Betrachtet man aber irgend einen Nenner n und denkt sich als Zähler nach und nach alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ gesetzt, so muß die Irrationalzahl zwischen zwei aufeinanderfolgenden Brüchen $m:n$ und $(m+1):n$ liegen. Sie unterscheidet sich daher von jedem um absolut weniger als $1:n$, d. h. um beliebig oder unendlich wenig, wenn man n beliebig oder unendlich groß macht. Also sind Irrationalzahlen Grenzfälle der Rationalzahlen. Seit ihrem ersten Auftreten in der Geschichte der Mathematik bis zum heutigen Tage kommt man ihnen auf diese Weise bei.

3. Die Parallele l_1 durch einen Punkt P zu einer nicht durch P gehenden unbegrenzten Geraden l schneidet diese nicht. (Fig. 28.) Fällt man aber das Lot PQ auf l, verbindet P mit irgend einem andern Punkt R von l und nimmt an, daß R sich unbegrenzt weit von Q entfernt, so wird der Winkel zwischen dieser Verbindungslinie und der Parallelen unendlich klein. Also ist die Parallele ein Grenzfall aller Geraden, welche durch P gehen und l schneiden. Man sagt wohl: Parallelen schneiden sich in der Unendlichkeit und meint damit dasselbe.

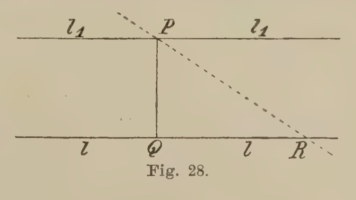


Fig. 28.

4. Eine Tangente an einen Kreis in einem seiner Punkte P ist keine Sekante, d. h. keine unbegrenzt verlängerte Verbindungslinie von P mit einem andern Punkte Q des Kreises. Nimmt man aber an, daß Q sich P unbegrenzt nähert, so wird der Winkel zwischen Tangente und Sekante unendlich klein. Also ist die Tangente ein Grenzfall aller Sekanten. Man sagt wohl und meint damit dasselbe: Eine Tangente an einen Kreis (oder eine beliebige Kurve) ist die Verbindungslinie zweier benachbarter Punkte.

5. Ein Punkt eines Kreises ist kein Schnittpunkt zweier Tangenten, denn ein solcher liegt stets außerhalb. Läßt man aber die

beiden Berührungspunkte sich unbegrenzt nähern, so nähert sich auch der Schnittpunkt ihnen unbegrenzt. Also ist ein Punkt eines Kreises (oder einer beliebigen Kurve) ein Grenzfall des Schnittpunktes zweier Tangenten. Man sagt wohl und meint damit dasselbe: Zwei benachbarte Tangenten schneiden sich im Berührungspunkt.

Übrigens stehen 4. und 5. offenbar in geometrisch dualem oder reziprokem Gegensatz. Dort benachbarte Punkte, hier benachbarte Tangenten, dort die Tangente als Grenzfall der Sekante durch benachbarte Punkte, hier der Kurvenpunkt als Grenzfall des Schnittpunktes zweier benachbarter Tangenten [201].

6. Ruhe ist nicht Bewegung. Aber eine Bewegung kann, indem sie sich allmählich verlangsamt, unmerklich in Ruhe übergehen und insofern ist Ruhe nicht Gegensatz, sondern ein Grenzfall der Bewegung. Wer Dynamik gründlich kennt, ist auch in der Statik zu Hause, wenn er sich ein für alle mal klar gemacht hat, was in der Mathematik ein Grenzfall ist. Er wird sich z. B. sofort darüber klar sein, daß in der Statik Zeit und Masse nur wie verhallende Töne aus der Dynamik nachklingen.

7. Ein ebenes ist kein sphärisches Dreieck. Wenn aber der Kugelradius unbegrenzt wächst, so kann der Unterschied unbegrenzt klein werden; also ist ein ebenes Dreieck ein Grenzfall des sphärischen Dreieckes.

Es muß daher möglich sein, die ebene Trigonometrie aus der sphärischen durch einen Grenzübergang abzuleiten. Wer den Versuch machen will, wird gut tun, sich der beiden Grenzformeln zu bedienen [88]:

$$\lim_{(x=0)} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{(x=0)} \frac{1-\cos x}{x^2} = \tfrac{1}{2}.$$

8. Größer ist nicht gleich und kleiner ist auch nicht gleich. Aber wenn auch a größer oder kleiner ist als b, so kann doch der Unterschied zwischen a und b möglicherweise bei stetiger Veränderlichkeit unendlich klein werden. Also ist gleich ein Grenzfall sowohl von größer als auch von kleiner.

9. Die abgeleitete Funktion (§ 13) ist kein Differenzenquotient. Aber der Wert eines Differenzenquotienten nähert sich der abgeleiteten Funktion unbegrenzt, wenn Δx und Δy unbegrenzt klein, d. h. zu Differentialen dx und dy werden.

10. Ein (bestimmtes) Integral ist keine Summe. Aber es ist der Grenzfall einer solchen, wenn die Summanden unendlich klein werden und dafür ihre Anzahl unendlich groß wird.

Diese zehn Beispiele, die man leicht auf hundert oder tausend bringen könnte, zeigen den mannigfaltigen Gebrauch, welchen man von dem Begriff eines Grenzfalles in der reinen Analysis, der Geo-

metrie und der angewandten Mathematik macht. Insbesondere sollen die letzten beiden vorwegnehmen, daß ohne ihn Differential- und Integralrechnung nicht möglich wären.

87. Grenzwert oder Limes. Auf Zahlen oder Größen angewendet wird der Grenzfall zum Grenzwert oder limes. Wenn eine als veränderlich angenommene Zahl a sich einer gegebenen oder gesuchten Zahl b unbegrenzt annähert, so sagt man: a habe b zum limes und drückt dies durch die Formel aus:

$$\lim a = b \tag{1}$$

(lim a wird gesprochen limes von a).

So kann eine unendlich kleine Zahl ε auch als eine Zahl erklärt werden, welche 0 zum limes hat:

$$\lim \varepsilon = 0; \tag{2}$$

umgekehrt könnte eine unendlich große Zahl n erklärt werden durch:

$$\lim n = \infty . \tag{3}$$

Wenn ganz allgemein b der limes von a ist (a und b seien endlich), so heißt dies doch nichts anderes, als daß $a - b$ unendlich klein, etwa $= \varepsilon$ werde. Statt (1) darf man also auch schreiben:

$$a = b + \varepsilon, \tag{4}$$

und umgekehrt folgt aus (4) wieder (1), wenn a als veränderlich und b als gegeben oder gesucht gilt. Nur der Ausdruck in (1) und (4) ist verschieden.

Meist hängt die Zahl a, auf deren limes b man hinaus will, von einer andern Zahl α ab, die selbst einen limes, etwa β hat. Also ein limes, der durch einen andern limes bedingt wird. Man gebraucht dann das Zeichen lim in der Regel nur einmal und schreibt so:

$$\lim_{(\alpha = \beta)} a = b \tag{5}$$

und spricht: limes von a ist $= b$, wenn limes von $\alpha = \beta$ ist (oder für $\lim \alpha = \beta$). Drei Beispiele zur ersten Erläuterung:

1. Die Reziprozität zwischen unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen [81] kann formal ausgedrückt werden:

$$\lim_{(n = \infty)} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{(\varepsilon = 0)} \frac{1}{\varepsilon} = \infty . \tag{6}$$

2. Es sei u der Umfang eines Kreises und u_n der Umfang des ihm einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Dann ist zwar $u_n < u$, dagegen:

$$\lim_{(n = \infty)} u_n = u .$$

3. Die Stetigkeit einer Funktion kann statt in der Form [85 2]:

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon_1, \tag{7}$$

auch in der Form ausgedrückt werden:

$$\lim_{(x_1=x)} f(x_1) = f(x) \text{ oder } \lim_{(\varepsilon=0)} f(x+\varepsilon) = f(x). \tag{8}$$

88. Eine Limesrechnung ist eine Rechnung, durch welche ein Grenzwert bestimmt werden soll, sei es mit mathematischer Genauigkeit, sei es angenähert, etwa auf so und so viel Dezimalen richtig (so daß der übrigbleibende Abrundungsfehler nach oben oder unten nicht größer sein darf, als fünf Einheiten der nächstfolgenden Stelle). Es sei z. B. zu bestimmen:

$$\lim_{(\alpha=\beta)} a$$

unter Annahme, daß a nach [87] irgend wie von α abhängt. Ist diese Abhängigkeit stetig, dann ist die Limesrechnung sehr einfach. Man setze in a für α seinen lim, also β ein und lim a ist bestimmt. Beispiel:

$$\lim_{(x=2)} \frac{5x-3}{6x-1} = \frac{10-3}{12-1} = +\frac{7}{11}.$$

Doch ist dies noch keine wirkliche oder eigentliche Limesrechnung. Eine solche entsteht vielmehr erst dann, wenn das unmittelbare Einsetzen von β an Stelle von α zu unbestimmten Formen, etwa:

$$\frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

führen würde, so daß sogar vor der Hand die Existenz von limes a noch zweifelhaft sein könnte. Dann nützt eben dieses Einsetzen nichts und es ist zur Umgehung oder Zerstörung der unbestimmten Form erst eine Umformung nötig, welche den Kern der Limesrechnung ausmacht. Vier Beispiele:

$$\boldsymbol{A = \lim_{(x=+\infty)} \left(\sqrt{x^2+5x+7} - x\right).} \quad \text{(Wurzel positiv.)} \tag{1}$$

Das unmittelbare Einsetzen von $x = +\infty$ würde $\infty - \infty$ ergeben. Man nehme statt x den reziproken Wert: $y = 1:x$; $x = 1:y$ und bemerke, daß lim $x = \infty$ zur Folge hat: lim $y = 0$ [87]. Es ergibt sich:

$$A = \lim_{(y=0)} \left(\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{5}{y} + 7} - \frac{1}{y}\right) = \lim_{(y=0)} \frac{\sqrt{1+5y+7y^2} - 1}{y}.$$

Noch ist wenig erreicht, denn das Einsetzen von $y = 0$ würde abermals auf eine unbestimmte Form, nämlich auf $0:0$ führen. Also

forme man nochmals um. Man erweitere Zähler und Nenner mit $\sqrt{1+5y+7y^2}+1$, so wird:

$$A = \lim_{(y=0)} \frac{5y+7y^2}{y(\sqrt{1+5y+7y^2}+1)}.$$

Abermals würde nach Einsetzen von $y=0$ die unbestimmte Form $0:0$ entstehen. Doch jetzt kann der Faktor y im Nenner gegen den Zähler gehoben werden, (da er zwar unendlich klein, aber nicht $=0$ sein soll). Man erhält:

$$A = \lim_{(y=0)} \frac{5+7y}{\sqrt{1+5y+7y^2}+1}.$$

Endlich ist die unbestimmte Form aus dem Wege geräumt. Da der verbleibende Bruch stetig ist, so darf nunmehr $y=0$ gesetzt werden. Man erhält also:

$$A = \frac{5+0}{\sqrt{1+0}+1} = +\frac{5}{2}.$$

$$\boldsymbol{B = \lim_{(x=0)} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}}. \tag{2}$$

Auch hier stellt sich die unbestimmte Form $0:0$ quer in den Weg. Man forme also Zähler und Nenner um. Der Zähler ist:

$$\sqrt{1+x}-1 = \frac{x}{\sqrt{1+x}+1}; \text{ der Nenner ist:}$$

$$\sqrt[3]{1+x}-1 = \frac{(\sqrt[3]{1+x})^3-1}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1} = \frac{x}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1}.$$

Daher, wenn x (das ja wieder nicht $=0$, sondern unendlich klein ist) fortgehoben wird:

$$B = \lim_{(x=0)} \frac{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

Die unbestimmte Form ist beseitigt und der verbleibende Bruch ist eine stetige Funktion von x. Man setze also nunmehr unmittelbar $x=0$ und erhält:

$$B = \frac{1+1+1}{1+1} = +\frac{3}{2}.$$

$$\boldsymbol{C = \lim_{(x=0)} \frac{\sin x}{x}}. \tag{3}$$

Hier hilft die fortlaufende Ungleichung (IX) [51]:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

die durch Umkehrung ergibt:

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \operatorname{cotg} x,$$

oder nach Multiplikation mit $\sin x$:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

C ist hiermit in zwei Grenzen eingeschlossen. Die erste ist $= 1$, die andere aber, nämlich $\cos x$ nähert sich der 1, da erstens $\cos x$ eine stetige Funktion von x und zweitens $\cos(0) = 1$ ist. Daher erst recht:

$$C = \lim_{(x=0)} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

womit die Limesrechnung zu Ende ist. Bei ihr wurde zwar vorausgesetzt, daß x positiv unendlich klein sei; da jedoch:

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

ist, so gilt die Formel auch für negativ unendlich kleine Werte von x.

$$\boldsymbol{D = \lim_{(x=0)} \frac{1 - \cos x}{x^2}}. \tag{4}$$

Dieser limes kann auf den vorigen zurückgeführt werden, da:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

ist. Also nach (3), wenn dort x durch $\frac{x}{2}$ ersetzt wird:

$$D = \lim \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

Ist eine Zahl, etwa x, von mehreren anderen, etwa $y, z, \ldots$, die selbst Grenzwerte haben, in stetiger Weise abhängig, so setzt man selbstverständlich für $y, z, \ldots$ ohne Umschweife diese ihre Grenzwerte ein und die Sache ist erledigt. Andernfalls, besonders wenn sich wie vorhin unbestimmte Formen ergeben würden, ist wieder erst eine eigentliche Limesrechnung notwendig, zu der die vier eben durchgenommenen Beispiele als Vorbilder dienen können.

Im besonderen ist, da Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten stetige Funktionen sind:

$$\lim (y \pm z) = \lim y \pm \lim z,$$

$$\lim (y \cdot z) = \lim y \cdot \lim z,$$

$$\lim \frac{y}{z} = \frac{\lim y}{\lim z}.$$

Diese Formeln sind im allgemeinen richtig. Wenn aber $\lim y$ und

$\lim z$ die Werte 0 und ∞ haben, so können unbestimmte Formen auftreten, worauf alsdann eine eigentliche Limesrechnung anheben müßte. Vgl. [82].

Da Differentialquotient und Integral, ehe im gegebenen Falle ihre Werte bestimmt werden, ihrem Begriffe nach ursprünglich Grenzwerte sind und sein sollen, so ist Differential- und Integralrechnung im wesentlichen eine limes-Rechnung, von der die soeben durchgerechneten Beispiele einen kleinen Vorgeschmack geben sollten.

89. Geschlossene und unendliche Ausdrücke. Ein Ausdruck heißt geschlossen (oder endlich), wenn er zu seiner Berechnung eine endliche Anzahl mathematischer Operationen verlangt, wie z. B. der Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c \cdot d}},$$

welcher vier Rechnungen einschließt, nämlich eine Addition, eine Multiplikation, eine Division und eine Wurzelausziehung. Ein nicht geschlossener oder unendlicher Ausdruck dagegen ist ein Ausdruck, der eine nie aufhörende, eine unendliche Menge mathematischer Operationen erfordert. Hierher gehören z. B.:

1. Die unendlichen Summen oder Reihen:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \text{ in inf.}$$

2. Die unendlichen Produkte:

$$u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots \text{ in inf.}$$

3. Die unendlichen Kettenbrüche:

$$u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cdots \text{ in inf.}}}$$

Selbstverständlich sind noch sehr viele andere Arten unendlicher Ausdrücke denkbar. So würde die Newtonsche Näherungsmethode [186] bei unbegrenzter Fortsetzung zu unendlichen Ausdrücken für die Wurzeln einer Gleichung führen.

Die Elementarmathematik hat es fast nur mit geschlossenen Ausdrücken zu tun, aber auch hier werden schon hin und wieder unendliche Ausdrücke, z. B. unendliche geometrische Reihen:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots \text{ in inf.}$$

betrachtet. Ja selbst in die niedere Rechenkunst sind sie als unendliche Dezimalbrüche eingedrungen. Die Gleichung:

$$\pi = 3{,}1415926 \ldots$$

drückt doch π durch die unendliche Reihe aus:

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots$$

Die Hauptanwendungen der unendlichen Ausdrücke sind indessen der höheren Analysis vorbehalten.

90. Konvergenz und Divergenz. Ein unendlicher Ausdruck heißt konvergent, wenn er einen limes hat, d. h. wenn man bei unbegrenzter Fortsetzung der geforderten Operationen eine unbegrenzte Annäherung an einen Wert erzielt. Dieser Wert heißt alsdann der Wert des Ausdruckes, z. B.:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \text{ in inf.}$$

Beweis. Es ist:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2^2},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und allgemein:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Die Abweichung von 1, also $1 : 2^n$ wird unendlich klein, wenn n unendlich groß wird. Mithin ist die Reihe konvergent und ihr Wert ist $= 1$.

Ist kein limes vorhanden, so heißt der Ausdruck divergent. Man betrachte die beiden Reihen:

A) $$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots,$$

B) $$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots.$$

A) divergiert, weil die Glieder mit unbegrenzt wachsender Stellenzahl unendlich groß werden. Man sagt A) divergiert gegen $+\infty$ (seltener A) konvergiert gegen $+\infty$). B) divergiert auch, obgleich weder die Glieder selbst unendlich groß werden, noch ihre Summe unbegrenzt wächst, sondern abwechselnd $+1$ und 0 ist. (Solche Reihen wie B) nennt man auch wohl oszillierend.) Die Gleichung:

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots \text{ in inf.}$$

ist daher sinnlos, denn die rechtsstehende unendliche Reihe hat keinen limes, d. h. keine Summe.

Unter allen denkbaren unendlichen Ausdrücken haben also nur diejenigen einen „Wert“, welche konvergieren. Allerdings ist dieser

Wert kein geschlossener Ausdruck, sondern ein limes, dem man bei unbegrenzter Fortsetzung des Verfahrens beliebig nahe kommen kann. Doch steht nichts im Wege, ihn auch durch nur begrenzte Fortsetzung des Verfahrens so genau zu berechnen, als man nur immer will; nur muß man irgendwie einen Betrag bestimmt haben, innerhalb dessen die Abweichung vom limes bei dem Abbrechen der Operationen bleibt und diesen Betrag so bemessen, daß er der gewünschten Genauigkeit entspricht. Beispiel in [94].

Umgekehrt sind von jeher konvergente unendliche Ausdrücke das letzte Mittel gewesen, um Grenzwerte zu ermitteln, indem man ein unbegrenzt fortsetzbares Verfahren ausfindig macht, welches zu dem Grenzwert führen muß. Über das „wie" lassen sich bei der großen Allgemeinheit dieser Aufgabe keine besonderen Vorschriften erlassen, außer in der Differential- und Integralrechnung selbst, die ja im Laufe der Jahrhunderte zu einer strengen und einheitlichen Erledigung aller einschlagenden Fälle durch ihre Methoden vorgedrungen ist. Doch vielleicht ist es nützlich, wenn erst zwei Beispiele, welche beinahe zwei Jahrtausende alt, also wohl die ältesten ihrer Art sind, erläutert werden, aber nicht nur um ihres hohen geschichtlichen Interesses, sondern auch um der Art und Weise willen, wie der größte Mathematiker des Altertums zu Werke gegangen ist, um solche, vor ihm kaum oder doch nur vorübergehend ins Auge gefaßte Fragen ernsthaft und entschlossen in Angriff zu nehmen, Fragen, die heute systematisch durch Differenzieren und Integrieren mit allen dazu gehörigen Sätzen und Theorien erledigt werden.

91. Archimedes Kreisrechnung. Es sei u, u_n, U_n der Umfang eines Kreises, eines ihm einbeschriebenen und eines ihm umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Dann ist zunächst zwar:

$$u_n < u < U_n,$$

jedoch:

$$u = \lim_{(n=\infty)} u_n = \lim_{(n=\infty)} U_n. \tag{1}$$

Daß der Kreis die Grenze der ihm ein- und umbeschriebenen Vielecke sei, soll schon Eudoxus bemerkt haben, auf den dann wohl die erste, bewußte Aufstellung des limes-Begriffes zurückgehen würde. Archimedes hat den entscheidenden Schritt getan durch Auffindung eines zugehörigen unendlichen Verfahrens, bestehend in der Verdoppelung der Eckenzahl. Die zugehörigen Formeln lauten in unserer Schreibweise:

$$U_{2n} = \frac{2\,U_n \cdot u_n}{U_n + u_n}; \quad u_{2n} = \sqrt{U_{2n} u_n}. \tag{2}$$

Sie sind auf ganz elementarem Wege ableitbar und stehen in fast allen Lehrbüchern der Geometrie. Für $n = 6$ ist, wenn der Radius $= 1$ gesetzt wird:

$$u_6 = 6, \quad U_6 = 4\sqrt{3}.$$

Von diesen beiden Werten ausgehend berechnete Archimedes die Umfänge für $n = 12$, $n = 24$, $n = 48$, $n = 96$ und fand so seinen auch heute noch viel benutzten Annäherungswert für π:

$$\pi = 3\tfrac{1}{7} = \tfrac{22}{7} \tag{3}$$

oder genauer gesagt, er bewies, daß:

$$3\tfrac{10}{70} > \pi > 3\tfrac{10}{71} \tag{4}$$

ist. Später, als die niedere Rechenkunst weiter fortgeschritten war (zu Archimedes Zeiten gab es noch keine Ziffern), hat man die Verdoppelung von n noch viel weiter fortgesetzt. Doch ist dies ursprüngliche Verfahren seitdem längst überholt [216].

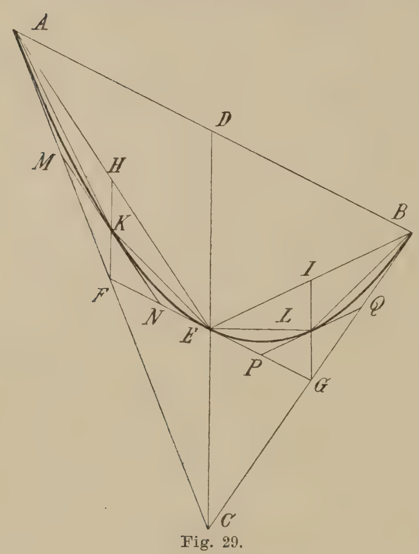


Fig. 29.

Archimedes Quadratur der Parabel. (Fig. 29.)

I. Die Verbindungslinie der Mitte D einer Parabelsehne mit dem Schnittpunkt C der Tangenten in den Endpunkten A und B wird von der Parabel halbiert. Es ist $CE = ED$.

II. Die Tangente an die Parabel in E ist parallel zur Sehne AB. Auf diese beiden Sätze gründete Archimedes die Parabelquadratur wie folgt. Es werde der Einfachheit wegen gesetzt:

$$\Delta ACB = \Delta; \quad \text{Segment } AKELB = S.$$

Dann ist nach I.: $\Delta AEB = \frac{\Delta}{2}$ (und nach II. ist dieses Dreieck das größte dem Segment einbeschriebene Dreieck.) Folglich:

$$S > \frac{\Delta}{2}.$$

Nun wende man I. und II. auf die nach Abzug des Dreiecks AEB übrig bleibenden zwei Segmente an. Es folgt:

$$\Delta AKE = \tfrac{1}{2}\Delta AFE = \tfrac{1}{4}\Delta ACE = \tfrac{1}{8}\Delta ACD = \tfrac{1}{16}\Delta$$

ebenso: $\Delta ELB = \frac{1}{16}\Delta$, mithin:

Fünfeck $AKELB = \frac{\Delta}{2} + \frac{2}{16}\Delta = \frac{\Delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right)$ daher:

$$S > \frac{\Delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right).$$

Nach Abzug des Fünfecks bleiben vier Segmente übrig über den Sehnen AK, KE, EL, LB. Verfährt man mit ihnen in gleicher Weise, so folgt:

$$S > \frac{\Delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right).$$

So kann man fortfahren. Aber wenn auch das Segment stets größer bleibt als das Polygon, so wird der Unterschied doch kleiner und kleiner und zuletzt unendlich klein. Also:

$$S = \frac{\Delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots \text{ in inf.}\right).$$

Rechts steht eine konvergente geometrische Reihe, daher [93]:

$$S = \frac{\Delta}{2\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{3}\Delta = \frac{4}{3} \cdot \frac{\Delta}{2}.$$

Der Inhalt des Parabelsegmentes ist zwei Drittel des Inhaltes des umbeschriebenen Dreiecks oder vier Drittel des Inhaltes des größten einbeschriebenen Dreiecks.

Statt durch einbeschriebene kann man auch durch umbeschriebene Polygone die Quadratur vornehmen, ausgehend von $\Delta ACB = \Delta$, worauf das Trapez $AFGB$, dann das Sechseck $AMNPQB$ usw. folgen würde. Man erhielte dann die Reihe der Ungleichungen:

$$S < \Delta, \quad S < \Delta - \frac{\Delta}{4}, \quad S < \Delta - \frac{\Delta}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots$$

an deren Grenze die Gleichheit stehen würde:

$$S = \Delta - \frac{\Delta}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots \text{ in inf.}\right),$$

oder:

$$S = \Delta - \frac{\Delta}{4\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \Delta - \frac{\Delta}{3} = \frac{2}{3}\Delta = \frac{4}{3}\frac{\Delta}{2},$$

also derselbe Wert für S wie vorhin. Bei der Quadratur des Parabelsegmentes hat Archimedes hiernach sogar den letzten Schritt machen können, was ihm bei dem Kreise nicht gelungen ist, aber auch keinem andern je gelingen wird, wie man in neuerer Zeit streng bewiesen hat. Denn bei der Parabel ist er durch einen unendlichen Ausdruck hierdurch zu einem geschlossenen Ausdruck gelangt und obendrein zu einem äußerst einfachen.

Kann man an das Ende einen geschlossenen Ausdruck setzen, um so besser. Daß aber ein solcher in allen Fällen, also auch beim Kreise existieren müsse, obgleich ihn die Mathematiker von Fach noch nicht

gefunden haben, ist ein falsches Axiom, dem Hunderte, Tausende von Erfindern der „Quadratur des Kreises" verfallen und, wie es scheint, unrettbar verfallen. Ihnen sind das Unendlichkleine, der limes-Begriff, der unendliche Ausdruck usw. ein Greuel. Sie wollen oder können diese Begriffe nicht fassen und ahnen gar nicht, daß und wie dieselben anwendbar sind und daß ihr Hauptwert gerade in dem Umstande liegt, auch da anwendbar zu sein, wo man sich vergebens und immer vergebens um eine geschlossene Formel bemühen würde.

Übungen zu § 10.

1. $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=0}^{x=n} x^p}{n^{p+1}} \quad (p \text{ positiv und ganz})$$

2. Das arithmetisch-geometrische Mittel von Gauß. Es seien a_1 und b_1 irgend zwei ungleiche positive Zahlen. Man bilde das arithmetische und geometrische Mittel:

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1};$$

zu a_2 und b_2 bilde man wieder das aritmetische und geometrische Mittel:

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2}$$

usw. Zu beweisen, daß:

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n$$

wirklich existiert.

3. Gegeben sei eine beliebige positive Zahl a. Man bilde:

$$a_1 = \sqrt{a+2}, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 2}, \quad a_3 = \sqrt{a_2 + 2}, \cdots$$

und nehme sämtliche Wurzeln positiv. Es ist zu beweisen, daß:

$$\lim_{n=\infty} a_n$$

wirklich existiert und sein Wert zu berechnen.

4. $$\lim_{n=\infty} \cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdots \cos\frac{x}{2^n}.$$

§ 11. Unendliche Reihen. Potenzreihen.

92. Dieser Paragraph soll sich mit Konvergenzkriterien für unendliche Reihen befassen, also für die denkbar einfachsten und auch am häufigsten angewendeten unendlichen Ausdrücke der höheren Analysis. Freilich ist und bleibt ja das allgemeinste Merkmal einer Konvergenz, daß ein limes existiert [90]; immerhin kann es in diesem

weiten Rahmen noch besondere, aber doch viele Fälle zusammenfassende Kriterien geben und um diese soll es sich hier handeln.

Vorgelegt sei eine unendliche Reihe:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots \text{ in inf.} \tag{1}$$

Man bilde aus den u die sogenannten Näherungsreihen:

$$\begin{aligned} s_0 &= u_0, \\ s_1 &= u_0 + u_1, \\ s_2 &= u_0 + u_1 + u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \end{aligned} \tag{2}$$

usw. Wenn s_n mit unbegrenzt wachsendem n einen Grenzwert s hat

$$s = \lim_{(n=\infty)} s_n, \tag{3}$$

so ist (1) konvergent und dieser limes bezeichnet nach der in [90] getroffenen Vereinbarung den Wert der Reihe. Es wird also:

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots \text{ in inf.} \tag{4}$$

Existiert der in (3) genannte limes aber nicht, so divergiert die Reihe und (4) wird sinnlos. (Wächst der absolute Wert von s_n unbegrenzt, so nennt man die Reihe gleichfalls divergent. Sie divergiert gegen $\pm\infty$ [90]).

Erste Bedingung der Konvergenz. Aus (2) folgt:

$$s_n - s_{n-1} = u_n.$$

Mit n wächst auch $n - 1$ unbegrenzt. Bei Konvergenz ist also:

$$\lim_{(n=\infty)} s_n = \lim_{(n=\infty)} s_{n-1}; \quad \text{oder:} \quad \lim(s_n - s_{n-1}) = 0$$

$$\text{oder:} \quad \lim_{(n=\infty)} u_n = 0, \quad \text{d. h.:} \tag{5}$$

Wenn eine Reihe konvergieren soll, so muß ihr allgemeines Glied u_n mit wachsendem n unendlich klein werden.

Um Mißverständnissen zu begegnen, sei noch zweierlei hierzu bemerkt. Erstens: Es wird nicht gesagt, daß die u_n von einem bestimmten n ab absolut kleiner und kleiner werden müssen. Es kann u_n sehr wohl vorübergehend wieder zunehmen, aber doch so, daß trotzdem (5) erfüllt wird. Zweitens: Man darf das Kriterium nicht umkehren, denn es ist nach einer oft gebrauchten Redewendung „notwendig aber nicht ausreichend“, d. h. (5) muß zwar erfüllt sein für den Fall der Konvergenz, aber wenn (5) erfüllt ist, braucht trotzdem die Reihe nicht konvergent zu sein, wie das folgende Beispiel eindringlich lehrt:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots \tag{6}$$

also:

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{3}, \ldots u_{n-1} = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{1}{n+1} \cdots$$

Die Bedingung (5) ist erfüllt. Man berechne:

$$s_{2n+1} - s_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}.$$

Der letzte Nenner $2n+2$ ist der größte, der letzte Bruch also der kleinste. Da ihre Anzahl $n+1$ beträgt, so folgt für jeden Wert von n:

$$s_{2n+1} - s_n > \frac{n+1}{2n+2}, \text{ d. h. } s_{2n+1} - s_n > \frac{1}{2},$$

und damit ist die Divergenz erwiesen. Denn s_n und s_{2n+1} müßten den gleichen limes haben, wenn überhaupt ein solcher existierte.

Man bezeichne mit $s_{n,m}$ die Summe von m aufeinanderfolgenden Gliedern, von u_{n+1} anfangend:

$$s_{n,m} = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}, \tag{7}$$

also daß nach (2):

$$s_{n,m} = s_{n+m} - s_n \tag{8}$$

ist. Bei Konvergenz wird $\lim s_{n+m} = \lim s_n = s$; also:

$$\lim_{(n=\infty)} s_{n,m} = 0 \quad (m \text{ beliebig}), \tag{9}$$

d. h. wenn eine Reihe konvergiert, so muß ihr „Rest“ $s_{n,m}$ mit unbegrenzt wachsendem n unendlich klein werden, wie groß man auch m, d. h. die Anzahl der Glieder des Restes nehmen mag. Im besonderen muß dies also auch der Fall sein, wenn man auch m unbegrenzt wachsen läßt:

$$\lim_{(n=\infty),\ (m=\infty)} s_{n,m} = 0. \tag{9a}$$

Die Bedingung (9) einschließlich (9a) genügt. Sie ist „notwendig und ausreichend“, d. h. sie muß erfüllt sein für den Fall der Konvergenz, und wenn sie erfüllt ist, so ist auch immer Konvergenz vorhanden. Man bemerke, daß (5) ein ganz besonderer Fall von (9) ist, nämlich der, daß $m = 1$ gesetzt wird, also $s_{n,m}$ sich auf ein einziges Glied der Reihe beschränkt. Aber dieser besondere Fall reicht, wie vorhin gezeigt, nicht aus, sondern der ganze Rest, soweit man auch die Summierung fortsetzt, muß unendlich klein werden; dies ist der wesentliche Unterschied zwischen (5) und (9).

Absolute Reihen. Sind alle Glieder u_0, u_1, u_2 ... absolut (oder positiv), so nennt man der Kürze wegen die Reihe selbst ab-

solut. Bei solchen Reihen wachsen die Näherungssummen [92 2], es ist:

$$s_0 < s_1 < s_2 < s_3 \ldots$$

so daß bei Konvergenz zwar der Wert von s größer ist als jede Näherungssumme:

$$s > s_n, \tag{10}$$

aber doch die Gleichung besteht:

$$s = \lim_{(n=\infty)} s_n.$$

93. Majorante und Minorante. Wenn zwei absolute Reihen:

$$A) \quad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \ldots \text{ in inf.}, \tag{1}$$

$$B) \quad v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + v_{n+1} + \cdots \text{ in inf.} \tag{2}$$

zusammengestellt werden und es sich zeigt, daß:

$$u_0 \leqq v_0,\ u_1 \leqq v_1,\ u_2 \leqq v_2 \ldots \text{ allgemein } u_n \leqq v_n, \tag{3}$$

d. h. daß jedes Glied von A kleiner (oder vielmehr nicht größer) als das Glied von B mit demselben Stellenzeiger n ist, so nennt man B eine Majorante von A, und A eine Minorante von B.

I. Wenn eine Majorante B einer Reihe A konvergiert, so konvergiert die Reihe A erst recht. Bezeichnet man ihre Werte mit:

$$s = u_0 + u_1 + u_2 \ldots \text{ in inf.}, \tag{4}$$

$$s' = v_0 + v_1 + v_2 \ldots \text{ in inf.} \tag{5}$$

so ist:

$$s' > s, \quad s < s'. \tag{6}$$

Beweis: Da B konvergiert, ist:

$$\lim_{(n=\infty)} s'_{n,m} = v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots + v_{n+m} = 0.$$

Da nun infolge der Ungleichungen (3) für jeden Wert von n und m

$$s_{n,m} \leqq s'_{n,m}$$

ist, so folgt erst recht

$$\lim_{(n=\infty)} s_{n,m} = 0,$$

d. h. auch A ist konvergent. Da ferner, abermals infolge der Ungleichungen (3) stets $s_n \leqq s'_n$ ist, so folgt auch $s < s'$; $s' > s$.

Aus I. ergibt sich durch Umkehrung:

II. Wenn eine Reihe A divergiert, so divergiert jede ihrer Majoranten erst recht. Denn konvergierte nur eine einzige der letzteren, so würde nach I. auch A konvergieren müssen.

Gelingt es also, auch nur von einer einzigen Majorante die Konvergenz nachzuweisen, so ist damit die Konvergenz der Reihe selbst ohne allen Zweifel festgestellt. Vorgelegt sei z. B. die Reihe:

$$s = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \text{ in inf.} \tag{7}$$

Man stelle sie mit der Reihe zusammen:

$$s' = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots \text{ in inf.}, \tag{8}$$

welche zwar eine Minorante von (7) ist, aber zu einer Majorante von (7) werden würde, wenn man in (7) das erste Glied fortließe. Es ergibt sich:

$$s'_{n-1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

d. h.

$$s'_{n-1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \text{also:} \quad s' = \lim_{(n=\infty)} s'_{n-1} = 1.$$

Mithin ist auch s konvergent und $s < 1 + s'$, d. h. $s < 2$.

(Der genaue Wert ist: $s = \frac{\pi^2}{6}$.)

Geometrische Reihen. Vorgelegt sei die geometrische unendliche Reihe:

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \text{ in inf.}, \tag{9}$$

in welcher (vorläufig) x positiv sein soll, damit sie zu einer absoluten Reihe werde, wie vereinbart. Hier ist:

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n,$$

also nach der Summenformel für (endliche) geometrische Reihen:

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}.$$

Ist $x < 1$, so folgt $\lim \frac{x^{n+1}}{1 - x} = 0$, also:

$$s = \frac{1}{1 - x} \qquad (x < 1). \tag{10}$$

Ist $x = 1$, so wird (9) divergent, weil sämtliche Glieder $= 1$ werden. Die Gleichung (10) bleibt noch insofern richtig, als der Bruch ∞ wird, und die Reihe gegen ∞ divergiert. Ist aber $x > 1$, so divergiert (9) ebenfalls (gegen ∞) und (10) wird ganz sinnlos, da der Bruch endlich und obendrein negativ wird.

94. Aus dem Kriterium I. in [93] einerseits und dieser so einfachen Konvergenzbetrachtung für geometrische Reihen andererseits ergibt sich nun folgendes Hauptkriterium von ganz vorzüglicher Anwendbarkeit:

I. Eine (absolute) Reihe ist konvergent, wenn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder $u_{n+1} : u_n$ von einer bestimmten Stellenzahl n kleiner ist und kleiner bleibt, als ein angebbarer echter Bruch δ.

Beweis. Nach Voraussetzung soll sein:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \delta, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \delta, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < \delta, \ldots, \tag{1}$$

also auch nach Multiplikation dieser Ungleichungen:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \delta, \quad \frac{u_{n+2}}{u_n} < \delta^2, \quad \frac{u_{n+3}}{u_n} < \delta^3 \ldots,$$

oder

$$u_{n+1} < \delta u_n, \; u_{n+2} < \delta^2 u_n, \; u_{n+3} < \delta^3 u_n \ldots$$

Mithin ist die Reihe:

$$s' = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_n\delta + u_n\delta^2 + u_n\delta^3 + \cdots$$

eine Majorante der gegebenen Reihe:

$$s = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots \tag{2}$$

Nun ist s' konvergent, denn diese Reihe wird von dem Gliede u_n an eine geometrische Reihe, deren Exponent nach Voraussetzung ein echter Bruch sein soll. Daher nach [93 10]:

$$s' = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + \frac{u_n}{1-\delta};$$

also ist s erst recht konvergent und:

$$s < u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + \frac{u_n}{1-\delta},$$

oder:

$$s < s_{n-1} + \frac{u_n}{1-\delta}, \quad \text{oder} \quad s < s_n + \frac{u_n\delta}{1-\delta}. \tag{3}$$

Da andererseits nach [92 10]: $s > s_n$ ist, so hat das eben bewiesene Kriterium den Vorzug, daß es den Fehler abschätzen lehrt, welcher nach Abbrechen der Reihe bei einem beliebigen Glied u_n noch zu befürchten wäre. Denn er ist kleiner als

$$\frac{u_n\delta}{1-\delta}. \tag{4}$$

Als Beispiel nehme man die Reihe für e (§ 12):

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \cdots \text{ in inf.} \tag{5}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}; \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{1}{n+2}; \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} = \frac{1}{n+3} \cdots$$

Man darf daher setzen von irgend einem n an: $\delta = 1 : (n+1)$ und erhält nach (4) als Fehlergrenze, wenn man bei $1 : n!$ abbricht:

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Sie wird für $n = 10$:

$$\frac{1}{10 \cdot 10!} = \frac{1}{36288000} = 0{,}00000003\ldots,$$

d. h. wenn man sich auf 11 Glieder beschränkt, so ist der übrigbleibende Fehler etwa $= 3$ Einheiten der achten Dezimale hinter dem Komma, d. h. die Zahl e ist auf sieben Dezimalen hinter dem Komma genau bestimmt.

Bei der Berechnung wird man wegen der Abrundung jedes Glied auf acht Stellen berechnen.

1 =	1,000 000 00
1 : 1!	1,000 000 00
1 : 2!	0,500 000 00
1 : 3!	0,166 666 67
1 : 4!	0,041 666 67
1 : 5!	0,008 333 33
1 : 6!	0,001 388 89
1 : 7!	0,000 198 41
1 : 8!	0,000 024 80
1 : 9!	0,000 002 75
1 : 10!	0,000 000 28
e =	2,718 281 80

Die letzte Ziffer ist, wie eben bewiesen, des Restes wegen um etwa drei Einheiten zu klein. Außerdem haftet ihr noch wegen der Abrundungen eine Unsicherheit an, doch bleibt, wie eine leichte Schätzung derselben zeigt, doch die vorletzte Ziffer richtig. Auf zwölf Stellen hinter dem Komma genau ist:

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots \tag{6}$$

Das Konvergenzkriterium I. kann auch so ausgedrückt werden:
II. Eine absolute Reihe ist konvergent, wenn:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \tag{7}$$

ist. Denn offenbar drückt diese Ungleichung nur in anderen Worten dieselbe Bedingung aus wie in I.

Doch man verstehe recht. Es soll nicht etwa nur (für große Werte von n) $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, oder $u_{n+1} < u_n$, sondern es soll auch der limes dieses Bruches < 1 sein, was nicht dasselbe ist. In der Reihe [92 6] ist z. B. offenbar:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1; \quad \text{aber} \lim_{(n=\infty)} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2} = \lim_{(n=\infty)} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

Es war ja auch diese Reihe nicht konvergent, sondern divergent.

Dem Konvergenzkriterium II. entspricht das folgende Divergenzkriterium:

III. Eine absolute Reihe ist divergent, wenn

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \tag{8}$$

ist. Denn alsdann nehmen von einem bestimmten n an die Glieder ständig zu.

Zu II. und III. gehört als Ergänzung der Fall:

IV. Wenn

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \tag{9}$$

ist, so kann die Reihe konvergent, aber auch divergent sein. In der eben betrachteten Reihe [92 6] ist (9) erfüllt; sie war divergent. In der Reihe [93 7] ist (9) auch erfüllt, da:

$$\lim_{(n=\infty)} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{(n=\infty)} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^2 = 1$$

ist. Sie aber war konvergent. Die Bedingung (9) läßt also die Sachlage vorläufig unentschieden, d. h. vorbehaltlich etwaiger Neben- und Unterbedingungen zur Ausfüllung dieser Lücke. Man hat solche aufgestellt, doch liegt ihre Darlegung außerhalb der diesem Buch gesteckten Grenzen, was insofern ohne Belang ist, als in solchen Fällen die Konvergenz meist sehr schlecht ist, so schlecht, daß eine wirkliche Berechnung durch die betreffende Reihe doch nicht lohnen würde, ja zuweilen praktisch so gut wie ausgeschlossen ist. Wenn statt einer kleinen Anzahl hunderte oder tausende von Gliedern nötig sind für eine annehmbare Annäherung, dann mag man von ihrem limes, von ihrem Wert zu rein analytischen Zwecken Gebrauch machen; aber so wie sie ist, läßt sich aus ihr dieser Wert kaum berechnen.

95. Für algebraische Reihen, d. h. für Reihen, deren Glieder in beliebigem Wechsel positiv oder negativ sein können, gilt zu allererst das folgende Kriterium:

I. Eine algebraische Reihe:

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + \text{in inf.} \tag{1}$$

konvergiert, wenn die Reihe der absoluten Werte:

$$s' = |u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots \text{in inf.} \tag{2}$$

konvergiert. Man betrachte zu (1) und (2) irgend zwei entsprechende Reste

$$s_{n,m} = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}$$
$$s'_{n,m} = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+m}|.$$

Da $s_{n,m}$ und $s'_{n,m}$ vom Vorzeichen abgesehen die gleichen Glieder haben, diese aber in $s'_{n,m}$ sämtlich positiv sind, während sie in $s_{\varkappa,m}$ positiv und negativ sein können, so ist:

$$|s_{n,m}| \leqq s'_{n,m}.$$

Wenn s' konvergiert, ist nach [92]:

$$\lim_{(n=\infty)} s'_{n,m} = 0, \quad \text{also umsomehr:} \quad \lim s_{n,m} = 0,$$

d. h. s konvergiert ebenfalls. Außerdem ist offenbar:

$$|s| \leqq s',$$

da eine entsprechende Ungleichung für die Näherungssummen s_n und s'_n besteht, wie groß man auch n wählen mag.

Wäre das Kriterium I. umkehrbar, so wäre die Frage nach der Konvergenz algebraischer Reihen auf die Frage nach der Konvergenz absoluter Reihen vollständig zurückgeführt. Es ist aber nicht umkehrbar, wie sich alsbald zeigen wird.

II. Eine Reihe mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern:

$$s = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 \dots \text{ in inf.} \tag{3}$$

(u_0, u_1, u_2, $u_3 \dots$ sollen sämtlich positiv sein) konvergiert, wenn erstens die absoluten Werte mit n beständig abnehmen, also:

$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3 \dots \tag{4}$$

ist, und zweitens:

$$\lim_{(n=\infty)} u_n = 0 \tag{5}$$

ist. Man bilde die Näherungssummen:

$$s_0 = u_0,$$
$$s_2 = u_0 - u_1 + u_2 = u_0 - (u_1 - u_2) = (u_0 - u_1) + u_2,$$
$$s_4 = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4)$$
$$= (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + u_4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Sie nehmen beständig ab, da die eingeklammerten Differenzen nach (4) sämtlich positiv sind.

$$s_0 > s_2 > s_4 > s_6 \dots$$

Sie bleiben aber, wie die zweite Zusammenfassung lehrt, positiv. Folglich müssen sie einen limes haben. D. h. es existiert: $\lim s_{2n}$ (für $n = \infty$).

Desgleichen bilde man die Näherungssummen:

$$s_1 = u_0 - u_1$$
$$s_3 = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) = u_0 - (u_1 - u_2) - u_3$$
$$s_5 = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) = s_4 - u_5$$
$$= u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - u_5$$

. . . .

Sie nehmen beständig zu:

$$s_1 < s_3 < s_5 < s_7 \cdots.$$

Sie bleiben aber $< u_0$. Also existiert auch $\lim s_{2n+1}$ (für $n = \infty$).

Da aber $s_{2n+1} - s_{2n} = -u_{2n+1}$ ist, so folgt nach (5)

$$\lim_{(n=\infty)} s_{2n+1} = \lim_{(n=\infty)} s_{2n},$$

d. h. s ist konvergent.

Beispiel. Das Kriterium II. ist auf die Reihe:

$$s = \ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} \cdots \text{ in inf.}$$

anwendbar. Denn die Glieder sind abwechselnd positiv und negativ, ihre absoluten Werte nehmen beständig ab und werden zuletzt unendlich klein. Folglich ist Konvergenz vorhanden, die allerdings sehr schlecht ausfällt. (Der Wert von s wird später [210] ermittelt werden. Er ist $= \ln 2$).

Und die Reihe der absoluten Werte?

$$s' = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \cdots \text{ in inf.}$$

Sie ist nach [92] divergent! Also ist I. in der Tat nicht umkehrbar.

96. Unbedingte und bedingte Konvergenz. Das letzte Beispiel hat gezeigt, daß eine algebraische Reihe möglicherweise selbst dann konvergieren kann, wenn die Reihe der absoluten Wert divergiert (gegen ∞). Dieser Sachverhalt soll nun in helles Licht gesetzt werden.

Erste Erklärung. Eine unendliche Reihe heißt unbedingt konvergent bzw. unbedingt divergent, wenn sie bei jeder beliebigen Vertauschung der Glieder konvergent bzw. divergent bleibt.

Zweite Erklärung. Eine unendliche Reihe heißt bedingt konvergent oder auch bedingt divergent, wenn sie je nach Anordnung der Glieder konvergiert oder divergiert.

Hierzu sei noch näher bemerkt:

1. Mit der beliebigen Vertauschung steht es so. Gesetzt:

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots \text{ in inf.} \tag{1}$$
$$s' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{m-1} + v_m + \cdots \text{ in inf.} \tag{2}$$

seien zwei Reihen, bestehend aus denselben Gliedern, nur in verschiedener Anordnung, d. h. erstens: Jedes Glied u_n von (1) ist zugleich ein Glied v_m in (2) und umgekehrt. Aber auch zweitens: Wenn n endlich ist, so soll auch m endlich sein, d. h. jedes Glied, das in der einen Reihe einen endlichen Stellenzeiger hat, soll auch in der andern Reihe einen endlichen Stellenzeiger haben. Drittens: Wenn $\lim n = \infty$, so soll auch $\lim m = \infty$ sein und umgekehrt.

2. Da für endliche Reihen die Vertauschbarkeit oder Kommutativität ohne jede Einschränkung gilt, so wäre man wohl leicht geneigt, auch für unendliche Reihen das gleiche anzunehmen und die erste der beiden obigen Erklärungen als überflüssig, die zweite aber als gegenstandslos zu betrachten. Aber weder das eine, noch das andere wäre richtig, wie sich sogleich zeigen wird. Es gilt zunächst:

Erster Lehrsatz. Eine absolute Reihe ist entweder unbedingt konvergent oder unbedingt divergent. Im ersteren Falle ist die Summe von der Anordnung der Glieder unabhängig.

Beweis. Es sei (1) eine absolute und in der gewählten Anordnung konvergente Reihe. Man betrachte zu (1) irgend eine Näherungssumme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \tag{3}$$

suche in (2) diejenigen Stellenzeiger auf, welche den Stellenzeigern $0, 1, 2, \ldots n$ in (1) entsprechen und wähle den größten unter ihnen. Er ist mindestens $= n$, kann aber auch größer sein. Allgemein sei er $= n + q$. Man bilde nun zu (2) die Näherungssumme:

$$s'_{n+q} = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n+q}. \tag{4}$$

Da s'_{n+q} alle Glieder von s_n, vielleicht aber noch mehr enthält, so ist $s'_{n+q} \geqq s_n$. Nun suche man zu den Stellenzeigern $0, 1, 2, \ldots n + q$ in (2) die entsprechenden in (1) auf, wähle abermals den größten, der also mindestens $= n + q$ ist, vielleicht aber auch um r größer sein kann und bilde nun wieder zu (1) die Näherungssumme:

$$s_{n+q+r} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+q+r}. \tag{5}$$

Diese hat alle Glieder von s'_{n+q}, vielleicht aber noch mehr, also ist $s_{n+q+r} \geqq s'_{n+q}$, und wenn man beide Ungleichungen zusammenfaßt:

$$s_n \leqq s'_{n+q} \leqq s_{n+q+r}. \tag{6}$$

Hier kann n beliebig groß angenommen werden. Man setze $\lim n = \infty$, so wird nach Annahme $\lim s_n = \lim s_{n+q+r} = s$. Folglich muß auch $\lim s'_{n+q} = s$ sein, d. h. s' ist auch konvergent und $s' = s$.

Wäre aber (1) in der gewählten Anordnung divergent, so folgt aus dieser Betrachtung, daß auch (2) divergent sein muß. Denn wäre (2) etwa konvergent, so müßte ja, wie eben gezeigt, (1) ebenfalls konvergieren. Der Lehrsatz ist also erwiesen. Übrigens divergiert

eine unendliche absolute Reihe selbstverständlich gegen ∞, wenn sie überhaupt divergiert.

Zweiter Lehrsatz. Eine algebraische Reihe ist unbedingt konvergent, wenn die Reihe der absoluten Glieder konvergiert. Die Summe der algebraischen Reihe ist von der Anordnung der Glieder unabhängig.

Beweis. Es sei (1) eine algebraische Reihe und (2) eine andere aus ihr durch beliebige Vertauschung der Glieder entstandene Reihe. Man bilde die zugehörigen Reihen der absoluten Werte

$$\sigma = |u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots \text{ in inf.}, \tag{1'}$$

$$\sigma' = |v_0| + |v_1| + |v_2| + |v_3| + \cdots \text{ in inf.} \tag{2'}$$

Dann sind nach Voraussetzung und nach dem ersten Lehrsatz (1′) und (2′) konvergent und es ist $\sigma = \sigma'$. Nach I in [95] konvergieren also auch (1) und (2).

Die erste Behauptung ist bewiesen. Es bleibt also noch zu zeigen, daß $s = s'$ sein muß. Hierzu betrachte man wie im Beweis des ersten Lehrsatzes die Näherungswerte s_n und s'_{n+q}. Es enthält s'_{n+q} alle Glieder von s_n, aber möglicherweise noch mehr: Auf alle Fälle enthält die Differenz $s'_{n+q} - s_n$ nur Glieder des Restes:

$$s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots \text{ in inf.}$$

Folglich ist ganz sicher:

$$|s'_{n+q} - s_n| < |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \cdots \text{ in inf.},$$

oder auch: $|s'_{n+q} - s_n| < \sigma - \sigma_n$. Setzt man $\lim n = \infty$, so wird $\lim \sigma_n = \sigma$, also auch $\lim s'_{n+q} = \lim s_n$, d. h. $s' = s$, q. e. d.

Dritter Lehrsatz. Eine algebraische Reihe ist bedingt konvergent oder bedingt divergent, wenn erstens die Reihe der absoluten Werte divergiert (gegen ∞), wenn zweitens die Reihe der positiven Glieder divergiert (gegen $+\infty$), wenn drittens die Reihe der negativen Glieder divergiert (gegen $-\infty$) und wenn viertens $\lim u_n = 0$ wird für $\lim n = \infty$. Ferner: Für den Fall der Konvergenz kann man es so einrichten, daß die Reihe nach einem beliebig gegebenen positiven oder negativen Wert A konvergiert, und für den Fall der Divergenz kann man es so einrichten, daß die Reihe nach Belieben gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ divergiert oder überhaupt nur divergiert, z. B. oszilliert [90].

Beweis. Es sei (1) eine Reihe, welche die vier genannten Voraussetzungen erfüllt. Es seien:

$$+a_1, +a_2, +a_3, +a_4, \ldots \text{ in inf.} \tag{7}$$

die positiven Glieder von (1) und:

$$-b_1, -b_2, -b_3, -b_4, \ldots \text{ in inf.} \tag{8}$$

die negativen Glieder von (1). Dann soll sowohl:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \quad \text{als auch:} \quad b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

gegen ∞ divergieren. Aber es soll trotzdem sein $\lim a_n = \lim b_n = 0$ (vierte Voraussetzung).

Man nehme für A einen beliebigen, etwa positiven Wert an und addiere in (7) von a_1 anfangend in der angegebenen Folge soviel Glieder, daß A eben überschritten wird, was wegen der Divergenz von (7) immer möglich ist. Darauf füge man von (8) mit $-b_1$ anfangend auch in der angegebenen Folge soviel Glieder hinzu, daß man eben unter A bleibt, was wegen der Divergenz von (8) auch immer möglich ist. Dann füge man von den übrig gebliebenen Gliedern (7) mit dem ersten derselben anfangend soviel Glieder hinzu, daß A eben überschritten wird. Dann füge man von den übrig gebliebenen Gliedern (8) mit dem ersten derselben anfangend soviel Glieder hinzu, daß man eben unter A bleibt usw. usw. So kann man in inf. fortfahren, denn (7) und (8) sind divergent und bleiben auch nach Fortnahme beliebig vieler Glieder divergent. Andrerseits folgt aus der einzuhaltenden Bedingung „eben über A“ und „eben unter A“, daß man von A jedesmal um absolut weniger abweicht, als der absolute Wert des zuletzt genommenen positiven bzw. negativen Gliedes a oder b ausmacht. Da aber $\lim a_n = \lim b_n = 0$ ist, so heißt dies nichts anderes, als die Reihe konvergiert in der angegebenen Folge gegen den Wert A.

Ebenso leicht wäre nachweisbar, daß bei anderer Folge Divergenz erzielt werden könnte. Der Lehrsatz ist also vollständig bewiesen.

Vierter Lehrsatz. Eine algebraische Reihe divergiert unbedingt, wenn zwar die Reihe der absoluten Werte divergiert, aber entweder die Reihe der positiven oder die Reihe der negativen Glieder konvergiert.

Beweis. Es divergiere etwa (7), also konvergiere (8) zu irgend einem Wert $-r$. Man nehme n aufeinander folgende Glieder von (7) und wähle in (1) einen Index $n' = n + q$ so groß, daß die Näherungssumme s_{n+q} alle diese Glieder von (7) enthält. Sie kann außerdem noch beliebig viel Glieder von (8) enthalten; da deren Summe aber absolut kleiner als r ist, so folgt:

$$s_{n+q} > a_1 + a_2 + \cdots + a_n - r.$$

Damit ist die Divergenz dargetan, denn die Summe rechts, also auch s_{n+q}, wird mit n unendlich groß.

97. Bedingte Konvergenz ist also nach dem dritten Lehrsatz wirklich möglich. Er läßt sich übrigens umkehren, d. h. wenn eine Reihe nur bedingt konvergiert, also auch bedingt divergiert, so müssen die vier dort genannten Voraussetzungen erfüllt sein. Denn entweder

ist die Reihe absolut, dann gilt der erste Lehrsatz, also unbedingte Konvergenz oder unbedingte Divergenz. Oder die Reihe ist algebraisch. Dann kann entweder die Reihe der absoluten Werte konvergieren, dann gilt der zweite Lehrsatz, also unbedingte Konvergenz. Oder die Reihe der absoluten Werte divergiert. Dann muß mindestens eine der beiden Reihen (7) oder (8) divergieren. Divergiert die eine, konvergiert aber die andere, so gilt der vierte Lehrsatz, also unbedingte Divergenz. Divergieren aber beide und ist außerdem $\lim u_n = 0$, so gilt der dritte Lehrsatz, also bedingte Konvergenz oder bedingte Divergenz. (Wäre aber $\lim u_n \neq 0$, so könnte auch dann nur unbedingte Divergenz eintreten nach [95_5].)

98. Die Möglichkeit bedingter Konvergenz ist so auffallend, daß es wohl gut ist, sie an einem Beispiel wirklich zu zeigen. Es werde die Reihe

$$s = \ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} \cdots \text{ in inf.} \tag{1}$$

in [95] genommen. In [92] ist gezeigt, daß die absoluten Werte divergieren.

Ferner werden (7) und (8) in [96]

$$1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{9} \cdots \tag{2}$$

$$-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{10}, \ldots. \tag{3}$$

(3) ist divergent, weil ihre Glieder absolut halb so groß sind, wie die Glieder von (6) in [92]. Und (2) divergiert daher als Majorante von (3) ebenfalls. Ferner ist $\lim u_n = \lim \pm \frac{1}{n-1} = 0$. Also die Voraussetzungen des dritten Lehrsatzes in [96] sind sämtlich erfüllt.

Nun bilde man aus (2) und (3) folgende Reihe

$$t = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \cdots, \tag{4}$$

indem man anfängt mit dem ersten Glied von (2), dann zwei Glieder von (3) hinzusetzt, dann das zweite Glied von (2), dann das dritte und vierte Glied von (3) usw. usw. Man bilde die Näherungssummen

$$\begin{aligned}
t_2 &= 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = (1 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4},\\
t_5 &= t_2 + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8},\\
t_8 &= t_5 + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10}) - \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12},
\end{aligned}$$

und allgemein, nach immer sich gleichbleibender Umformung je dreier Glieder von (4) zu zwei Gliedern:

$$\begin{aligned}
t_{3n+2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdots + \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)}\\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right),
\end{aligned}$$

d. h. $t_{3n+2} = \frac{s_{2n+1}}{2}$, und wenn $\lim n = \infty$ gesetzt wird:

$$t = \frac{s}{2} = \frac{\ln 2}{2}, \tag{5}$$

d. h. der Wert der Reihe (4) ist halb so groß wie der Wert der Reihe (1), obgleich beide Reihen dieselben Glieder enthalten, nur in anderer Reihenfolge. (Der naheliegende Einwand, daß in (4) positive Glieder „ausgelassen“ werden, ist hinfällig, denn er kann nur erhoben werden im Vergleich zu (1), und auch hier nur dann, wenn man an eine endliche Anzahl von Gliedern denkt. Wenn man aber unbegrenzt fortschreitet, dann wird kein einziges Glied „ausgelassen“, vielmehr findet sich jedes Glied von (1) in (4) und jedes Glied von (4) in (1), nur eben an anderer Stelle.)

99. Zu der Unterscheidung zwischen unbedingter und bedingter Konvergenz sei noch nachgetragen:

Erstens. Bei bedingter Konvergenz fällt selbstverständlich mit der unbeschränkten Herrschaft des kommutativen auch die des assoziativen Gesetzes. Nur bei unbedingter Konvergenz gibt die Summe zweier Reihen, deren Glieder zusammen die Glieder einer dritten Reihe bilden, auch unbedingt die Summe dieser dritten Reihe. Oder kurz: Nur bei unbedingter Konvergenz kann man mit unendlichen Reihen so umgehen, wie mit endlichen Reihen oder Summen. Nur sie haben eine Summe „schlechthin“.

Zweitens. Wenn auch die beiden Gesetze bei bedingter Konvergenz ihre unbeschränkte Geltung verlieren, so bleiben sie doch in sehr weitem, immerhin aber in beschränktem Sinne richtig. So darf z. B. eine endliche Anzahl von Gliedern mit endlichem Stellenzeiger auch bei bedingter Konvergenz beliebig vertauscht werden; setzt sich aber der Wechsel in das Unendliche fort, wie in dem Beispiel [98], dann allerdings wird das kommutative Gesetz falsch.

Drittens. Die Unterscheidung zwischen bedingter und unbedingter Konvergenz läßt sich auch auf andere unendliche Ausdrücke übertragen, wenn die Operationen, so lange ihre Zahl endlich ist, sich beliebig vertauschen lassen. Insbesondere gilt dies für die unendlichen Produkte, welche überhaupt hinsichtlich der Konvergenzkriterien ganz genau so behandelt werden können, wie die unendlichen Reihen.

Viertens. Es gibt noch andere Einteilungen der Konvergenz außer der in bedingte und in unbedingte. Von schlechter und guter oder schneller und langsamer Konvergenz ist schon die Rede gewesen. Ihre Bedeutung ist ja auch selbstverständlich. Man hat aber auch noch gleichförmige und ungleichförmige Konvergenz und andere feinere Unterscheidungen eingeführt, welche bei tieferem Eingehen in die Konvergenzkriterien hervortreten.

100. Unendliche Doppelreihen und mehrfache Reihen. Gesetzt das allgemeine Glied habe zwei Indizes a und b und man beabsichtige, sowohl a, als auch b die Werte 0, 1, 2, 3, ... in inf. zu geben, so entsteht eine unendliche Doppelreihe [7]:

$$s = \sum_a \sum_b u_{a,b}, \tag{1}$$

über deren Konvergenz oder Divergenz zu entscheiden wäre. Dabei werde angenommen, daß man die Glieder von (1) trotz ihrer zwei Indizes auch irgendwie in eine einfache Reihe geordnet habe unter Innehaltung der folgenden Vorschriften, die mit Leichtigkeit auch auf dreifach, vierfach usw. unendliche Reihen übertragen werden können:

Erstens. In der gewählten Ordnung soll irgend ein Glied von (1) an endlicher Stelle stehen, wenn a und b selbst endlich sind und umgekehrt.

Zweitens. Wenn a oder b oder beide unendlich groß werden, so soll das betreffende Glied in der gewählten Ordnung ebenfalls einen unendlich großen Stellenzeiger erhalten (vgl. die Bedingungen in [96]).

Hierher gehört z. B. die viel gebrauchte [110] „diagonale" Anordnung:

$$u_{00} + (u_{01} + u_{10}) + (u_{02} + u_{11} + u_{20}) + (u_{03} + u_{12} + u_{21} + u_{30}) + \cdots,$$

welche entsteht, wenn man die Doppelreihe zunächst in eine Reihe von Reihen:

$$\begin{array}{ccccc} u_{00}, & u_{01}, & u_{02}, & u_{03}, & \cdots \\ u_{10}, & u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & \cdots \\ u_{20}, & u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & \cdots \\ u_{30}, & u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

auflöst und dann den schrägen Strichen entsprechend eine einfache Reihe bildet.

Auch für absolute Doppelreihen (oder allgemein absolute mehrfache Reihen), sowie für algebraische Doppelreihen, wenn die absoluten Werte der Glieder konvergieren, gilt das kommutative und das assoziative Gesetz ohne jede Einschränkung. Wenn eine solche Reihe bei einer Anordnung konvergiert, so konvergiert sie auch bei jeder anderen und die Summe s ist von der Anordnung unabhängig, also die Summe „schlechthin". Wenn man die Glieder von s in zwei Doppelreihen s' und s'' auseinander bringt, so konvergieren auch s' und s'' und es ist $s = s' + s''$.

Der Beweis folgt unmittelbar aus [96], da ja eine Doppelreihe trotz der beiden Indizes in eine einfache Reihe umgeformt werden kann wie oben gezeigt.

Ist aber die Reihe der absoluten Werte divergent, so kann die Reihe selbst nur bedingt konvergieren, wie in [96] gezeigt worden ist.

101. Das distributive Gesetz bei unendlichen Reihen. Für unbedingt konvergente Reihen, ob einfach oder mehrfach unendlich, gilt auch das distributive Prinzip [3] beim Multiplizieren ohne jede Einschränkung. Sind z. B.

$$\alpha)\quad s = \sum_a u_a; \qquad \beta)\quad s' = \sum_b v_b, \quad (a, b = 0, 1, 2 \ldots \text{in inf.}) \tag{1}$$

zwei unbedingt konvergente Reihen, so ist auch die Reihe:

$$s'' = \sum_a \sum_b u_a \cdot v_b \tag{2}$$

unbedingt konvergent und ihr Wert ist:

$$s'' = s \cdot s'. \tag{3}$$

Beweis: Die Reihen s und s' seien sunächst absolut. Man nehme eine Näherungssumme von (1α) und eine von (1β)

$$\alpha)\quad s_m = u_0 + u_1 + \cdots + u_m; \qquad \beta)\quad s_n' = v_0 + v_1 + v_2 \cdots + v_n \tag{4}$$

und multipliziere diese, da sie geschlossene Summen sind, nach dem distributiven Gesetz aus. Man erhält:

$$s_m \cdot s_n' = \sum_a \sum_b u_a v_b \qquad \begin{pmatrix} a = 0, 1, 2 \ldots m \\ b = 0, 1, 2 \ldots n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Darauf nehme man eine Näherungsreihe s_p'' von (2), nach Verwandlung in eine einfache Reihe [100], wähle aber p so groß, daß in ihr alle Glieder von (5) enthalten sind. Dann ist:

$$s_m \cdot s_n' \leqq s_p''. \tag{6}$$

Nun suche man die größten Werte auf, welche a und b in s_p'' haben; sie mögen q und r heißen. Man bilde alsdann s_q und s_r' und ganz wie in (5)

$$s_q \cdot s_r' = \sum_a \sum_b u_a u_b \qquad \begin{pmatrix} a = 0, 1, 2 \ldots q \\ b = 0, 1, 2 \ldots r \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Da (7) sicherlich alle Glieder von s_p'' enthält, so ist:

$$s_p'' \leqq s_q \cdot s_r'. \tag{8}$$

Nach (7) und (8) ist s_p'' in zwei Grenzen eingeschlossen. Man kann m und n, also auch p, q und r beliebig groß machen. Setzt man $\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$, so wird:

$$\lim s_m = \lim s_q = s, \quad \lim s_n' = \lim s_r' = s',$$

also nach (6) und (8)

$$\lim s_p'' = s \cdot s', \quad \text{d. h.} \quad s'' = s \cdot s', \quad \text{w. z. b. w.}$$

Sind die Reihen zwar unbedingt konvergent, aber nicht absolut, so übertrage man diesen Beweis wie in [96]. Man wird auch dann das distributive Gesetz ohne Einschränkung bestätigt finden. Bei bedingt konvergenten Reihen dagegen muß es sich entsprechende Einschränkungen gefallen lassen, gleich dem kommutativen und dem assoziativen Gesetz.

102. Potenzreihen. Eine Reihe von der Form:

$$s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \text{ in inf.} \tag{1}$$

in der die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n \cdots$ beliebig gegebene Werte haben sollen, nennt man, als Funktion von x betrachtet, eine Potenzreihe. Ist ein Koeffizient $= 0$, so kann das entsprechende Glied fortbleiben, wie auch umgekehrt ein solches Glied, falls es fehlen sollte, als mit dem Koeffizienten 0 behaftet, hinzugefügt werden darf. Formel (1) ist daher kürzer:

$$s = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} a_\lambda x^\lambda. \tag{2}$$

Solche Potenzreihen sind in der höheren Analysis so wichtig (§ 25), daß es angezeigt ist, die ihnen eigentümlichen Konvergenzkriterien abzuleiten. Für einen besonderen Fall, der alsbald allen anderen Fällen zugrunde gelegt werden wird, ist dies schon geschehen, nämlich für die geometrische unendliche Reihe [93],

$$s_1 = 1 + x + x^2 + \cdots \text{ in inf.}, \tag{3}$$

welche konvergiert, und zwar unbedingt, wenn $|x| < 1$ ist, aber divergiert, wenn $|x| = 1$ und $|x| > 1$ ist. Es ist:

$$s_1 = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1). \tag{4}$$

Hierauf gründet sich der folgende allgemeine Hilfssatz.

Bleiben für einen bestimmten Wert von $|x|$, etwa für den Wert $|\xi|$, die absoluten Werte aller Glieder einer Potenzreihe (1) unter einem angebbaren endlichen, sonst aber beliebigen Wert A, so konvergiert (1), und zwar unbedingt, für alle Werte von x, welche zwischen $+\xi$ und $-\xi$ liegen.

Beweis. Man halte sich zunächst an die Reihe der absoluten Werte von (1):

$$s' = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots.$$

Nach Voraussetzung soll für jeden Wert von n sein:

$$|a_n \xi^n| < A; \quad \text{also:} \quad |a_n| < \frac{A}{\xi^n},$$

folglich ist die Reihe:

$$s'' = A + A\left(\frac{x}{\xi}\right) + A\left(\frac{x}{\xi}\right)^2 + A\left(\frac{x}{\xi}\right)^3 + \cdots$$

eine Majorante von s'. Nun konvergiert s'' als geometrische Reihe unbedingt, wenn

$$\left|\frac{x}{\xi}\right| < 1, \quad \text{oder} \quad |x| < |\xi|$$

ist. Also konvergiert s', mithin auch s unter gleicher Voraussetzung erst recht und zwar auch unbedingt.

Aus dem eben abgeleiteten Hilfssatz ergibt sich sofort:

Erstens. Konvergiert eine Potenzreihe, sei es bedingt, sei es unbedingt, für irgend einen Wert von x, so konvergiert sie auch und zwar unbedingt für jeden absolut kleineren Wert von x. Denn, wenn eine Reihe konvergiert, so sind alle ihre Glieder selbstverständlich endlich, was auf dasselbe hinauskommt, als ob man sagen würde, daß ihre absoluten Werte alle unter einer endlichen Grenze A bleiben.

Zweitens. Wenn eine Potenzreihe für irgend einen Wert von x divergiert, so divergiert sie auch für jeden absolut größeren Wert von x. Denn konvergierte sie auch nur für einen einzigen der letzteren, so müßte sie auch für den ersteren als den absolut kleineren konvergieren.

Beides läßt sich zu dem folgenden wichtigen Kriterium verschmelzen.

Jede Potenzreihe hat einen Spielraum für die Veränderliche x, innerhalb dessen sie (die Reihe) konvergiert. Dieser Spielraum wird begrenzt durch zwei entgegengesetzt gleiche Zahlen, die $+X$ und $-X$ heißen mögen. Ist:

$|x| < |X|$, so konvergiert die Reihe und zwar unbedingt; ist aber $|x| > |X|$, so divergiert die Reihe.

Der Spielraum der Konvergenz wird also durch $|X|$ bestimmt. Wie groß aber $|X|$ ist, muß in jedem Fall besonders entschieden werden, denn es kann alle Möglichkeiten geben von $|X| = 0$, bis $|X| = \infty$.

Erstes Beispiel.

$$s = 1 + 1!\,x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \cdots + n!\,x^n + \cdots \text{ in inf.}$$

Man wende das Kriterium II [94] an und bilde:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = |(n+1)x|.$$

Wie klein auch $|x|$ sein mag, (nur nicht $x = 0$), zuletzt ist:

$$\lim_{(n=\infty)} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty,$$

also Divergenz. Die Reihe konvergiert nur für $x = 0$, der Spielraum der Konvergenz ist zu einem Punkt, dem Nullpunkt, zusammengeschrumpft. Es ist $|X| = 0$.

Zweites Beispiel:

$$s = 1 + x + x^2 + \cdots \text{ in inf.}$$

Hier ist, wie bereits in [93] gezeigt $|X| = 1$. Denn die Reihe divergiert für $|x| > 1$ und konvergiert für $|x| < 1$.

Drittes Beispiel.

$$s = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \text{ in inf.}$$

Hier ist

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right|.$$

Wie groß auch $|x|$ sein mag (nur nicht $|x| = \infty$), zuletzt wird:

$$\lim_{(n=\infty)} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

Die Reihe konvergiert also für jeden (endlichen) Wert von x. Der Spielraum wird unendlich groß. Es ist $|X| = \infty$.

103. Konvergenz und Divergenz einer Potenzreihe an den Grenzen des Spielraums. Innerhalb des Spielraums von $+X$ bis $-X$ konvergiert also die Reihe und zwar unbedingt. Außerhalb des Spielraumes divergiert sie. Aber an den Grenzen selbst, also für $x = +X$, $x = -X$, wie steht es da um Konvergenz und Divergenz?

Zunächst ist hierüber zu sagen: Konvergiert die Reihe für eine der beiden Grenzen unbedingt, so konvergiert sie auch für die andere unbedingt, weil bei Wechsel des Vorzeichens von x zwar auch die ungeraden Potenzen von x ihr Vorzeichen wechseln, aber doch die absoluten Werte aller Potenzen unverändert bleiben. Die Anzahl der Möglichkeiten wird somit auf vier herabgedrückt, nämlich:

I. Die Reihe divergiert an beiden Grenzen.

II. Die Reihe konvergiert an beiden Grenzen unbedingt.

III. Die Reihe konvergiert an beiden Grenzen bedingt.

IV. Die Reihe konvergiert bedingt an der einen Grenze und divergiert an der anderen Grenze.

Beispiel für Fall I.

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \text{ in inf.}$$

Hier ist $|X| = 1$. Die Reihe divergiert für $x = +1$ und $x = -1$. Für $x = +1$ divergiert sie gegen $+\infty$, für $x = -1$ oszilliert sie [90]:

Beispiel für Fall II.

$$s = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

Um zu allererst X zu finden, wende man das Kriterium II [94] an. Es ist:

$$\lim_{(n=\infty)} \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{x^n}{n^2} \right| = \left| \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \right| = |x| .$$

Es folgt: $|X| = 1$. Setzt man erst $x = +1$, dann $x = -1$, so ergibt sich:

$$s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

$$s = -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots$$

Beide Reihen konvergieren unbedingt [93 7].

Beispiel für Fall III.

$$s = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} + \cdots.$$

Hier ist:

$$\lim_{(n=\infty)} \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \frac{n}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{1 + \frac{1}{n}} \right| = |x|.$$

Also ist $|X| = 1$. Für $x = +1$ und $x = -1$ erhält man:

$$s = \quad 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \cdots$$

$$s = -1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \cdots.$$

Beide Reihen sind konvergent, wie das Kriterium II [95] zeigt, wenn man je zwei aufeinanderfolgende positive und negative Glieder zu einem Glied zusammenzieht. Aber die Konvergenz ist bedingt, da die Reihe der absoluten Werte divergiert [92 6].

Beispiel für Fall IV.

$$s = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Auch hier ist $|X| = 1$. Für $x = +1$ und $x = -1$ erhält man:

$$s = +1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots$$

$$s = -1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \cdots.$$

Die erste Reihe ist bedingt konvergent, die zweite ist divergent.

104. Für spätere Anwendungen sei der folgende Satz vorweggenommen. Die drei Reihen:[1])

$$
\begin{aligned}
s &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\
s' &= a_1 + 2 a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \\
s'' &= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots
\end{aligned}
$$

haben einerlei Spielraum der Konvergenz.

Beweis. Es bezeichne:

$$-X < x < +X$$

den Spielraum der Konvergenz für s. Man führe außer x einen zweiten Wert ξ innerhalb dieses Spielraums ein, setze aber $|\xi| < |X|$. Dann ist s auch unbedingt konvergent, wenn x durch ξ ersetzt wird, also bleiben auch nach dieser Ersetzung die Glieder von s sämtlich endlich. Mithin gibt es einen endlichen absoluten Wert A, so daß für jedes n:

$$|a_n \xi^n| < A, \quad \text{also} \quad |a_n x^n| < \left| A \left(\frac{x}{\xi}\right)^n \right|.$$

Mithin sind die drei Reihen:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= A + \left| A\left(\frac{x}{\xi}\right)\right| + \left| A\left(\frac{x}{\xi}\right)^2\right| + \left| A\left(\frac{x}{\xi}\right)^3\right| + \cdots \\
s_1' &= A + \left| 2A\left(\frac{x}{\xi}\right)\right| + \left| 3A\left(\frac{x}{\xi}\right)^2\right| + \cdots \\
s_1'' &= \left| A\left(\frac{x}{\xi}\right)\right| + \frac{\left| A\left(\frac{x}{\xi}\right)^2\right|}{2} + \frac{\left| A\left(\frac{x}{\xi}\right)^3\right|}{3} + \frac{\left| A\left(\frac{x}{\xi}\right)^4\right|}{4} + \cdots .
\end{aligned}
$$

Majoranten von s, s', s''. Alle drei Majoranten konvergieren unbedingt, wenn $|x| < |\xi|$ ist, wie die Kriterien in (94) ergeben. Also konvergieren unter gleicher Voraussetzung auch s, s', s'' unbedingt. Die Spielräume der Konvergenz von s' und s'' sind also sicherlich nicht kleiner als der Spielraum der Konvergenz von s. Ebenso läßt sich zeigen, daß sie nicht größer sind. Mithin sind die drei Spielräume einander gleich.

105. Doppelte unendliche Potenzreihen:

$$s = \sum_m \sum_n a_{m,n} x^m y^n$$

schreiten nach ganzen Potenzen zweier Veränderlichen x und y fort. Über ihre Konvergenz gilt zunächst ein Satz, welcher ganz dem Hilfssatz in [102] entspricht, nämlich:

1) Es ist s' die abgeleitete Funktion [116] und s'' die Integralfunktion von s.

Bleiben die absoluten Werte der Glieder sämtlich unterhalb eines beliebigen Wertes A, wenn statt x und y zwei gegebene Zahlen ξ und η gesetzt werden, so konvergiert die Reihe und zwar unbedingt für alle Werte von x und y, welche den Ungleichungen

$$|x| < |\xi|, \quad |y| < |\eta|$$

genügen.

Beweis. Nach Voraussetzung soll sein für jeden Wert von m und n, also auch für $\lim m = \infty$ und $\lim n = \infty$

$$|a_{m,n}\xi^m\eta^n| < A; \quad \text{also auch:} \quad |a_{m,n}x^m y^n| < \left| A\left(\frac{x}{\xi}\right)^m\left(\frac{y}{\eta}\right)^n\right|,$$

folglich ist

$$s' = \sum_m \sum_n \left| A\left(\frac{x}{\xi}\right)^m\left(\frac{y}{\eta}\right)^n\right|$$

eine Majorante von s. Diese Majorante aber entsteht durch Multiplikation der beiden geometrischen Reihen

$$\sum_m A\left(\frac{x}{\xi}\right)^m = A\sum_m\left(\frac{x}{\xi}\right)^m \quad \text{und} \quad \sum_n\left(\frac{y}{\eta}\right)^n,$$

welche unbedingt konvergieren, wenn:

$$|x| < |\xi| \quad \text{und} \quad |y| < |\eta|$$

ist. Mithin konvergiert auch s', also auch die Minorante s unter gleicher Voraussetzung.

Aus dem eben bewiesenen Konvergenzkriterium ergibt sich bei geometrischer Ausdrucksweise für das Konvergenzgebiet einer doppeltunendlichen Potenzreihe ein in sich einfach zusammenhängender Teil der unendlichen xyEbene, welcher symmetrisch zur x- und y-Achse liegt. Wie weit es sich wirklich erstreckt, muß von Fall zu Fall entschieden werden, wie in den folgenden Beispielen:

Beispiel I. Es sei $a_{m,n} = m!n!$, also:

$$s = \sum_m \sum_n m!n!x^m y^n.$$

Diese Reihe entsteht durch Ausmultiplizieren der beiden Reihen

$$s_1 = \sum_m m!x^m, \quad s_2 = \sum_n n!y^n,$$

von denen die erste nur für $x = 0$ und die zweite nur für $y = 0$ konvergiert. Mithin beschränkt sich das Konvergenzgebiet auf den Anfangspunkt $O(0, 0)$.

Beispiel II. Es sei $a_{m,n} = 1$ für jedes m und n, also:

$$s = \sum_m \sum_n x^m y^n.$$

Diese Reihe entsteht durch Ausmultiplizieren der beiden geometrischen Reihen:

$$s_1 = \sum_m x^m, \quad s_2 = \sum_n y^n,$$

welche konvergieren wenn $|x| < 1$ und $|y| < 1$ ist, dagegen divergieren, wenn $|x| > 1$, $|y| > 1$ ist. Mithin ist das Konvergenzgebiet für die Doppelreihe ein Quadrat, dessen vier Ecken sind:

$$(+1, +1); (+1, -1); (-1, +1); (-1, -1).$$

Beispiel III. Es sei $a_{m,n} = \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{n!}$, also:

$$s = \sum_m \sum_n \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}.$$

Diese Reihe entsteht durch Ausmultiplizieren der beiden Reihen:

$$s_1 = \sum_m \frac{x^m}{m!}, \quad s_2 = \sum_n \frac{y^n}{n!},$$

welche für alle endlichen Werte von x und y konvergieren [102]. Das Konvergenzgebiet für die Doppelreihe ist daher unbeschränkt.

Beispiel IV. Es sei $a_{m,n} = \frac{1}{n!}$, also:

$$s = \sum_m \sum_n x^m \frac{y^n}{n!}.$$

Diese Reihe entsteht durch Ausmultiplizieren der beiden Reihen:

$$s_1 = \sum_m x^m, \quad s_2 = \sum_n \frac{y^n}{n!},$$

von denen die zweite für jeden Wert von $|y|$, die erste aber nur für $|x| < 1$ konvergiert. Mithin ist das Konvergenzgebiet der Doppelreihe ein Streifen der xy-Ebene, welcher durch zwei Parallelen zur y-Achse im Abstande $+1$ und -1 begrenzt wird.

Beispiel V. Es sei:

$a_{m,n} = 0$, wenn n ungerade ist,

$a_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$, wenn $n = 0$ oder durch 4 teilbar ist,

$a_{m,n} = -\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$, wenn n durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist.

Die Reihe wird bei diagonaler Anordnung:

$$s = 1 + x + (x^2 - y^2) + (x^3 - 3xy^2) + (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \cdots.$$

Sie ist konvergent, wenn $x^2 + y^2 < 1$, divergent, wenn $x^2 + y^2 > 1$ ist. Beweis in [224]. Mithin ist das Konvergenzgebiet die Innen-

fläche eines Kreises um den Anfangspunkt als Mittelpunkt mit dem Radius 1.

Diese fünf Beispiele sind so gewählt, daß das Konvergenzgebiet recht einfach war. Innerhalb desselben ist Konvergenz, und zwar unbedingt, außerhalb ist Divergenz. An den Grenzen selbst kann ganz wie in [103] Konvergenz oder Divergenz sein oder auch teils Konvergenz, teils Divergenz.

Übungen zu § 11.

1. Die beiden unendlichen Reihen:

$$s_0 = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cdots \text{ in inf.},$$
$$s_1 = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \cdots \text{ in inf.}$$

sind divergent für jeden Wert von x. Nur für s_1 machen die Vielfachen von π, also $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ eine Ausnahme.

2. Die beiden Reihen:

$$s_0 = \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{4} + \cdots \text{ in inf.}$$
$$s_1 = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \cdots \text{ in inf.}$$

sind konvergent für jeden Wert von x. Nur für s_0 machen die Vielfachen von 2π, also $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ eine Ausnahme.

3. Die absolute Reihe:

$$s = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots \text{ in inf.},$$

in welcher k ein beliebiger Exponent sein soll, divergiert, wenn $k \leqq 1$ ist und konvergiert, wenn $k > 1$ ist.

4. Die Reihe:

$$s = (1 - x) + (1 - x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) + (1 - x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \cdots$$

divergiert, wenn x ein positiver echter Bruch ist.

§ 12. Die Zahl e und die Potenzreihe für e^x.

106. Die Hauptergebnisse dieses Paragraphen beruhen auf eingehenden und mit äußerster Genauigkeit geführten limes-Betrachtungen, welche sich an den Ausdruck:

$$F(x, n) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{1}$$

anknüpfen lassen, wenn x als beliebig gegeben gilt und $|n|$ unbegrenzt wächst. Daß es sich dabei um limes-Rechnungen im eigentlichen Sinne [88] handeln wird, zeigt der unbestimmte Ausdruck 1^∞, welchen

man erhalten würde, wenn man sich einfallen ließe, für n unmittelbar seinen Grenzwert, nämlich ∞ zu setzen. Es fragt sich, ob es möglich ist, diese unbestimmte Form irgendwie in eine bestimmte Form zu verwandeln.

Es sei n vorläufig irgendeine positive ganze Zahl. Dann gibt der binomische Lehrsatz [19 5], wenn dort $x:n$ statt x gesetzt wird, sofort einen Ansatz. Man erhält:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{x}{n}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots + \binom{n}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^n. \quad (2)$$

Das zweite, dritte, vierte, ... Glied sind:

$$\binom{n}{1}\frac{x}{n} = \frac{n}{1}\cdot\frac{x}{n} = \frac{1}{1!}x,$$

$$\binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} = \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{x^2}{n^2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{2!}x^2,$$

$$\binom{n}{3}\frac{x^3}{n^3} = \frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{x^3}{n^3} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}x^3$$

usw. Also wird:

$$F(x,n) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!}x^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)}{p!}x^p + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}x^n \quad (3)$$

und diese Formel werde der nun folgenden limes-Rechnung zugrunde gelegt.

107. Zunächst werde x als positiv, sonst aber beliebig angenommen. Dann sind in [106 3] rechts alle Glieder positiv. Die beiden ersten sind von n unabhängig; die übrigen wachsen offenbar, wenn n (das vorläufig positiv und ganz sein sollte) wächst, weil die Faktoren:

$$1-\frac{1}{n},\quad 1-\frac{2}{n},\quad 1-\frac{3}{n},\ \cdots \quad (1)$$

wachsen. Außerdem tritt, wenn n um eine Einheit wächst, jedesmal ein Glied neu hinzu. Daher:

Ist x positiv und n positiv und ganz, so wächst $F(x, n)$, wenn n wächst, (was ja a priori durchaus nicht sicher war, da zwar dann der Exponent wächst, aber die Basis abnimmt).

Andererseits indessen ist jeder der Faktoren (1) < 1. Würde man statt ihrer in (3) überall 1 setzen und außerdem die so entstehende Reihe unbegrenzt fortsetzen in die für alle Werte von x konvergente Potenzreihe (vgl. [102]):

$$A = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \text{ in inf.,} \tag{2}$$

so folgt daher, wie groß auch n sei:

$$F(x, n) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < A. \tag{3}$$

Also: Wenn x positiv ist, so hat der Ausdruck einen limes. Sein Wert ist entweder $= A$ oder er ist $< A$.

Er ist $= A$, wie jetzt zu zeigen ist. Man breche [106 3] bei dem $p + 1^{\text{ten}}$ Gliede ab $(p < n)$ und erwäge außerdem, daß der letzte Zähler offenbar der kleinste ist. Daher, wenn man alle andern Zähler durch diesen ersetzt denkt, ihn absondert und die so entstehende $(p + 1)^{\text{te}}$ Näherungssumme von (2) mit:

$$A_p = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^p}{p!} \tag{4}$$

bezeichnet, so ist unzweifelhaft:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > A_p \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right). \tag{5}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung bedarf einer Umformung. Es ist:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{1 \cdot 2}{n^2} > 1 - \frac{1+2}{n},$$

also:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) > \left(1 - \frac{1+2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right),$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) > 1 - \frac{1+2+3}{n} + \frac{(1+2) \cdot 3}{n^2}$$

also erst recht:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) > 1 - \frac{1+2+3}{n},$$

fährt man so fort, so folgt allgemein:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) > 1 - \frac{1+2+3+\cdots+(p-1)}{n}$$

oder nach [27 1]:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) > 1 - \frac{p(p-1)}{2n}.$$

Die Ungleichung (5) zieht daher die Ungleichung:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > A_p \left(1 - \frac{p(p-1)}{2n}\right) \tag{6}$$

nach sich. Und nun eilt die limes-Rechnung ihrem Ende entgegen. Es sollte $p < n$ und $\lim n = \infty$ sein. Man nehme an, daß auch $\lim p = \infty$ sei, aber von einer um so viel kleineren Ordnung als n,

daß n von höherer als der zweiten Ordnung werde, verglichen mit p. Dann wird einerseits $\lim A_p = A$, da A_p eine Näherungssumme von (2) ist, und andererseits:

$$\lim_{(n=\infty,\ p=\infty)} \frac{p\cdot(p-1)}{2n} = 0.$$

Nach (3) und (6) ist der betreffende Ausdruck in zwei Grenzen eingeschlossen. Die eine ist A, die andere wird A, wie eben gezeigt, d. h. es ist:

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = A = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \text{ in inf.} \tag{7}$$

Um (7), das erst für positive x bewiesen ist, auf negative x auszudehnen, denke man sich die rechte Seite von [106 3] durch Hinzufügung der Glieder $0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots$ in eine unendliche Reihe verwandelt. Dann ist, wie gezeigt, der absolute Wert jedes ihrer Glieder kleiner als der absolute Wert des entsprechenden Gliedes in der Reihe [107 2] für A. Nach (7) ist andererseits der Unterschied beider Reihen unendlich klein, wenn n unendlich groß und x positiv ist. Da aber alsdann beide Reihen nur positive Glieder (einschließlich 0, wie eben erklärt) besitzen, so muß die absolute Summe der Unterschiede entsprechender Glieder unendlich klein sein. Um so mehr muß es mit der algebraischen Summe dieser Unterschiede der Fall sein, welche entsteht, wenn x negativ ist, also in beiden Reihen die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, d. h. es ist auch für negative Werte von x:

$$\lim_{(n=\infty)}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - A\right) = 0, \quad \text{oder} \quad \lim_{(n=\infty)}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = A.$$

Wäre endlich $x = 0$, so würde einerseits $A = 1$, andrerseits, wie groß auch n ist:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1$$

sein. Mithin gilt (7) für alle (endlichen) algebraischen Werte von x.

108. Doch die Gleichung [107 7] bedarf noch einer zweiten Erweiterung. Bisher wurde n als absolute ganze Zahl vorausgesetzt. Jetzt möge n eine beliebige positive Zahl sein, die in stetiger Weise unbegrenzt wächst.

Selbstverständlich muß dann der erweiterte Potenzbegriff zugrunde gelegt werden. Da sei daran erinnert, daß alsdann Basis und Potenz nur positiv sein sollen [40], daß ferner die Potenz wächst, wenn die Basis wächst, daß drittens die Potenz mit wachsenden Exponenten zu- oder abnimmt, je nachdem die Basis größer oder kleiner als 1 ist und daß viertens die Potenz eine stetige Funktion sowohl der Basis als des Exponenten ist.

Wenn n keine ganze Zahl ist, so muß n doch zwischen zwei ganzen Zahlen, etwa m und $m+1$ liegen. Es sei zunächst wieder $x > 0$. Setzt man dann in:

$$F(x, n) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{1}$$

im Exponenten $m+1$ statt n und in der Basis m statt n, so wird aus beiden Gründen die Potenz vergrößert. Setzt man aber umgekehrt im Exponenten m statt n und in der Basis $m+1$ statt n, so wird aus beiden Gründen die Potenz verkleinert. Also ist:

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m+1} > \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{x}{m+1}\right)^m, [x > 0, m < n < m+1]. \tag{2}$$

Ist $\lim n = \infty$, so ist auch $\lim m = \infty$ und umgekehrt. Es ergibt sich erstens:

$$\lim_{(m=\infty)} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m+1} = \lim_{(m=\infty)} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \cdot \lim_{(m=\infty)} \left(1 + \frac{x}{m}\right) = A.$$

Denn der erste Faktor ist A nach [107 7], (da m eine ganze Zahl sein soll), der zweite ist $= 1$. Und zweitens:

$$\lim_{(m=\infty)} \left(1 + \frac{x}{m+1}\right)^m = \lim_{(m=\infty)} \left(1 + \frac{x}{m+1}\right)^{m+1} : \lim_{(m=\infty)} \left(1 + \frac{x}{m+1}\right) = A.$$

Denn der Dividendus ist A, nach [107 7], da $m+1$ eine ganze Zahl sein soll, der Divisor ist $= 1$. Nach (2) ist also (1) in zwei Grenzen eingeschlossen, welche beide A zum limes haben, d. h. die Gleichung [107 7] ist auch nach der eben vorgenommenen Erweiterung richtig, wenn x positiv ist.

Ist aber x negativ, so leite man an Stelle der Ungleichungen (2) ebenso die Ungleichungen:

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m+1} < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{m+1}\right)^m, [x < 0, (m < n < m+1)]$$

und berücksichtige ebenso, daß beide Grenzen A zum limes haben, d. h. Gleichung [107 7] bleibt richtig.

Doch die Gleichung [107 7] bedarf noch einer dritten und letzten Erweiterung. Es werde n negativ, also $\lim n = -\infty$ angenommen. Ist sie auch dann noch richtig?

Man forme folgendermaßen um:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \left(\frac{-n}{-n-x}\right)^{-n} = \left(\frac{-n-x+x}{-n-x}\right)^{-n-x+x}$$

$$= \left(1 + \frac{x}{-n-x}\right)^{-n-x} \left(1 + \frac{x}{-n-x}\right)^x,$$

oder, wenn $-n-x = n'$ gesetzt wird:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n'}\right)^{n'} \cdot \left(1 + \frac{x}{n'}\right)^x.$$

Für $\lim n = -\infty$ wird $\lim n' = +\infty$, also, wie bereits gezeigt:

$$\lim_{n'=+\infty}\left(1+\frac{x}{n'}\right)^{n'} = A.$$

Andererseits ist, da x eine beliebige endliche Zahl sein soll:

$$\lim_{n'=\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n'}\right)^{x}\right] = \left[\lim_{n'=\infty}\left(1+\frac{x}{n'}\right)\right]^{x} = 1^{x} = 1,$$

also:

$$\lim_{(n=-\infty)}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = A\cdot 1 = A,$$

d. h. Gleichung [107 7] bleibt auch richtig für $\lim n = -\infty$. Es ist ganz allgemein, ohne jede Einschränkung:

$$\lim_{(n=\pm\infty)}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \text{ in inf.} \tag{3}$$

Damit ist die zu Anfang dieses Paragraphen angekündigte limes-Rechnung erschöpfend erledigt. Jetzt winkt in nächster Nähe der Lohn für diese recht mühevolle Arbeit.

109. Die Zahl e, nächst der Kreiszahl π die wichtigste transzendente Zahl, ist rein analytischen Ursprungs gewesen, der sich in der Hauptsache mit den eben beendeten Grenzbetrachtungen deckt. Sie entsteht aus [108 3] wenn $x = 1$ gesetzt wird. Es ist also:

$$e = \lim_{(n=\pm\infty)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\cdots \tag{1}$$

Ihre Berechnung ist schon in [94] vorweggenommen worden. Sie hatte ergeben:

$$e = 2{,}718281828459\ldots \tag{2}$$

Die Entdeckung und erste Berechnung dieser Zahl soll auf Napier, der allgemein üblich gebräuchliche Buchstabe e zu ihrer Bezeichnung soll auf Euler zurückzuführen sein.

Die Exponentialreihe. Da die elementaren Gesetze für das Potenzieren, nämlich:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

auch nach Erweiterung des Potenzbegriffes gelten, so folgt:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}x} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^{x} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{x}$$

wenn m für $n:x$ gesetzt wird. Ist $\lim n = \pm\infty$, so ist auch $\lim m = \pm\infty$, also nach (1):

$$\lim_{(n=\infty)}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \lim_{m=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{x} = \left[\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{x} = e^{x} \tag{3}$$

und daher nach [108 3]:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \text{ in inf.} \tag{4}$$

gültig für jeden endlichen Wert von x. Die Exponentialfunktion für die Basis e ist in eine konvergente Potenzreihe von sehr einfachem Bau entwickelt worden; dies ist die hochbedeutsame Frucht der vorangegangenen limes-Rechnung und zugleich die Rechtfertigung der Zahl e als „natürlicher" Basis.

110. Wegen der großen Wichtigkeit der Formel [109 4] sei dieselbe noch einmal (allerdings ganz kurz) a posteriori hergeleitet.

Man setze hierzu: $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \text{ in inf.} = \sum \frac{x^n}{n!}$ (1)

so daß die Identität

$$f(x) \equiv e^x \tag{2}$$

zu erweisen ist. Sie stimmt zunächst für $x = 0$ und $x = 1$, da $f(0) = 1$, $f(1) = e$; und da andererseits auch $e^0 = 1$, $e^1 = e$ ist.

Sodann setze man in (1) für x irgend zwei Werte y und z, und bilde das Produkt:

$$f(y) \cdot f(z) = \sum_m \frac{y^m}{m!} \sum_n \frac{z^n}{n!} = \sum_m \sum_n \frac{y^m z^n}{m!\,n!}.$$

In diagonaler Anordnung der Doppelreihe [100] daher:

$$f(y) \cdot f(z) = 1 + \left(\frac{y}{1!} + \frac{z}{1!}\right) + \left(\frac{y^2}{2!} + \frac{y}{1!}\,\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!}\right) + \cdots \tag{3}$$

$$+ \left(\frac{y^n}{n!} + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{z^1}{1!} + \frac{y^{n-2}}{(n-2)!}\,\frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}\right) + \cdots$$

Nach [19 4] sind die Glieder identisch mit:

$$1, \quad \frac{(y+z)}{1!}, \quad \frac{(y+z)^2}{2!}, \quad \frac{(y+z)^n}{n!} \cdots,$$

d. h. die Funktion $f(x)$ erfüllt die „Funktionalgleichung"

$$f(y) \cdot f(z) \equiv f(y+z). \tag{4}$$

Man erweitere sie auf beliebig viele Faktoren und Summanden,

$$f(y) \cdot f(z) \cdot f(u) \cdot f(v) \cdots = f(y + z + u + v + \cdots), \tag{5}$$

setze $y = z = u = v \cdots = 1$ (Anzahl $= p$). Da $f(1) = e$, so:

$$e \cdot e \cdot e \cdots = f(p) \quad \text{oder} \quad f(p) = e^p, \tag{6}$$

d. h. (2) gilt für alle ganzzahligen Werte von x. Dann setze man:

$$y = z = u = \cdots = \frac{p}{q} \text{ (Anzahl } = q\text{), so folgt:}$$

$$\left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = f(p); \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{f(p)} = (f(p))^{\frac{1}{q}};$$

also nach (6):
$$f\left(\frac{p}{q}\right) = (e^p)^{\frac{1}{q}} = e^{\frac{p}{q}}, \tag{7}$$

d. h. (2) gilt für alle gebrochenen Werte von x, also [86 2] auch für alle positiven Werte von x. Für negative Werte Beweis durch Formel $e^{-x} = 1 : e^x$.

111. Aus [109 4] lassen sich mit größter Leichtigkeit einige andere Reihenentwickelungen ableiten. So zuerst allgemeiner

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2!} + \cdots + \text{in inf.} \tag{1}$$

Ferner ist: $e^{-x} = 1 : e^x = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$ also [63]

$$\mathfrak{Cof}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{2}$$

$$\mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{3}$$

Vgl. § 25 (Verwandtschaft zwischen Kreis- und Hyperbelfunktionen):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots, \tag{4}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots \tag{5}$$

Schließlich sei an der Formel

$$\lim_{(n=\infty)} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y \tag{6}$$

kurz gezeigt, wie ein limes zuweilen umgekehrt werden kann. Es folgt durch Wurzelausziehen

$$1 + \frac{y}{n} = \sqrt[n]{e^y}; \quad y = n\left(\sqrt[n]{e^y} - 1\right).$$

Daher, wenn $e^y = x$, also umgekehrt: $y = \ln x$ gesetzt wird:

$$\lim_{(n=\infty)} \left[n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)\right] = \ln x \tag{7}$$

oder, wenn $n = 1 : \varepsilon$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = x^\varepsilon$ gesetzt wird:

$$\ln x = \lim_{(\varepsilon=0)} \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon}. \tag{7a}$$

Es ist (7) die erwähnte Umkehrung. Diese Formel ist früher wirklich zur Berechnung der Logarithmen benutzt worden. Man setzte n gleich einer Potenz von 2, um nur Quadratwurzeln zu haben.

Übungen zu § 12.

1. Zu beweisen, daß die Ausdrücke:

$$\left(\frac{2}{1}\right)^2, \left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdots$$

mit wachsendem n abnehmen und die Zahl e zum limes haben.

2. Bis zu welchem Betrag K würde ein Anfangskapital C nach t Jahren angewachsen sein, wenn es auf Zinseszins zu p % jährlich ausgeliehen und es möglich wäre, die in jedem Augenblick entstandenen Zinsen sofort zum Kapital zuzuschlagen.

3. $$\lim_{(n=\infty)} \left(\frac{n^p + An^{p-1} + Bn^{p-2} + \cdots + K}{n^p + an^{p-1} + bn^{p-2} + \cdots + k}\right)^{\alpha n + \beta}.$$

4. Zu vergleichen sind:

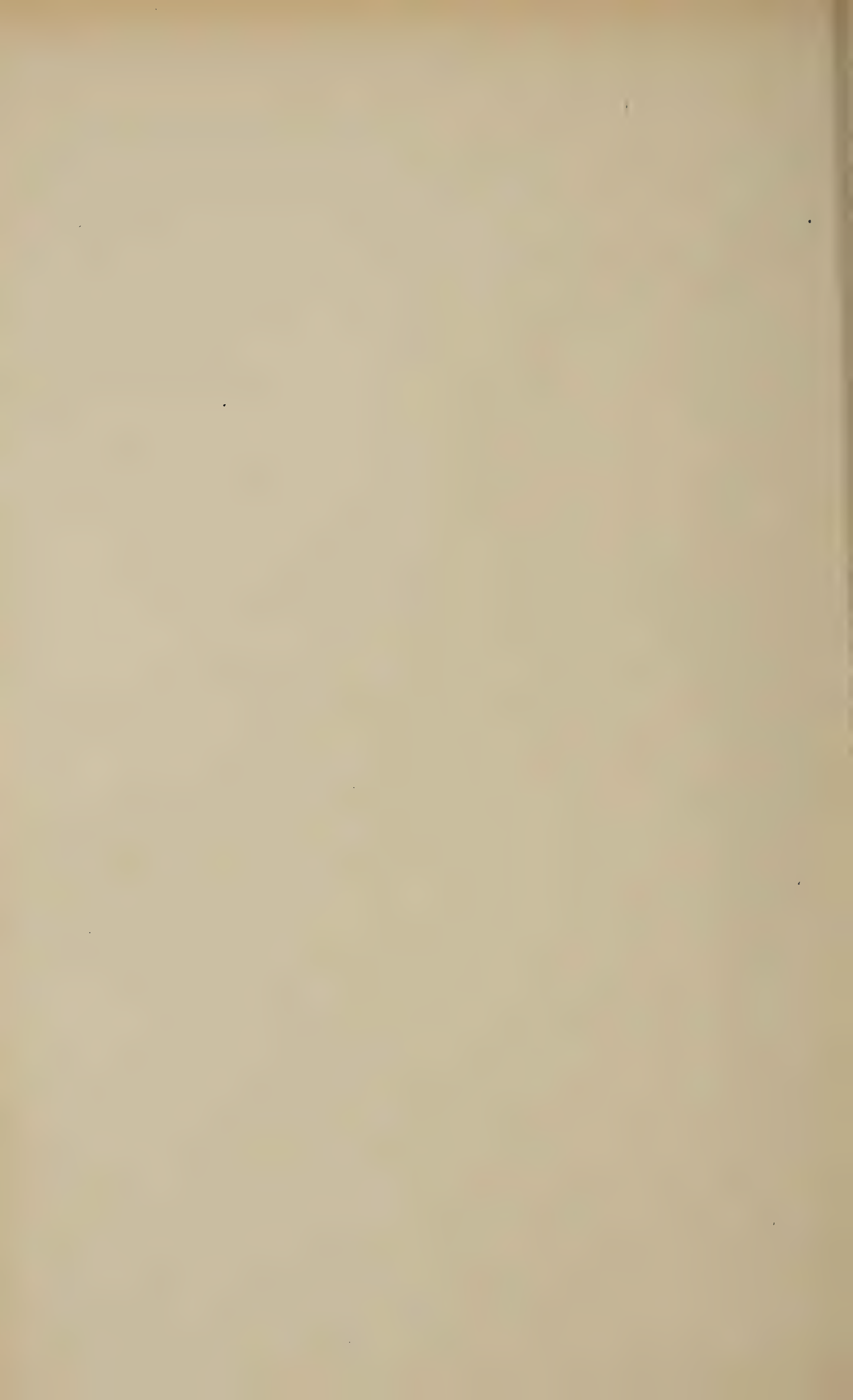
$$A_{n-1} \cdot A_{n+1} \text{ und } A_n^2$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$A_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}, \quad A_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad A_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}.$$

ZWEITES BUCH

DIFFERENTIALRECHNUNG



Vierter Abschnitt.

Grundbegriffe der Differentialrechnung.

§ 13. Das Differential, der Differentialquotient und die abgeleitete Funktion.

112. Begriff eines Differentials. Eine Änderung Δx einer Größe x wird dann ein Differential dx (gesprochen ohne Partikel zwischen d und x, oder auch d „von" x, jedoch niemals d „mal" x), wenn sie unendlich klein werden soll.

Das Wort Differential und die zugehörige Bezeichnung dx stammen von Leibniz. Man gewöhne sich übrigens:

$$d, \text{ aber nicht } \partial, \text{ auch nicht } \delta \tag{1}$$

zu schreiben, weil der Buchstabe ∂ mit dem krummen statt des geraden Striches für eine besondere Abart von Differentialen, nämlich die partiellen, (§ 19) aufgehoben werden soll und auch der Buchstabe δ eine besondere Bedeutung als „Variation" hat [173].

Sonst wäre noch zu sagen, daß ein Differential alle in § 9 hervorgehobenen Merkmale einer unendlich kleinen Größe hat; so kann z. B. dx positiv oder negativ sein, denn das Unendlichkleine haftet nur an dem absoluten Wert.

Stetigkeit einer Funktion. Nach Einführung des Differentials erhalten die früheren Erklärungen [85] und [87] folgende, nun aber endgültige Fassung:

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt stetig, wenn einem dx ein $dy = df(x)$ entspricht. Es ist allgemein für jede Funktion, selbst wenn sie unstetig sein sollte:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2}$$

Für den Fall ihrer Stetigkeit ist aber auch:

$$\boldsymbol{dy = df(x) = f(x + dx) - f(x).} \tag{3}$$

Man nehme daher zur Prüfung der Stetigkeit die Differenz $f(x + dx) - f(x)$ und weise nach, daß sie mit dx zugleich unendlich klein wird und verschwindet. Vier Beispiele.

Erstes Beispiel. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist stetig. Denn man erhält:

$$f(x + dx) - f(x) = (x + dx)^2 - x^2 = 2x dx + (dx)^2.$$

Sowohl $2xdx$ als auch $(dx)^2$ sind unendlich klein (letzteres sogar von der zweiten Ordnung). Man darf also schreiben:

$$dy = d(x^2) = 2xdx + (dx)^2. \tag{4}$$

Zweites Beispiel. Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist stetig. Denn man erhält:

$$f(x+dx) - f(x) = \sin(x+dx) - \sin x$$
$$= -\sin x(1-\cos dx) + \cos x \sin dx.$$

Das zweite Glied ist unendlich klein, da $|\sin dx| < |dx|$ ist. Das erste Glied ist erst recht unendlich klein, da $1 - \cos dx = 2\sin^2\frac{dx}{2}$ ist. Man darf also schreiben:

$$dy = d(\sin x) = \cos x \cdot \sin dx - 2\sin x \cdot \sin^2\frac{dx}{2}. \tag{5}$$

Drittes Beispiel. Die Funktion $f(x) = e^x$ ist stetig. Denn man erhält:

$$f(x+dx) - f(x) = e^{x+dx} - e^x = e^x(e^{dx} - 1)$$

oder nach [109 4], wenn dort dx statt x gesetzt wird:

$$f(x+dx) - f(x) = e^x\left(dx + \frac{(dx)^2}{2!} + \frac{(dx)^3}{3!} + \cdots\right).$$

Der zweite Faktor ist unendlich klein, denn sein absoluter Wert ist kleiner als:

$$|dx| + |dx|^2 + |dx|^3 + \cdots = \frac{|dx|}{1-|dx|}.$$

Man darf daher schreiben:

$$dy = d(e^x) = e^x\left(dx + \frac{(dx)^2}{2!} + \frac{(dx)^3}{3!} + \cdots\right). \tag{6}$$

Viertes Beispiel. Jede Potenzreihe:

$$y = f(x) = a + bx + cx^2 + ex^3 + \cdots \text{ in inf.} \tag{7}$$

ist in dem Spielraum ihrer Konvergenz [102] stetig. Denn man erhält:

$$f(x+dx) - f(x) = (a + bx_1 + cx_1^2 + \cdots) - (a + bx + cx^2 + \cdots)$$

wenn zur Abkürzung $x_1 = x + dx$ gesetzt wird. Da man die Glieder beliebig umstellen darf (§ 11, unbedingte Konvergenz), so folgt:

$$f(x+dx) - f(x) = b(x_1 - x) + c(x_1^2 - x^2) + e(x_1^3 - x^3)\ldots$$

oder nach Anwendung der Formel:

$$x_1^n - x^n = (x_1 - x)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})$$

auf alle Glieder und Absonderung von $x_1 - x = dx$:

$$f(x+dx) - f(x) = dx(b + c(x_1 + x) + e(x_1^2 + x_1x + x^2) + \cdots).$$

Der erste Faktor ist unendlich klein $= dx$, der zweite ist endlich. Es sei nämlich etwa $|x_1| < x$, so wird sein absoluter Wert kleiner als:

$$|b| + |2cx| + |3ex^2| + \cdots \text{ in inf.}$$

und diese Reihe ist konvergent [104]. Man darf also schreiben:

$$dy = d(a + bx + cx^2 + ex^3 + \cdots)$$
$$= dx[b + c(x_1 + x) + e(x_1^2 + x_1 x + x^2) + \cdots]. \quad (8)$$

113. Prüft man in gleich einfacher Weise die übrigen elementaren Funktionen des ersten Abschnittes, so wird man sie sämtlich als stetig befinden, vorbehaltlich einzelner, schon wiederholt hervorgehobener Unstetigkeitsstellen [80]. Die Potenzfunktion, die Wurzelfunktion, die logarithmische Funktion, die trigonometrischen Funktionen, die arcusfunktionen usw., sie alle sind stetig.

Aber auch die aus ihnen im Sinne von § 6 zusammengesetzten Funktionen sind mit gleichem Vorbehalt stetig. Ist z. B. die Funktion von einer Funktion $y = f(\varphi(x))$ gegeben, so bilde man nach [112] zunächst die Differenz $f(\varphi(x + dx)) - f(\varphi(x))$ und setze (wie in [51]) $\varphi(x) = z$, also $y = f(z)$. Wenn $\varphi(x)$ stetig ist, so folgt [112 3]:

$$dz = \varphi(x + dx) - \varphi(x) \quad \text{oder} \quad \varphi(x + dx) = z + dz,$$

also:

$$f(\varphi(x + dx)) - f(\varphi(x)) = f(z + dz) - f(z).$$

Wenn $f(z)$ eine stetige Funktion von z ist, so folgt ebenso:

$$dy = df(z) = f(z + dz) - f(z),$$

d. h. $y = f(\varphi(x))$ ist eine stetige Funktion von x.

Auch die indirekten und impliziten Funktionen (§ 6) sind im allgemeinen stetig, wenn die zugrunde liegenden expliziten Funktionen stetig sind. Freilich muß die endgültige Entscheidung von Fall zu Fall getroffen werden. Es seien z. B. x und y mit einer dritten Veränderlichen t durch eine Parameterdarstellung $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ verbunden. Sind $f(t)$ und $\varphi(t)$ stetig, so entspricht einem dt sowohl ein dx als auch ein dy. Folglich entspricht durch Vermittelung von dt einem dx ein dy, d. h. y ist voraussichtlich eine implizite stetige Funktion von x, abgesehen von etwaigen Unstetigkeitsstellen.

Von nun an werde immer, wenn auch nur stillschweigend, angenommen, daß die betreffenden Funktionen stetig sind, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil vorausgesetzt wird. Denn nur stetige Funktionen können den Regeln und Gesetzen der Differentialrechnung unterliegen. Haben sie, wie z. B.

$$\frac{1}{x}, \quad \ln x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg} x$$

Unstetigkeitsstellen, so verlieren in ihnen selbstverständlich, was hiermit nachdrücklichst betont sei, diese Regeln und Gesetze ihre Geltung. Als Beispiele vergleiche man [129] und [253].

114. Der Differentialquotient. Die vier Beispiele in [112] sollten zeigen und haben auch wirklich gezeigt, daß zu einem dx ein $dy = df(x)$ gehört. Sie zeigen aber noch mehr! Zunächst, daß beide Differentiale (im allgemeinen) von gleicher Ordnung unendlich klein sind, oder daß ihr Verhältnis, der sogenannte Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \tag{1}$$

endlich ist. Man findet im ersten Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = \frac{2x\,dx + (dx)^2}{dx} = 2x + dx. \tag{2}$$

Der erste Teil, nämlich $2x$, ist endlich, der zweite, nämlich dx, ist unendlich klein. Also ist der Differentialquotient endlich. Im zweiten Beispiele ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \frac{\sin dx}{dx} - 2 \sin x \frac{\sin^2 \frac{dx}{2}}{dx}. \tag{3}$$

Der erste Teil ist endlich, da nach [88] der Bruch $\sin dx : dx$ unendlich wenig von 1 abweicht. Der zweite Teil ist unendlich klein, da:

$$2\frac{\sin^2 \frac{dx}{2}}{dx} = \frac{\sin \frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}} \sin \frac{dx}{2}$$

ist und der Bruch $\sin \frac{dx}{2} : \frac{dx}{2}$ ebenfalls endlich, dagegen $\sin \frac{dx}{2}$ unendlich klein ist. Also ist der Differentialquotient endlich. Im dritten Beispiel ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^x}{dx} = e^x\left(1 + \frac{dx}{2!} + \frac{(dx)^2}{3!} + \cdots\right). \tag{4}$$

Der erste Faktor e^x ist endlich und der zweite auch, weil er sich unendlich wenig von 1 unterscheidet. Also ist der Differentialquotient endlich. Im vierten Beispiel ist

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d(a+bx+cx^2+ex^3+\cdots)}{dx} \\ &= b + c(x_1 + x) + e(x_1^2 + x_1 x + x^2) + \cdots\end{aligned} \tag{5}$$

Der Ausdruck rechts ist, wie dort gezeigt, konvergent. Also ist der Differentialquotient endlich.

Und so ist der Differentialquotient (1) im allgemeinen für alle elementaren und die aus ihnen durch Zusammensetzung, Umkehrung, Parameterdarstellung usw. gebildeten Funktionen endlich, wieder von einzelnen Stellen abgesehen, in denen er $= 0$ oder $= \infty$ oder gänzlich unbestimmt wird.

115. Doch die vier Beispiele in [112] zeigen noch mehr. Sie zeigen, daß der Differentialquotient in zwei Teile zerfällt, von denen der eine, welcher der Hauptteil heißen möge, endlich ist und gar nicht von dx, sondern nur von x abhängt, während der andere dx (und auch x) enthält und mit dx zugleich unendlich klein wird und verschwindet, weshalb er der Nebenteil heißen möge.

Im ersten Beispiel ist der Hauptteil $= 2x$, der Nebenteil $= dx$. Ersterer ist endlich und von dx unabhängig, letzterer ist dx selbst, also unendlich klein. Im zweiten Beispiel ist:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x + \left[-\cos x \left(1 - \frac{\sin dx}{dx}\right) - 2 \sin x \frac{\sin^2 \frac{dx}{2}}{dx} \right].$$

Der Hauptteil ist $= \cos x$ und der Nebenteil steht in den eckigen Klammern. Ersterer ist von dx unabhängig und endlich. Letzterer hängt von dx (und x) ab und ist unendlich klein, weil $\sin dx : dx$ sich unendlich wenig von 1 unterscheidet und $\sin^2 \frac{dx}{2} : dx$ unendlich klein ist, wie vorhin gezeigt. Im dritten Beispiel ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^x}{dx} = e^x + \left[e^x \left(\frac{dx}{2!} + \frac{(dx)^2}{3!} + \cdots\right)\right].$$

Der Hauptteil ist $= e^x$ und der Nebenteil steht in den eckigen Klammern. Ersterer ist von dx unabhängig und endlich. Letzterer hängt von dx (und x) ab und ist unendlich klein. Im vierten Beispiel ist:

$$\frac{dy}{dx} = [b + 2cx + 3ex^2 + \cdots]$$

$$+ [\{b + c(x_1 + x) + e(x_1^2 + x_1 x + x^2) + \cdots\} - \{b + 2cx + 3ex^2 + \cdots\}].$$

In der ersten eckigen Klammer steht der Hauptteil, in der anderen der Nebenteil. Ersterer ist von dx unabhängig und endlich, da die Reihe konvergiert [104]. Letzterer hängt von dx ab (das in $x_1 = x + dx$ enthalten ist) und ist unendlich klein. Denn der Ausdruck in den ersten geschweiften Klammern ist konvergent und, als Funktion von x_1 betrachtet, auch stetig. Er weicht also nur unendlich wenig von dem Ausdruck in der anderen geschweiften Klammer ab (da dieser aus dem ersteren entsteht, wenn x statt $x_1 = x + dx$ gesetzt wird).

So ergibt sich ganz allgemein für die elementaren Funktionen des ersten Abschnittes (Unstetigkeitsstellen ausgenommen):

I. Die Funktion $y = f(x)$ ist stetig.

II. Einem dx entspricht ein $dy = df(x)$.

III. Der Differentialquotient: $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$, ist endlich.

IV. Der Differentialquotient läßt sich zerlegen in einen Hauptteil und in einen Nebenteil. Ersterer ist endlich und von dx unabhängig. Letzterer hängt von dx (und x) ab und verschwindet mit dx.

116. Die abgeleitete Funktion. Selbstverständlich kommt es bei dem Differenzieren einer Funktion $y = f(x)$ zu allererst auf den Hauptteil des Differentialquotienten an. Er ist von dx unabhängig, also eine Funktion von x allein, wie $y = f(x)$ selbst. Allerdings, wie die vier Beispiele gezeigt haben, im allgemeinen eine andere Funktion (nur e^x macht eine Ausnahme). Aber diese andere Funktion ist doch durch $f(x)$ bestimmt, zunächst implizite, dann aber, nach vollendeter Differentiation, auch explizite. Sie heißt, weil aus $f(x)$ durch Differenzieren „abgeleitet", die abgeleitete Funktion von $f(x)$.

Der Differentiationsstrich. Der große Mathematiker Lagrange hat zur kurzen Bezeichnung der abgeleiteten Funktion[1]) den Differentiationsstrich eingeführt und schreibt sie als:

$$y' = f'(x). \tag{1}$$

Sie heißt auch kürzer die Ableitung von $f(x)$; oder auch die derivierte Funktion (fonction dérivée); oder auch die Derivierte von $f(x)$.

Ist also wie in den vier Beispielen [112]

$$y = f(x) = x^2, \quad \sin x, \quad e^x, \quad a + bx + cx^2 + ex^3 + \cdots,$$

so ist die abgeleitete Funktion:

$$y' = f'(x) = 2x, \quad \cos x, \quad e^x, \quad b + 2cx + 3ex^2 + \cdots \tag{2}$$

Der Strich in (1) ist also kein gewöhnlicher Strich, wie in [7], sondern eben ein „Differentiationsstrich". Man vermeide daher soviel wie möglich den gleichzeitigen Gebrauch beider Arten von Strichen, um unliebsamen Verwechslungen vorzubeugen.

Der Nebenteil des Differentialquotienten kommt als unendlich klein nur nebensächlich in Betracht. Sehr oft genügt es zu wissen, daß er unendlich klein ist, weil dies in den allermeisten Fällen ein näheres Eingehen überflüssig macht. So mag er für die Folge kurz als ε bezeichnet werden, mit der Maßgabe, daß ε mit dx zugleich unendlich klein wird und verschwindet. Später, [141], wird ε näher bestimmt werden.

Nach Einführung der Ableitung $y' = f'(x)$ und des Nebenteiles ε gilt ganz allgemein: Wenn eine Funktion:

$$y = f(x) \tag{3}$$

gegeben ist, so wird ihr Differentialquotient durch die Formel bestimmt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = f'(x) + \varepsilon = y' + \varepsilon. \tag{4}$$

[1]) Weniger üblich ist $Dy \equiv D(fx)$. Siehe auch [153].

Geht man in (4) durch Multiplikation mit dx vom Differentialquotienten wieder zu den Differentialen zurück, so folgt:

$$dy = df(x) = f(x+dx) - f(x) \tag{5}$$
$$= (f'(x) + \varepsilon)\, dx = (y' + \varepsilon)\, dx$$
$$= f'(x)\, dx + \varepsilon\, dx = y'\, dx + \varepsilon\, dx.$$

117. Nach [84] sagt man: Endliche Größen seien einander gleich bis auf unendlich kleine Größen, wenn ihr Unterschied unendlich klein ist. Und ferner: Unendlich kleine Größen seien bis auf Größen höherer Ordnung einander gleich, wenn ihr Unterschied von höherer Ordnung unendlich klein ist, als sie selbst. Mit diesem Vorbehalt darf man daher ε in (4) und $\varepsilon\, dx$ in (5) fortlassen und schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y' = f'(x), \tag{1}$$

$$dy = df(x) = y'\, dx = f'(x)\, dx. \tag{2}$$

In Worten: α) Der Differentialquotient einer Funktion „nach" der ursprünglichen Veränderlichen (der Differentialquotient von y „nach" x) ist gleich der abgeleiteten Funktion (oder der Ableitung von y „nach" x). Oder: β) Das Differential einer Funktion ist gleich dem Produkt aus ihrer abgeleiteten Funktion und dem Differential der ursprünglichen Veränderlichen.

So ist nach dem zweiten Beispiel in [112]:

$$\alpha)\ \frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x; \quad \text{oder} \quad \beta)\ dy = d(\sin x) = \cos x\, dx. \tag{3}$$

[Ob man α) oder β) nimmt, ist ziemlich gleichgültig. Man gewöhne sich an beide Formen, hüte sich aber als Anfänger sehr vor einer mißgestalteten Verbindung beider, wie etwa:

$$\gamma)\ d(\sin x) = \cos x; \quad \delta)\ \frac{d \sin x}{dx} = \cos x\, dx, \quad \varepsilon)\ \frac{d(\sin x)}{dx} = \frac{\cos x}{dx}.$$

In γ) steht links Unendlichkleines, rechts Endliches. In δ) steht links Endliches, rechts Unendlichkleines. In ε) steht links Endliches, rechts Unendlichgroßes. Solche Entgleisungen wie γ), δ), ε) müssen sehr schnell überwunden werden.]

Doch, obgleich man meist (1) und (2) nimmt statt (4) und (5) in [116], so behält man immer noch ε bzw. $\varepsilon\, dx$ im Sinne, um dieses unendlich kleine Glied sofort hinzuzusetzen, wo es verlangt werden sollte.

118. Das Differenzieren als eine Limesrechnung. Nach [116] und [117] ist die Erklärung berechtigt: Eine Funktion $y = f(x)$ differenzieren, heißt die abgeleitete Funktion $y' = f'(x)$ ermitteln.

Die vier Beispiele [115] haben gezeigt und die allgemeine Formel [116 4] bestätigt, daß es sich dabei um eine Limesrechnung im eigentlichen Sinne handelt [88], weil der Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \tag{1}$$

die unbestimmte Form $0:0$ annehmen würde, wenn man sich etwa einfallen ließe, für dx unmittelbar seinen limes, nämlich 0 zu setzen. Es wird vielmehr, wie sich gezeigt hatte, darauf ankommen, (1) so umzuformen, daß man die unbestimmte Form umgehen kann, was ja nach [88] den Kern einer Limesrechnung ausmacht, um nachher zu zerlegen in den Hauptteil, welcher die Ableitung y' ist, und in den Nebenteil, welcher als unendlich klein weggeworfen wird.

Um das Differenzieren als eine Limesrechnung scharf hervorzuheben, setze man statt dx einen besonderen Buchstaben, etwa h. Dann ist:

$$y' = f'(x) = \lim_{(h=0)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2}$$

Diese Gleichung soll die endgültige Definition der abgeleiteten Funktion sein, welche also steht und fällt mit dem in (2) geforderten limes, dessen Berechnung natürlich erst in Angriff genommen werden kann, wenn, wie in den Beispielen, für $f(x)$ eine besondere Funktion, x^2, oder $\sin x$, oder e^x usw. gesetzt wird.

119. Wie die in [118 2] geforderte Limesrechnung zu bewerkstelligen sei, das haben die vier Beispiele in [115] zwar wohl schon hinreichend klar gemacht, doch seien ihnen noch zwei andere hinzugefügt:

Erste Aufgabe. Zu der Potenzfunktion $y = x^n$ die abgeleitete Funktion zu finden (n sei positiv und ganz).

Erste Lösung. Es ist $f(x) = x^n$, $f(x+h) = (x+h)^n$, daher nach [118 2]:

$$y' = f'(x) = \lim_{(h=0)} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Man wende zu der nach [118] notwendigen Umformung den binomischen Lehrsatz an, so wird:

$$f'(x) = \lim_{(h=0)} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h}.$$

Im Zähler hebt sich x^n gegen $-x^n$. Alle übrigen Glieder sind durch den Nenner h teilbar (darauf beruht ja eben die Entfernung der unbestimmten Form $0:0$). Es wird:

$$f'(x) = \lim_{(h=0)} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}\right].$$

Das erste Glied ist von h unabhängig, die anderen werden mit h unendlich klein. Also:

$$y' = f'(x) = (x^n)' = n x^{n-1}, \tag{3}$$

mithin nach [117]:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}, \quad d(x^n) = n x^{n-1} dx. \tag{4}$$

Zweite Lösung. Man wende die Formel an:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + b^{n-1}),$$

setze $a = x + h$, $b = x$, $a - b = h$, so folgt nach Heben von h:

$$f'(x) = \lim_{(h=0)} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \cdots + x^{n-1}].$$

In den eckigen Klammern steht eine stetige Funktion von h, also setze man zur Erlangung des limes nach [88] unmittelbar $h = 0$. Dann werden alle Glieder $= x^{n-1}$ und da ihre Anzahl $= n$ ist, so folgt abermals (3). So ist z. B.:

$$d(x^7) = 7x^6 dx; \quad d(x^{1000}) = 1000 x^{999} dx; \quad d(x^2) = 2x^1 dx = 2x\, dx;$$

$$d(x^1) = 1 \cdot x^0 dx = dx \text{ (stimmt)};$$

$$d(x^0) = 0 x^{-1} dx = 0\, dx \text{ (stimmt auch, da } x^0 = 1 = \text{Konstans ist [122])}.$$

Zweite Aufgabe. Zu der Funktion $y = \cos x$ die Ableitung zu suchen.

Erste Lösung. Es ist $f(x) = \cos x$, $f(x+h) = \cos(x+h)$, daher nach [118]

$$y' = f'(x) = \lim_{(h=0)} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}.$$

Man wende die Formel an $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$. Es folgt:

$$y' = f'(x) = \lim_{(h=0)} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= -\sin x \lim \frac{\sin h}{h} - \cos x \lim \frac{1 - \cos h}{h}.$$

Der erste limes ist $= 1$, der zweite ist $= 0$, nach [88], also:

$$y' = f'(x) = (\cos x)' = -\sin x, \tag{5}$$

$$dy = d(\cos x) = -\sin x\, dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x. \tag{6}$$

Zweite Lösung: $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$. Es folgt:

$$y' = f'(x) = \lim_{(h=0)} - \frac{2 \sin\frac{h}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = -\lim \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Der erste limes ist $= \sin x$, weil diese Funktion stetig ist, der zweite ist $= 1$. Also wieder (5).

Statt nun immer noch mehr Beispiele einzeln durchzunehmen, sei auf die sehr allgemeinen und sehr einfachen Differentialformeln des nächsten Paragraphen verwiesen. Dort wird sich zeigen, daß die bisherigen Beispiele völlig ausreichen.

120. Existenz der abgeleiteten Funktion. Ihre Stetigkeit. Nach den vorangegangenen Betrachtungen ist als Grundpfeiler der Differentialrechnung anzusehen die nach [118 2] durch die Formel:

$$f'(x) = \lim_{(h=0)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

definierte abgeleitete Funktion $f'(x)$. Sie kann, wie wiederholt nachdrücklich betont, überhaupt nur existieren, wenn die ursprüngliche Funktion $f(x)$ stetig ist. Daß aber diese Bedingung ausreiche, dafür fehlt jeder Beweis. Genau ausgedrückt ist der Sachverhalt so: Jede Funktion $f(x)$, welche differenzierbar ist, d. h. welche eine Ableitung $f'(x)$ hat, ist auch stetig. Daß aber umgekehrt jede Funktion $f(x)$, welche stetig ist, auch differenzierbar sei, ist nicht selbstverständlich und auch nicht wahr.[1])

Vielmehr beschränkt sich, was man ganz allgemein hierüber bewiesen hat, auf folgenden Satz:

Die abgeleitete Funktion $f'(x)$ ist, wenn sie überhaupt existiert, stetig.

Beweis. Man gehe auf die Formel [116 4] zurück:

$$f'(x) + \varepsilon = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}, \tag{2}$$

welche genau ist, einschließlich unendlich kleiner Größen, und setze für x noch einen anderen Wert x_1, nenne sein Differential dx_1, und bezeichne den zugehörigen Wert von ε mit ε_1. Also:

$$f'(x_1) + \varepsilon_1 = \frac{f(x_1 + dx_1) - f(x_1)}{dx_1}. \tag{3}$$

Im besonderen sei $x_1 + dx_1 = x$, $x_1 = x + dx$, also $dx_1 = -dx$, so werden Zähler und Nenner in (2) und (3) entgegengesetzt gleich. Folglich

---

1) So ist z. B. die von Weierstraß aufgestellte Funktion:

$$y = f(x) = \sin x + \frac{\sin 10x}{10} + \frac{\sin 100x}{100} + \cdots \text{ in inf.}$$

für jeden Wert von x stetig, aber für keinen Wert von x differenzierbar. Es fehlt $y' = f'(x)$ gänzlich.

$$f'(x+dx)+\varepsilon_1=\frac{f(x)-f(x+dx)}{-dx}=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=f'(x)+\varepsilon,$$

oder

$$f'(x+dx)-f'(x)=\varepsilon-\varepsilon_1. \tag{4}$$

Da ε und ε_1 unendlich klein sind, so gilt ein gleiches für

$$f'(x+dx)-f'(x),$$

d. h. [112] $f'(x)$ ist eine stetige Funktion von x.

Daher kann die in [118 2] aufgestellte Definition der Ableitung noch etwas verallgemeinert werden, wie folgt:

$$f'(x)=\lim\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\lim\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\lim A \tag{5}$$

$$(\lim x_2=x,\ \lim x_1=x,\ x_2\neq x_1),$$

d. h. es sollen x_1 und x_2 sich beide x unbegrenzt nähern, jedoch so, daß sie doch (unendlich wenig) verschieden sind. A bedeutet das in § 3 eingeführte Zeichen für den (ersten) Differenzenquotienten.

121. Die zweite Ableitung. Höhere Ableitungen. Wenn die Funktion $f(x)$ eine Ableitung $f'(x)$ besitzt, so ist $f'(x)$ auch stetig, wie soeben gezeigt. Daß aber $f'(x)$ wieder eine Ableitung haben müsse, folgt hieraus durchaus nicht, denn eine stetige Funktion kann ja auch „nicht differenzierbar" sein. Setzt man aber $f'(x)$ als differenzierbar voraus, so entsteht:

Die abgeleitete Funktion einer abgeleiteten Funktion. Oder: Die zweite Ableitung.

Sie wird folgerichtig [116] bezeichnet als:

$$(y')'=(f'(x))' \tag{1}$$

oder kürzer und besser als:

$$y''=f''(x). \tag{2}$$

Nach dieser Erklärung steht $f''(x)$ zu $f'(x)$ in derselben begrifflichen Beziehung wie $f'(x)$ zu $f(x)$. So ist z. B.:

$$y''=f''(x)=\lim_{(h=0)}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}, \tag{3}$$

$$dy'=y''dx,\quad df'(x)=f''(x)dx;\quad \frac{dy'}{dx}=y'',\quad \frac{df'(x)}{dx}=f''(x). \tag{4}$$

Überträgt sich die Differenzierbarkeit auf die zweite Ableitung, so steht nichts im Wege, abermals die Ableitung, also die dritte Ableitung der ursprünglichen Funktion:

$$y'''=f'''(x)=\lim_{(h=0)}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}, \tag{5}$$

zu bilden. So kann man, unbegrenzte Differenzierbarkeit vorausgesetzt,

herabsteigen zur vierten Ableitung:

$$y'''' = f''''(x) = \lim_{(h=0)} \frac{f'''(x+h) - f'''(x)}{h}, \tag{6}$$

dann zur fünften, zur sechsten Ableitung usw., vgl. § 18.

Die höheren Ableitungen als die zweite werden hauptsächlich erst im nächsten Abschnitt betrachtet werden. Dieser wird sich meist auf die erste und zweite Ableitung beschränken, weil sie für viele der schönsten Anwendungen der Differentialrechnung ausreichen.

Übungen zu § 13.

1. Es ist zu zeigen, daß ε in [116 4] für die Funktionen x^n, $\sin x$, $\cos x$, $e^x \ldots$ von derselben Ordnung unendlich klein ist wie dx. Vgl. [141].

2. Durch eine limes-Rechnung sind die Ableitungen von

$$y = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg} x, \quad \ln x, \quad \sqrt[n]{x}, \quad \operatorname{arc}(\sin = x)$$

zu berechnen.

§ 14. Allgemeine Differentialformeln.

122. Die Formeln dieses Paragraphen beziehen sich hauptsächlich auf das Differenzieren zusammengesetzter Funktionen im Sinne von § 6, der Umkehrungen von Funktionen und der unentwickelten Funktionen. Sie sollen für die Folge das Differenzieren wesentlich vereinfachen und erleichtern.

I. Das Differential einer Konstanten C verschwindet. Es ist $dC = 0$.

Denn eine Konstante kann überhaupt keine Änderung, also auch keine unendlich kleine Änderung erfahren. Es ist [15 1] $\Delta C = 0$, also auch $dC = 0$. Wird C als Grenzfall einer Funktion von x angesehen, als eine Funktion, die sich auf eine Konstante „reduziert", so kann man auch sagen: Der Differentialquotient oder die abgeleitete Funktion einer Konstanten verschwindet. Es ist:

$$dC = 0, \quad \frac{dC}{dx} = 0, \quad C' = 0. \tag{1}$$

II. Das Differential einer Summe ist gleich der Summe der Differentiale der Summanden. Denn es ist nach [15 5]:

$$\Delta(u + v) = \Delta u + \Delta v,$$

also auch:

$$d(u + v) = du + dv. \tag{2}$$

Sind u und v Funktionen von x, so kann man nach Division

durch dx auch sagen: Der Differentialquotient einer Summe ist gleich der Summe der Differentialquotienten der Summanden:

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}; \quad (u+v)' = u' + v'. \tag{2a}$$

Beispiel:

$$\frac{d(x^5+x^3)}{dx} = \frac{dx^5}{dx} + \frac{dx^3}{dx} = 5x^4 + 3x^2.$$

III. Eine additive Konstante geht beim Differenzieren verloren. Es ist:

$$d(u+C) = du + dC = du; \quad (u+C)' = u'. \tag{3}$$

Beispiel:

$$\frac{d(x^2+7)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x.$$

III. ergibt sich unmittelbar aus I. und II. (Es sei hier schon erwähnt, daß durch Integrieren eine additive Konstante hinzukommt. Das Integrieren ist nämlich eine Umkehrung des Differenzierens § 30.)

IV. Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren konstanter Faktor. Es ist [15 3]: $\Delta(au) = a\Delta u$, also auch:

$$d(au) = a du, \quad \text{oder} \quad \frac{d(au)}{dx} = a\frac{du}{dx}; \quad (au)' = a \cdot u'. \tag{4}$$

Ein gleiches gilt von einem konstanten Divisor. Es ist:

$$d\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{du}{a}, \quad \text{oder} \quad \frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{dx} = \frac{1}{a}\frac{du}{dx}, \quad \left(\frac{u}{a}\right)' = \frac{u'}{a}, \tag{4a}$$

da die Division durch a auf die Multiplikation mit $\frac{1}{a}$ herauskommt.

Beispiel:

$$\frac{d(5x^2)}{dx} = 5\frac{d(x^2)}{dx} = 5 \cdot 2x = 10x.$$

$$\frac{d\frac{x^n}{n}}{dx} = \frac{1}{n}\frac{d(x^n)}{dx} = \frac{1}{n} \cdot nx^{n-1} = x^{n-1}.$$

V. Ein Produkt von zwei Faktoren wird nach folgender Regel differenziert:

$$d(u \cdot v) = vdu + udv, \tag{5}$$

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}, \quad \text{oder} \quad (uv)' = v \cdot u' + u \cdot v'. \tag{5a}$$

Beweis. Es ist nach [15 6]: $\Delta(uv) = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$. Werden Δu und Δv zu Differentialen du und dv, so wird das dritte Glied von höherer Ordnung unendlich klein. Also kurz:

Zweiter Faktor mal Differential des ersten + erster Faktor mal Differential des zweiten.

Erstes Beispiel: Man setze $v = a$ (= konstans), so wird nach I. $da = 0$, also $d(au) = adu$, d. h. wieder IV.

Zweites Beispiel:

$$\frac{d(x^3 \cdot x^4)}{dx} = x^4 \frac{d(x^3)}{dx} + x^3 \frac{d(x^4)}{dx} = x^4 \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 4x^3 = 7x^6.$$

(Sollte nur eine Probe sein. Denn hier hätte man kürzer verfahren können: $\frac{d(x^3 \cdot x^4)}{dx} = \frac{d(x^7)}{dx} = 7x^6$).

Drittes Beispiel:

$$\frac{d(\sin x e^x)}{dx} = e^x \cdot \frac{d \sin x}{dx} + \sin x \frac{de^x}{dx}$$

$$= e^x \cos x + \sin x e^x = e^x(\cos x + \sin x).$$

VI. Differenzieren eines Produktes beliebig vieler Faktoren. Es ist z. B. für drei Faktoren:

$$d(uvw) = d((uv)w) = wd(uv) + uvdw$$

$$= w(vdu + udv) + uvdw = wvdu + uwdv + uvdw.$$

Ganz allgemein entsteht das Differential eines Produktes beliebig vieler Faktoren, wenn man das Differential jedes Faktors mit den übrigen Faktoren multipliziert und die so entstehenden Produkte addiert; z. B.:

$$\frac{d(e^x \cdot \sin x \cdot x^5)}{dx} = \sin x x^5 \frac{de^x}{dx} + e^x x^5 \frac{d \sin x}{dx} + e^x \sin x \frac{dx^5}{dx}$$

$$= \sin x x^5 e^x + e^x x^5 \cos x + e^x \sin x 5x^4$$

$$= x^4 e^x (x \sin x + x \cos x + 5 \sin x).$$

Die allgemeine Formel:

$$d(uvw \cdots) = vw \cdots du + uw \cdots dv + uv \cdots dw + \cdots \tag{6}$$

läßt folgende Umformung zu, die bei einer größeren Anzahl von Faktoren sehr zweckmäßig ist. Man sondere rechts $u \cdot v \cdot w \ldots$ ab. Es ergibt sich:

$$d(uvw) = u \cdot v \cdot w \cdots \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \cdots\right), \tag{6a}$$

oder nach Division durch $uvw \ldots$:

$$\frac{d(uvw \ldots)}{uvw \cdots} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \cdots. \tag{6b}$$

In dieser Gestalt heißt das Differenzieren eines Produktes auch logarithmisches Differenzieren. Man denkt dabei an die beiden Formeln:

$$\ln(uvw \cdots) = \ln u + \ln v + \ln w + \cdots$$

$$d(\ln u) = \frac{du}{u} \quad \text{(siehe [124])}.$$

Beispiel:

$$\frac{d(e^x \sin x \cos x\, x^5)}{dx} = e^x \sin x \cos x\, x^5 \left(\frac{d e^x}{e^x dx} + \frac{d \sin x}{\sin x\, dx} + \frac{d \cos x}{\cos x\, dx} + \frac{d x^5}{x^5 dx}\right)$$

$$= e^x \sin x \cos x\, x^5 \left(1 + \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x + \frac{5}{x}\right).$$

VII. Das Differenzieren eines Bruches oder Quotienten. Es gilt folgende Regel:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$= \frac{\text{Nenner} \cdot d\ (\text{Zähler}) - \text{Zähler} \cdot d\ (\text{Nenner})}{(\text{Nenner})^2}, \tag{7}$$

oder nach Division durch dx:

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \tag{7a}$$

Beweis durch Umkehrung von V. Es ist:

$$\frac{u}{v} \cdot v = u, \quad d\left(\frac{u}{v} \cdot v\right) = du,$$

$$v\,d\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{u}{v}\,dv = du; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du - \frac{u}{v}\,dv}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

(Man hätte auch [15 7] nehmen können:

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

um Δu und Δv zu du und dv zu machen.)

Erstes Beispiel: Es sei v konstant $= a$, also $da = 0$, so wird:

$$d\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{a\,du - u \cdot 0}{a^2} = \frac{du}{a},$$

also (4a), wie es selbstverständlich sein muß.

Zweites Beispiel:

$$\frac{d\left(\frac{x^7}{x^4}\right)}{dx} = \frac{x^4 \cdot \frac{dx^7}{dx} - x^7\frac{dx^4}{dx}}{x^8} = \frac{x^4 \cdot 7x^6 - x^7 \cdot 4x^3}{x^8} = \frac{7x^{10} - 4x^{10}}{x^8} = 3x^2.$$

(Sollte auch nur eine Probe sein, wie das zweite Beispiel in V. Denn hier hätte man viel kürzer rechnen können:

$$\frac{d\left(\frac{x^7}{x^4}\right)}{dx} = \frac{dx^3}{dx} = 3x^2).$$

Drittes Beispiel:

$$\frac{d\,\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{d\frac{\sin x}{\cos x}}{dx} = \frac{\cos x\frac{d\sin x}{dx} - \sin x\frac{d\cos x}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Formt man um, entweder durch Dividieren, oder durch Setzen von 1 für den Zähler, so folgt:

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{d x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \tag{8}$$

Viertes Beispiel:

$$\frac{d \operatorname{cotg} x}{d x} = \frac{d \dfrac{\cos x}{\sin x}}{d x} = - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}.$$

Formt man um, wie im dritten Beispiel, so folgt:

$$\frac{d \operatorname{cotg} x}{d x} = - \frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x). \tag{9}$$

Fünftes Beispiel:

$$\frac{d\left(\dfrac{1}{x^n}\right)}{d x} = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot \dfrac{d x^n}{d x}}{(x^n)^2} = - \frac{n x^{n-1}}{x^{2n}},$$

$$\frac{d\left(\dfrac{1}{x^n}\right)}{d x} = - \frac{n}{x^{n+1}}, \tag{10}$$

oder nach Einführung negativer Exponenten:

$$\frac{d\left(x^{(-n)}\right)}{d x} = (-n)\, x^{(-n)-1}, \tag{11}$$

womit gezeigt ist, daß die alte Formel [119 4]:

$$\frac{d(x^n)}{d x} = n x^{n-1}$$

auch für negative ganzzahlige Exponenten gilt. Im besonderen bemerke man:

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = d(x^{-1}) = -1 \cdot x^{-2} d x = -x^{-2} d x = - \frac{d x}{x^2}. \tag{12}$$

123. Das Differenzieren von Funktionen von Funktionen. Man zerlege:

$$y = f(\varphi(x)),$$

wie [56] gezeigt hat, in die beiden Gleichungen:

α) $\quad y = f(z),$ $\qquad$ β) $\quad z = \varphi(x)$

und differenziere zunächst diese, aber selbstverständlich α) „nach“ z, β) „nach“ x. Man erhält:

α) $\qquad dy = f'(z) dz; \quad dz = \varphi'(x) dx$

und durch Zusammenziehung:

$$dy = f'(z) \cdot \varphi'(x) \cdot dx,$$

oder nach Division durch dx:

$$\frac{df(\varphi(x))}{dx} = f'(z) \cdot \varphi'(x) = f'(z) \cdot z' = f'(z) \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \quad \text{I.}$$
$$(z = \varphi(x)).$$

In Worten: Um eine Funktion von einer Funktion zu differenzieren, differenziere man beide Funktionen und multipliziere die entstandenen Differentialquotienten oder Ableitungen. Dabei ist beim Differenzieren der ersten Funktion an Stelle der zweiten Funktion eine Zwischenveränderliche z zu setzen, die nachher wieder entfernt werden kann, wie I. andeutet.

(Nach einiger Übung lernt man sehr bald auf das wirkliche Hinschreiben von z verzichten, indem man sich z nur „denkt“, aber sofort statt seiner $\varphi(x)$ zurücksetzt. Der Buchstabe z wird daher nur in den ersten Beispielen erscheinen, in den späteren aber fehlen.)

Vierzehn Beispiele.

$$\frac{d\left((x^4)^3\right)}{dx} = \frac{dz^3}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 3z^2 \cdot 4x^3 = 3x^8 \cdot 4x^3 = 12x^{11}. \qquad (1)$$

(Auch dieses Beispiel soll nur eine Probe sein, denn man hätte hier kürzer rechnen können: $\frac{d\left((x^4)^3\right)}{dx} = \frac{d(x^{12})}{dx} = 12x^{11}$.)

$$\frac{d(\sin^2 x)}{dx} = \frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 2z \cdot \cos x = 2\sin x \cos x, \qquad (2)$$

$$\frac{d(\cos^2 x)}{dx} = \frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 2z \cdot - \sin x = - 2\sin x \cos x. \qquad (3)$$

(Es folgt $\frac{d(\sin^2 x + \cos^2 x)}{dx} = 0$, wie es sein muß, da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist [122].)

$$\frac{d(\sin 2x)}{dx} = \frac{d\sin z}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \cos z \cdot \frac{d(2x)}{dx} = 2\cos 2x, \qquad (4)$$

$$\frac{d\cos 3x}{dx} = - \sin 3x \cdot 3 = - 3\sin 3x, \qquad (5)$$

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,4x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot 4 = \frac{4}{\cos^2 x}, \qquad (6)$$

$$\frac{d\,\mathrm{cotg}\,(5x)}{dx} = - \frac{1}{\sin^2 5x} \cdot 5 = - \frac{5}{\sin^2 5x}, \qquad (7)$$

$$\frac{d(e^{-x})}{dx} = e^{-x} \cdot - 1 = - e^{-x}, \qquad (8)$$

$$\frac{d(x+2)^4}{dx} = 4 \cdot (x+2)^3 \cdot \frac{d(x+2)}{dx} = 4(x+2)^3 \cdot 1 = 4(x+2)^3 \qquad (9)$$

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{d\,e^{(x\ln a)}}{dx} = e^{x\ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x \qquad (10)$$

$$\frac{d \sin (e^x)}{dx} = \cos (e^x) \cdot e^x = e^x \cos (e^x) \tag{11}$$

$$\frac{d e^{(\sin x)}}{dx} = e^{(\sin x)} \cdot \cos x = \cos x e^{(\sin x)} \tag{12}$$

$$\frac{d \mathfrak{Sin}\, x}{dx} = \frac{d \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathfrak{Kof}\, x \tag{13}$$

$$\frac{d \mathfrak{Kof}\, x}{dx} = \frac{d(e^x + e^{-x})}{dx} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathfrak{Sin}\, x. \tag{14}$$

Man vergleiche (13) und (14) mit den Formeln $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$; $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$. Wieder zeigt sich die in § 7 hervorgehobene Verwandtschaft zwischen Hyperbelfunktionen und Kreisfunktionen. Als Ergänzung sei berechnet:

$$\frac{d \mathfrak{Tang}\, x}{dx} = \frac{d \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Kof}\, x}}{dx} = \frac{\mathfrak{Kof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x}{\mathfrak{Kof}^2 x}.$$

Formt man nun, entweder durch Dividieren oder durch Setzen von 1 für den Zähler [63 5], so folgt:

$$\frac{d \mathfrak{Tang}\, x}{dx} = 1 - \mathfrak{Tang}^2 x = \frac{1}{\mathfrak{Kof}^2 x}. \tag{15}$$

Ebenso ergibt sich:

$$\frac{d \mathfrak{Kotg}\, x}{dx} = \frac{d \frac{\mathfrak{Kof}\, x}{\mathfrak{Sin}\, x}}{dx} = \frac{\mathfrak{Sin}^2 x - \mathfrak{Kof}^2 x}{\mathfrak{Sin}^2 x}$$

$$\frac{d \mathfrak{Kotg}\, x}{dx} = 1 - \mathfrak{Kotg}^2 x = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 x} \tag{16}$$

Man vergleiche mit den Formeln (8) und (9) in [122]:

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Anmerkung. Für Anfänger im Differenzieren sei über die äußerst wichtige Formel I noch bemerkt: Es scheint sehr großer Übung zu bedürfen, ehe ihr Gebrauch zu einer reinen Fertigkeit in der Anwendung wird, was doch notwendig ist. Namentlich wird „in der Eile" gar häufig der zweite Faktor $\varphi'(x)$ übersehen, besonders wenn $\varphi(x)$ sehr einfach ist, wie in (4), (5), (6), (7), wo $\varphi(x) = 2x$, $3x$, $4x$, $5x$ ist. Daß:

$$\frac{d \sin 2x}{dx} = \cos 2x \text{ statt } \frac{d \sin 2x}{dx} = 2 \cdot \cos 2x$$

gerechnet wird, scheint zu Anfang beinahe selbstverständlich. Man achte also auf diese Gefahr, die um so dringender wird, als das

Vergessen von $\varphi'(x)$ in dem besonders häufig vorkommenden Falle, wo $\varphi(x)$ von der Form $x + C$ ist, wie in (9) nichts schadet, weil dann $\varphi'(x) = 1$ wird, und eben der Faktor 1 „vergessen“ werden darf, wie der Summand 0

$$a \cdot 1 = a, \quad a + 0 = a.$$

Man erhält also in diesem besonderen Falle:

$$\frac{df(a+x)}{dx} = f'(z) \cdot 1 = f'(z) \qquad (z = a + x). \tag{17}$$

Ist eine Funktion von einer Funktion von einer Funktion $y = f(\varphi(\psi(x)))$ zu differenzieren, so ziehe man in die drei Funktionen:

$$y = f(z), \; z = \varphi(u), \; u = \psi(x)$$

auseinander und differenziere jede von ihnen:

$$dy = f'(z)dz, \; dz = \varphi'(u)du, \; du = \psi'(x)dx.$$

Darauf ziehe man zusammen und dividiere durch dx. Es folgt:

$$\frac{df(\varphi(\psi(x)))}{dx} = f'(z) \cdot \varphi'(u) \cdot \psi'(x) = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(z = \varphi(u), \; u = \psi(x)). \tag{II}$$

Ebenso verfährt man bei Einschachtelung von vier, fünf, ... Funktionen. Man lernt auch bald, wie bei nur zwei Funktionen auf das Hinschreiben der Buchstaben $z, u \ldots$ für die Zwischenveränderlichen zu verzichten. Man hat stets soviel Differentialquotienten miteinander zu multiplizieren, als Funktionen ineinander eingeschachtelt sind.

Beispiele. $de^{(\sin 3x)} = e^{(\sin 3x)} \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot dx = 3 \cos 3x e^{(\sin 3x)} \cdot dx.$

$$\frac{d \sin(e^{(x^2)})}{dx} = \cos e^{(x^2)} \cdot e^{(x^2)} \cdot 2x = 2x e^{(x^2)} \cos e^{(x^2)}.$$

124. Das Differenzieren der Umkehrungen von Funktionen. Wenn y nach [58] mittelbar als Funktion von x durch die Funktion:

$$x = f(y) \tag{1}$$

gegeben ist, so differenziere man zunächst x „nach“ y. Es folgt:

$$dx = f'(y)dy; \quad dy = \frac{dx}{f'(y)},$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}. \tag{2}$$

Ist die Umkehrung von (1) zu einer selbständigen Funktion gemacht worden (Wurzeln, Logarithmen, arcusfunktionen, Areafunktionen):

$$y = \varphi(x) \tag{3}$$

so setze man (3) in (2) ein. Es folgt:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{f'(y)} \qquad (y = \varphi(x)). \tag{4}$$

Beispiele: I bis V.

I. Das Differenzieren von Wurzeln. Vorgelegt sei:

$$\alpha) \quad y = \sqrt[n]{x} \qquad \text{oder} \qquad \beta) \quad x = y^n.$$

Man differenziere β), aber „nach" y. Es folgt [119 4]:

$$dx = ny^{n-1}dy \quad \text{oder:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}},$$

oder:

$$\frac{d\sqrt[n]{x}}{dx} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{\,n-1}} \tag{5}$$

im besonderen:

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{5a}$$

Anmerkung: Schreibt man die Wurzeln als Potenzen, so folgt:

$$\frac{dx^{\left(\frac{1}{n}\right)}}{dx} = \left(\frac{1}{n}\right)x^{\left(\frac{1}{n}\right)-1}, \tag{5b}$$

d. h. die Formel [119 4]:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{6}$$

kann auch zum Differenzieren von Wurzeln benutzt werden. Sie gilt aber auch, wenn der Exponent ein beliebiger Bruch zweier ganzer Zahlen ist. Denn in diesem Falle setze man:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

und betrachte die rechte Seite als eine Funktion von einer Funktion. Also nach [123]:

$$\begin{aligned}\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{d\sqrt[n]{x^m}}{dx} &= \frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^m}^{\,n-1}}\cdot mx^{m-1} = \frac{m}{n}\cdot x^{m-1}x^{-\frac{m}{n}(n-1)} \\ &= \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}.\end{aligned} \tag{7}$$

Nach Beispiel 5 in VII [122] gilt (6) auch für negative n, wenn sie für positive n gilt. Erwägt man endlich, daß einerseits etwa auftretende irrationale Exponenten nach [86 2] Grenzfälle rationaler Exponenten sind und daß andererseits die Potenz eine stetige Funktion sowohl der Basis, als auch des Exponenten ist, so folgt:

Die Formel (6) gilt ganz allgemein, d. h. für jeden (selbstverständlich aber konstanten) Wert des Exponenten n.

II. Das Differenzieren der Logarithmen. Vorgelegt sei:

α) $y = \ln x$ oder β) $x = e^y$.

Man differenziere β) „nach“ y. Es folgt:

$$dx = e^y dy = x dy; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

d. h.:

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}; \quad d(\ln x) = \frac{dx}{x}. \tag{8}$$

Einen beliebigen Logarithmus schreibe man nach [43]:

$$\log_a x = M \ln x; \quad M = \log_a e = \frac{1}{\ln a},$$

daher:

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{M}{x}; \quad d \log_a x = \frac{M dx}{x}. \tag{9}$$

Für die Briggs'schen Logarithmen ist $a = 10$, $M = 0{,}434294\ldots$, also:

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{0{,}434294\ldots.}{x}; \quad d \log x = 0{,}434294 \frac{dx}{x}. \tag{9a}$$

III. Das Differenzieren der arcusfunktionen. Vorgelegt sei erstens:

α) $y = \text{arc}(\sin = x)$ oder β) $x = \sin y$, $\left(\sqrt{1 - x^2} = \cos y\right)$.

Man differenziere β) „nach“ y. Es folgt:

$$dx = \cos y dy = \sqrt{1 - x^2}\, dy; \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d. h.:

$$\frac{d \,\text{arc}(\sin = x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad d \,\text{arc}(\sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{10}$$

Vorgelegt sei zweitens:

α) $y = \text{arc}(\cos = x)$ oder β) $x = \cos y$, $\left(\sqrt{1 - x^2} = \sin y\right)$.

Man differenziere β) „nach“ y. Es folgt:

$$dx = -\sin y dy = -\sqrt{1 - x^2}\, dy; \quad dy = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d. h.:

$$\frac{d \,\text{arc}(\cos = x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad d \,\text{arc}(\cos = x) = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{11}$$

Vorgelegt sei drittens:

α) $y = \text{arc}(\text{tg} = x)$ oder β) $x = \text{tg}\, y$.

Man differenziere β) „nach“ y [122 8]:

$$dx = (1 + \text{tg}^2 y) dy = (1 + x^2) dy, \quad dy = \frac{dx}{1 + x^2},$$

d. h.:

$$\frac{d \,\text{arc}(\text{tg} = x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}; \quad d \,\text{arc}(\text{tg} = x) = \frac{dx}{1 + x^2}. \tag{12}$$

Vorgelegt sei viertens:

$\alpha)$ $y = \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x)$, also $\beta)$ $x = \operatorname{cotg} y$.

Man differenziere $\beta)$ „nach“ y [122 9]:

$$dx = -(1 + \operatorname{cotg}^2 y)dy = -(1 + x^2)dy, \quad dy = -\frac{dx}{1 + x^2},$$

d. h.:

$$\frac{d \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x)}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}; \quad d \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) = -\frac{dx}{1 + x^2}. \tag{13}$$

Anmerkung: Daß in (10) und (11) sowie in (12) und (13) die Ableitungen entgegengesetzte Vorzeichen haben, steht in völligem Einklang zu den Formeln (54 1 u. 1a).

$$\operatorname{arc}(\sin = x) + \operatorname{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) + \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) = \frac{\pi}{2}.$$

Man differenziere sie und bemerke, daß $d\frac{\pi}{2} = 0$ ist.

IV. Das Differenzieren der (hyperbolischen) Areafunktionen. Vorgelegt sei erstens:

$\alpha)$ $y = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x)$; also $\beta)$ $x = \mathfrak{Sin}\, y$, $\left(\sqrt{x^2 + 1} = \mathfrak{Cof}\, y\right)$.

Man differenziere $\beta)$ nach y [123 13]:

$$dx = \mathfrak{Cof}\, y\, dy = \sqrt{x^2 + 1}\, dy, \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

d. h.:

$$\frac{d\, \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad d\, \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}. \tag{14}$$

Vorgelegt sei zweitens:

$\alpha)$ $y = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Cof} = x)$, also $\beta)$ $x = \mathfrak{Cof}\, y$, $\left(\sqrt{x^2 - 1} = \mathfrak{Sin}\, y\right)$.

Man differenziere $\beta)$ „nach“ y. Es folgt [123 14]:

$$dx = \mathfrak{Sin}\, y\, dy = \sqrt{x^2 - 1}\, dy; \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

d. h.:

$$\frac{d\, \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Cof} = x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad d\, \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Cof} = x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{15}$$

Vorgelegt sei drittens:

$\alpha)$ $y = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = x)$, also $\beta)$ $x = \mathfrak{Tg}\, y$.

Man differenziere $\beta)$ „nach“ y [123 15]:

$$dx = (1 - \mathfrak{Tg}^2 y)dy = (1 - x^2)dy, \quad dy = \frac{dx}{1 - x^2},$$

d. h.:

$$\frac{d\, \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = x)}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}; \quad d\, \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = x) = \frac{dx}{1 - x^2}. \tag{16}$$

Vorgelegt sei viertens:

$\alpha)$ $y = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Cotg} = x)$, also $\beta)$ $x = \mathfrak{Cotg}\, y$.

Man differenziere β) „nach" y [123 16]:

$$dx = (1 - \mathfrak{Kotg}^2\, y)dy = (1 - x^2)dy; \quad dy = \frac{dx}{1 - x^2},$$

d. h.:

$$\frac{d\,\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kotg} = x)}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}; \quad d\,\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kotg} = x) = \frac{dx}{1 - x^2}. \tag{17}$$

Die vier Formeln (14), (15), (16), (17) können auch wie folgt abgeleitet werden: Man verwandle nach [67] die hyperbolischen Areafunktionen in natürliche Logarithmen und differenziere diese nach (8) unter Anwendung der sonstigen Formeln dieses §. Man erhält:

$$d\,\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Sin} = x) = d \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx$$

$$= \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$d\,\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kof} = x) = d \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}\right) dx$$

$$= \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$d\,\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Tg} = x) = d\,\frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1 + x}{1 - x}} \cdot \frac{(1 - x) \cdot 1 - (1 + x) \cdot (-1)}{(1 - x)^2}\, dx$$

$$= \frac{dx \cdot (1 - x)}{2(1 + x)} \cdot \frac{2}{(1 - x)^2} = \frac{dx}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{dx}{1 - x^2};$$

$$d\,\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kotg} = x) = d\,\frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x + 1}{x - 1}} \cdot \frac{(x - 1) \cdot 1 - (x + 1) \cdot 1}{(x - 1)^2} \cdot dx$$

$$= \frac{dx\,(x - 1)}{2(x + 1)} \cdot \frac{(-2)}{(x - 1)^2} = -\frac{dx}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{dx}{1 - x^2}.$$

V. Ist die Gleichung (1) nicht umkehrbar in (3), d. h. hat man diese Umkehrung nicht ausdrücklich zu einer selbständigen Funktion gemacht, so bleibt man natürlich bei (2) stehen und verzichtet wohl oder übel auf (4).

Beispiel. Vorgelegt sei die Keplersche Gleichung [58]:

$$M = E - e \sin E$$

mit dem Hintergedanken, daß „eigentlich" nicht M als Funktion von E, sondern umgekehrt E als Funktion von M zu betrachten sei. Man differenziere:

$$dM = dE - e \cos E\, dE = dE(1 - e \cos E)$$

und berechne hieraus:

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E}.$$

125. Differentiation einer Funktion, welche implizite durch eine Parameterdarstellung gegeben ist [60]:

$$\alpha) \quad x = \varphi(t), \qquad \beta) \quad y = \psi(t). \qquad (1)$$

Man differenziere alsdann (1α) und (1β) nach t:

$$\alpha) \quad dx = \varphi'(t)dt, \qquad \beta) \quad dy = \psi'(t)dt, \qquad (2)$$

so ergibt sich durch Division der gewünschte Differentialquotient von y „nach x“:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad (3)$$

allerdings wieder ausgedrückt nicht durch x, sondern durch t.

Beispiel. Für die gemeine Zykloide ist nach [60], wenn der abgerollte Zentriwinkel als Parameter eingeführt wird:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi).$$

Die Differentiation ergibt:

$$dx = r(1 - \cos\varphi)d\varphi, \quad dy = r\sin\varphi\, d\varphi,$$

daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r\sin\varphi\, d\varphi}{r(1 - \cos\varphi)d\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

daher:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

126. Differentiation einer Funktion, welche implizite durch eine Gleichung gegeben ist [59]:

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Unter Verweisung auf § 19 sei hier nur das Endergebnis mitgeteilt.

Man differenziere die Funktion $F(x, y)$ „nach“ x und „nach“ y indem man y bzw. x als konstant ansieht, d. h. man bilde die partiellen Ableitungen „nach“ x und „nach“ y:

$$p = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}, \qquad (2)$$

alsdann folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q} = -\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} : \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}. \qquad (3)$$

Diese Formel (3) gibt die Lösung. Allerdings, da p und q im allgemeinen sowohl von x als auch von y abhängen, in der Weise, daß der Differentialquotient ausgedrückt wird als eine Funktion, nicht von x allein, sondern von x und von y.

Erstes Beispiel: Vorgelegt sei die Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$$F(x, y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{4}$$

Hier ist:

$$p = \frac{2x}{a^2}, \quad q = \frac{2y}{b^2},$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{a^2} : \frac{2y}{b^2} = -\frac{xb^2}{ya^2}. \tag{5}$$

In diesem Falle hätte es der Bezugnahme auf § 19 nicht bedurft, weil er besonders einfach liegt. Man differenziere, wie eine Summe differenziert wird, also:

$$d\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + d\left(\frac{y^2}{b^2}\right) - d(1) = d(0),$$

$$d\left(\frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{2x}{a^2}\,dx, \quad d\left(\frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{2y\,dy}{b^2}, \quad d(1) = 0, \quad d(0) = 0,$$

daher:

$$\frac{2x\,dx}{a^2} + \frac{2y\,dy}{b^2} = 0;$$

mithin:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xb^2}{ya^2}.$$

Eine zweite Bestätigung würde man erhalten durch Übergang von (4) zur expliziten Darstellung:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

und darauf folgender expliziter Differentiation nach den früheren Formeln:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{6}$$

Setzt man hier für die Wurzel rückwärts ein $y\,\frac{a}{b}$, so entsteht wieder (5).

Zweites Beispiel: Vorgelegt sei die Gleichung des Kartesischen Blattes:

$$F(x, y) \equiv x^3 + y^3 - axy = 0.$$

Hier ist:

$$p = 3x^2 - ay; \quad q = 3y^2 - ax;$$

mithin:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - ay}{3y^2 - ax}.$$

127. Berechnung der zweiten Ableitung.

I. Ist die Funktion explizite gegeben: $y = f(x)$, so bilde man zunächst $y' = f'(x)$ und darauf aus $y' = f'(x)$ in gleicher Weise $y'' = f''(x)$. Oder kurz: Man differenziere $f(x)$ zweimal. Beispiele:

$y = x^n,\; y' = n x^{n-1};\quad y'' = n(n-1)x^{n-2};$

$y = \sin x,\; y' = \cos x;\quad y'' = -\sin x;$

$y = e^x,\; y' = e^x;\quad y'' = e^x;$

$y = \ln x,\; y' = \frac{1}{x} = x^{-1};\quad y'' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$

$y = \operatorname{arc}(\sin = x),\; y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}};\quad y'' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3};$

$y = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x),\; y' = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1},\; y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2};$

$y = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x),\; y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\; y'' = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}^3}.$

II. Ist die Funktion wie in [124] als Umkehrung der Funktion

$$x = f(y)$$

definiert, so bilde man, wie dort gezeigt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)};$$

folglich:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\frac{1}{f'(y)}}{dx} = \frac{d\frac{1}{f'(y)}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{f'(y)}\right)}{dy}.$$

Nach VII [122] ist, mit y als ursprünglicher Veränderlicher:

$$\frac{d\left(\frac{1}{f'(y)}\right)}{dy} = \frac{f'(y)\cdot 0 - 1 \cdot \frac{df'(y)}{dy}}{(f'(y))^2} = -\frac{f''(y)}{f'(y)^2},$$

also:

$$y'' = -\frac{f''(y)}{(f'(y))^3}. \tag{1}$$

Als Beispiel diene wieder die Keplersche Gleichung:

$$M = E - e \sin E$$

(mit M statt x, E statt y), also $f(y) = f(E) = E - e\sin E$. Es folgt:

$$f'(E) = 1 - e\cos E,\quad f''(E) = +e\sin E,$$

folglich nach (1):

$$E'' = \frac{dE'}{dM} = \frac{d\frac{dE}{dM}}{dM} = -\frac{e\sin E}{(1-e\cos E)^3}.$$

III. Ist wie in [125] die Parameterdarstellung gegeben:

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),$$

so bilde man, wie dort gezeigt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

folglich:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{dt} : \varphi'(t)$$

$$= \frac{\varphi'(t) \cdot d\frac{\psi'(t)}{dt} - \psi'(t)\ d\frac{\varphi'(t)}{dt}}{\varphi'(t)^2} : \varphi'(t),$$

oder:

$$y'' = \frac{\varphi'(t) \cdot \psi''(t) - \psi'(t) \cdot \varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}. \tag{2}$$

Als Beispiel diene wieder die gemeine Zykloide

$$\alpha)\quad x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad \beta)\quad y = r(1 - \cos\varphi),$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{r\sin\varphi}{r(1-\cos\varphi)} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}}{dx} = \frac{d\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} = -\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{1}{2} : [r \cdot (1 - \cos\varphi)],$$

$$y'' = -\frac{1}{4r\sin^4\frac{\varphi}{2}}.$$

Will man direkt nach (2) rechnen, so differenziere man α) und β) zweimal nach t. Es ergibt sich in der Bezeichnung (2):

$$\varphi'(t) = r(1 - \cos\varphi), \quad \varphi''(t) = r\sin\varphi,$$
$$\psi'(t) = r\sin\varphi, \quad \psi''(t) = r\cos\varphi,$$

$$y'' = \frac{r(1-\cos\varphi)\cdot r\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot r\sin\varphi}{[r(1-\cos\varphi)]^3} = \frac{\cos\varphi - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{r(1-\cos\varphi)^3}$$

$$= -\frac{1-\cos\varphi}{r(1-\cos\varphi)^3} = -\frac{1}{r(1-\cos\varphi)^2} = -\frac{1}{4r\sin^4\frac{\varphi}{2}}.$$

IV. Ist wie in [126] eine Gleichung $F(x, y) = 0$ gegeben, so bilde man wie dort gezeigt:

$$y' = -\frac{p}{q} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$$

und darauf, wie später § 19 gezeigt werden wird:

$$y'' = -\frac{r + 2sy' + ty'^2}{q}, \tag{3}$$

$$\left(r = \frac{\partial^2 F}{(\partial x)^2},\ s = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y},\ t = \frac{\partial^2 F}{(\partial y)^2}\right),$$

oder nach Einsetzen des vorigen Wertes für y':

$$y'' = -\frac{rq^2 - 2sqp + tp^2}{q^3}. \tag{3a}$$

Als Beispiel diene wieder die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$p = \frac{2x}{a^2}, \; q = \frac{2y}{b^2}; \quad r = \frac{\partial^2 F}{(\partial x)^2} = \frac{2}{a^2}, \; s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = 0, \; t = \frac{\partial^2 F}{(\partial y)^2} = \frac{2}{b^2},$$

also nach (3a):

$$y'' = -\frac{\frac{2}{a^2} \cdot \frac{4y^2}{b^4} - 0 + \frac{2}{b^2} \cdot \frac{4x^2}{a^4}}{\frac{8y^3}{b^6}} = -\frac{\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\right) b^4}{a^2 y^3} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}. \quad (4)$$

Als Probe differenziere man wie in [126] auch explizite:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$y'' = -\frac{b}{a}\frac{\sqrt{a^2 - x^2} \cdot 1 - x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}}{\sqrt{a^2 - x^2}^2} = -\frac{b(a^2 - x^2 + x^2)}{a\sqrt{a^2 - x^2}^3} = -\frac{ab}{\sqrt{a^2 - x^2}^3}.$$

Setzt man hier für $\sqrt{a^2 - x^2}$ wieder zurück: $y\frac{a}{b}$, so folgt (4).

Übungen zu § 14.

Gegeben die Gleichung zweiten Grades:

$$x^2 + 2xy + 3y^2 - 10x - 4y - 11 = 0$$

und es wird y implizite als Funktion von x betrachtet. Es sollen Ausdrücke für y' und y'' hergeleitet werden auf drei Weisen, nämlich:

1. durch implizites Differenzieren,
2. durch explizites Differenzieren nach expliziter Berechnung von y,
3. nachdem x und y durch einen Parameter λ mittelst der Gleichung

$$\lambda = \frac{y + 3}{x - 2}$$

ausgedrückt worden sind.

Nachher soll die Probe gemacht werden für $x = +2$, $y = -3$.

§ 15. Zwei Tafeln zur Differentialrechnung.

128. § 13 und § 14 enthalten die Hauptarbeit zur Grundlegung der Differentialrechnung. Erstens: Der Begriff eines Differentials und eines Differentialquotienten sind erklärt und im unmittelbaren Anschluß ist die abgeleitete Funktion als Grenzwert oder limes in aller Strenge definiert worden. Zweitens: Vollendet ist die Differentiation sämtlicher im ersten und zweiten Abschnitt zu-

sammengestellten elementaren Funktionen. Drittens: Vollständig entwickelt sind auch die Sätze über das Differenzieren zusammengesetzter und unentwickelter Funktionen mit alleiniger Ausnahme des in [126] betrachteten Falles, in welchem die Endergebnisse nur vorläufig vorweggenommen sind.

Die Hauptformeln sind in den folgenden beiden Tafeln zusammengestellt, da sie immer wieder gebraucht werden, wo und zu welchen Zwecken auch differenziert wird.

Tafel I

zur Differentialrechnung, enthaltend die wichtigsten allgemeinen Formeln.

Nr.	Formel
1	$f'(x) = \lim\limits_{h=0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}.$
1a	$f'(x) = \lim \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (\lim x_2 = x,\ \lim x_1 = x,\ x_2 \neq x_1).$
	$y = f(x).$
	$dy = df(x) = (y' + \varepsilon)dx = (f'(x) + \varepsilon)dx$
2	$= y'dx + \varepsilon dx = f'(x)dx + \varepsilon dx \qquad (\lim \varepsilon = 0).$
2a	$y = f(x).$
	$dy = df(x) = y'dx = f'(x)dx.$
	$y = f(x).$
3	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx} = y' + \varepsilon = f'(x) + \varepsilon \qquad (\lim \varepsilon = 0).$
3a	$y = f(x).$
	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx} = y' = f'(x).$
	$y = f(x).$
4	$y'' = f''(x) = \lim\limits_{(h=0)} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$
5	$dC = 0.$
6	$d(u \pm v \pm w \pm \cdots) = du \pm dv \pm dw \pm \cdots$
6a	$d(u + C) = du.$
7	$d(au) = a\,du.$
7a	$d\,\dfrac{u}{a} = \dfrac{du}{a}.$
8	$d(uv) = v\,du + u\,dv = uv\left(\dfrac{du}{u} + \dfrac{dv}{v}\right).$

Nr.	Formel
8a	$d(uvw\ldots) = uvw\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \cdots\right).$
8b	$\frac{d(uvw\ldots)}{uvw\ldots} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \cdots$ (logarithmisches Differenzieren eines Produktes.)
9	$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \frac{\text{Nenner} \cdot d(\text{Zähler}) - \text{Zähler} \cdot d(\text{Nenner})}{(\text{Nenner})^2}.$
10	$d\big(f(\varphi(x))\big) = df(z) = \frac{df(z)}{dz}dz = f'(z)\cdot\frac{dz}{dx}dx$ $= f'(z)\cdot z'dx \quad (z = \varphi(x)).$
10a	$\frac{df(\varphi(x))}{dx} = f'(z)\cdot z' = f'(z)\cdot\varphi'(x) \quad (z = \varphi(x)).$
10b	$\frac{df\big(\varphi(\psi(x))\big)}{dx} = f'(z)\cdot\varphi'(u)\cdot\psi'(x) \quad (z = \varphi(u),\ u = \psi(x)).$
11	$x = f(y)$ (y implizite als Funktion von x gedacht). $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}.$
12	$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ (y implizite Funktion von x). $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$
13	$F(x, y) = 0$ (y implizite Funktion von x). $p = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x},\ q = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 F}{(\partial x)^2},\ s = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y},\ t = \frac{\partial^2 F}{(\partial y)^2}$ $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q} = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}.$
14	$z = F(x, y).$ $dz = p\,dx + q\,dy = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy.$ (Satz vom totalen Differential.)

Tafel II

zur Differentialrechnung, enthaltend die erste und die zweite Ableitung elementarer Funktionen.

Nr.	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$y'' = f''(x)$
1	x^n	$n x^{n-1}$	$n(n-1)x^{n-2}$
2	e^x	e^x	e^x
2 a	a^x	$a^x \ln a$	$a^x (\ln a)^2$
3	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
4	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
5	$\operatorname{tg} x$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$2 \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg} x$
6	$\operatorname{cotg} x$	$-(1+\operatorname{cotg}^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$2 \operatorname{cotg}^3 x + 2 \operatorname{cotg} x$
7	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$-\frac{n-1}{n^2 \sqrt[n]{x^{2n-1}}}$
8	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$+\frac{2}{x^3}$
9	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
9 a	$\log_a x$	$\frac{M}{x}$	$-\frac{M}{x^2}$
10	$\operatorname{arc}(\sin = x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3}$
11	$\operatorname{arc}(\cos = x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3}$
12	$\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
13	$\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$+\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
14	$\mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathfrak{Kof}\, x$	$\mathfrak{Sin}\, x$
15	$\mathfrak{Kof}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathfrak{Sin}\, x$	$\mathfrak{Kof}\, x$
16	$\mathfrak{Tg}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$1 - \mathfrak{Tg}^2 x = \frac{1}{\mathfrak{Kof}^2 x}$	$2 \mathfrak{Tg}^3 x - 2 \mathfrak{Tg}\, x$
17	$\mathfrak{Kotg}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$1 - \mathfrak{Kotg}^2 x = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 x}$	$2 \mathfrak{Kotg}^3 x - 2 \mathfrak{Kotg}\, x$
18	$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x)$ $= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}^3}$
19	$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kof} = x)$ $= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}^3}$
20	$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = x)$ $= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{2x}{(1-x^2)^2}$
21	$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Kotg}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{2x}{(1-x^2)^2}$

129. Bemerkungen zu Tafel I.

Nr. 1 und 1a sind anzusehen als Definitionen der abgeleiteten Funktion mittels eines Grenzwertes oder limes.

Nr. 2 bis 3a geben die Beziehungen zwischen den Differentialen bzw. dem Differentialquotienten und der abgeleiteten Funktion. In der Regel nimmt man 2a oder 3a statt 2 oder 3, indem man die unendlich kleine Größe ε bzw. εdx fortläßt, aber den Vorbehalt macht, sie, wenn nötig, wieder zu ergänzen.

In 6 darf die Anzahl der Summanden beliebig groß sein. (Wenn aber statt der Summe eine unendliche Reihe gesetzt wird, so bedarf es noch einer besonderen Untersuchung, ob das Differentiale einer solchen Reihe gleich der Reihe der Differentiale ihrer Glieder ist. Richtig ist es z. B. nach [116] für Potenzreihen innerhalb des Spielraums ihrer Konvergenz. Falsch dagegen ist es für manche anderen Reihen. Übrigens gilt ein gleiches für das Differenzieren unendlicher Produkte nach 8b.)

Bemerkungen zu Tafel II.

Erstens. Es seien nochmals die Voraussetzungen der Stetigkeit und der Eindeutigkeit hervorgehoben, sowie daß manche der in dieser Tafel genannten Funktionen nur in beschränkten Spielräumen, wie z. B. $\operatorname{arc}(\sin = x)$ und $\operatorname{arc}(\cos = x)$ in dem Spielraum von x zwischen $+1$ und -1 existieren. Man hat hierauf bei dem Gebrauch der Tafel die allergrößte Rücksicht zu nehmen.

Zweitens. In der Tafel II ist nicht eine einzige Nummer enthalten, wo eine Unstetigkeitsstelle von $f(x)$ nicht zugleich eine Unstetigkeitsstelle von $f'(x)$ (und $f''(x)$) wäre. So ist z. B. $\operatorname{tg} x$ unstetig (und unendlich) für $x = \frac{\pi}{2}$ und in der Tat ist auch nach 5 die abgeleitete Funktion an derselben Stelle unstetig und unendlich.

Die Umkehrung würde aber nicht stimmen! Denn es kann sich sehr wohl an einer Unstetigkeitsstelle von $f'(x)$ die ursprüngliche Funktion durchaus stetig verhalten. Beispiel: An der Stelle $x = 0$ ist:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x} = 0; \quad y' = f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \infty.$$

Ferner ist $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ nach beiden Seiten fortsetzbar, da Wurzeln mit ungeraden Exponenten sowohl für positive wie für negative Werte existieren (und nur einen Wert haben). Außerdem ist y an dieser Stelle wirklich stetig. Denn setzt man in der allgemeinen Formel $dy = df(x) = f(x + dx) - f(x)$ für x den Wert 0, so folgt:

$$dy = \sqrt[3]{dx} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{dx},$$

also ist dy auch an dieser Stelle unendlich klein, allerdings von niederer Ordnung als dx.

Auf die Integralrechnung übertragen heißt dies, daß eine Unstetigkeitsstelle des Integranden nicht immer eine Unstetigkeitsstelle des Integrals zu sein braucht. Vgl. § 31.

Drittens. Jede Nummer der Tafel II stellt (nach 2a und 3a aus Tafel I) zugleich eine Differentialformel vor. So z. B. die Nummer 1:

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx; \quad \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Übrigens gilt 1 für alle Werte von n, so daß 7 und 8 eigentlich überflüssig sind.

Viertens. Vom funktionentheoretischen Standpunkt sei hervorgehoben, daß in Tafel II keine Nummer aufgezeigt werden kann, wo einer algebraischen Funktion $f(x)$ eine transzendente Funktion $f'(x)$ entsprechen würde. Vielmehr entspricht ganz allgemein einer algebraischen ursprünglichen Funktion immer eine algebraische abgeleitete Funktion, selbst wenn man das Wort algebraisch im weitesten Sinne versteht [69].

Die Umkehrung aber wäre falsch! Denn wie z. B. 9 in Tafel II zeigt, kann sehr wohl die Ableitung algebraisch sein trotz der Transzendentalität der ursprünglichen Funktion. Wie man ferner sieht, sind es die Umkehrungen der ursprünglichen transzendenten Funktionen, also die Logarithmen, die arcus-Funktionen und die Area-Funktionen, welche diese sehr bemerkenswerte Eigenschaft haben, daß ihre Ableitungen algebraisch sind. [Selbst wenn der Integrand algebraisch ist, kann das Integral transzendent sein (aber nicht umgekehrt).]

130. Die beiden Tafeln reichen vollständig aus, um alle expliziten und impliziten Funktionen, welche irgendwie aus Potenzen, Wurzeln, Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen, Hyperbelfunktionen, Logarithmen, arcus-Funktionen und Area-Funktionen zusammengesetzt sind, zu differenzieren. Mag dabei der Funktionsausdruck so lang und verwickelt sein, wie er wolle; dies kann wohl das Differenzieren umständlich und beschwerlich machen, aber keine grundlegenden Schwierigkeiten mehr bieten. Letztere sind vielmehr in § 13 und § 14 aus dem Wege geräumt worden, und zwar ein- für allemal.

Anders ausgedrückt: Die beiden Tafeln machen hinfort das Differenzieren solcher Funktionen zu einer völlig elementaren Rechnung. Dies ist ihr Hauptzweck. Es soll bei der Ausführung einer Differentiation keine limes-Betrachtung, keine eigentliche limes-Rechnung mehr nötig sein, denn was davon nötig war, ist schon vorher dragewesen und soll ein- für allemal als erledigt gelten [122], wenn man wirklich differenziert.

So ist es möglich, durch vielfachen Gebrauch der beiden Tafeln das Differenzieren zu einer reinen Fertigkeit zu machen, die wie jede andere Fertigkeit durch Übung erworben und durch Übung erhalten und befestigt werden kann und werden soll und werden muß, wenn man nicht gegeben Falls trotz schärfster Klarheit in der allgemeinen Auffassung elend in der Ableitung der Formeln stecken bleiben will.

Wird eine Funktion $f(x)$ zum Differenzieren vorgelegt, so muß man sofort wissen, welche Nummern der beiden Tafeln neben- oder nacheinander zu nehmen sind. Daß man zuletzt, nach vollendeter Differentiation noch $f'(x)$ auf die einfachste Form zu bringen hat, falls sie noch fehlen sollte, versteht sich von selbst. Zwei etwas umständlichere Beispiele A) und B) mögen dies erläutern:

A) $$y = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\right)$$

soll differenziert werden. Zunächst ist y eine Funktion von einer Funktion, also I 10, nachdem für den Bruch der Buchstabe z geschrieben oder besser nur „gedacht" worden ist, worauf II 10 in Frage kommt. Also:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\right)^2}} \cdot \frac{d\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\right)}{dx}.$$

Nunmehr kommt I 9, II 3, I 6a, I 10 und II 4 an die Reihe. Daher:

$$y' = \frac{(1+\cos^2 x)\cos x - \sin x \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x)}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\right)^2}\,(1+\cos^2 x)^2}.$$

Die Differentiation selbst ist vollendet. Es bleibt nur noch übrig, möglichst zu vereinfachen. Der Radikand ist:

$$\frac{(1+\cos^2 x)^2 - \sin^2 x}{(1+\cos^2 x)^2} = \frac{1+2\cos^2 x + \cos^4 x - (1-\cos^2 x)}{(1+\cos^2 x)^2} = \frac{\cos^2 x(3+\cos^2 x)}{(1+\cos^2 x)^2}.$$

Der Zähler ist, wenn $\sin^2 x$ durch $1-\cos^2 x$ ersetzt wird:

$$\cos x + \cos^3 x + 2\cos x - 2\cos^3 x = \cos x\,(3-\cos^2 x).$$

Setzt man dies ein, hebt dann im Nenner den Faktor $1+\cos^2 x$ einmal fort und ebenso im Zähler und Nenner den Faktor $\cos x$, so folgt:

$$y' = \frac{3-\cos^2 x}{1+\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+\cos^2 x}},$$

womit der einfachste Ausdruck für y' hergestellt ist.

B) $$y = -\frac{1}{9(1+x)} + \frac{2}{9}\ln(1+x) + \frac{1}{9(1-x+x^2)} + \frac{1}{9}\,\frac{x}{1-x+x^2}$$
$$-\frac{1}{9}\ln(1-x+x^2) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

y ist eine Summe, also I 6, der letzte Summand ist konstant, also I 5. In den anderen Summanden treten konstante Faktoren auf, also I 7. Ferner sind Brüche und Funktionen von Funktionen da, also I 9 und I 10. Aus II kommen in Betracht II 8, II 9, II 1 und II 12. Die Ausführung ergibt:

$$y' = +\frac{1}{9(1+x)^2}\cdot 1 + \frac{2}{9(1+x)}\cdot 1 - \frac{1}{9(1-x+x^2)^2}\cdot(2x-1)$$
$$+\frac{(1-x+x^2)\cdot 1 - x(2x-1)}{9(1-x+x^2)^2} - \frac{2x-1}{9(1-x+x^2)} + \frac{2}{3\sqrt{3}\left(1+\frac{(2x-1)^2}{3}\right)}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Das Produkt der Nenner im letzten Glied ist:

$$= 3(3+(2x-1)^2) = 3\cdot 4(1-x+x^2).$$

Die 4 hebt sich gegen den Zähler. Der (kleinste) Generalnenner ist somit:

$$= 9(1+x)^2(1-x+x^2)^2 = 9(1+x^3)^2.$$

Nach Erweiterung auf diesen Generalnenner wird der Zähler:

$$=(1-x+x^2)^2+2(1-x+x^2)^2(1+x)-(2x-1)(1+x)^2+(1-x^2)(1+x)^2$$
$$-(2x-1)(1-x+x^2)(1+x)^2+3(1-x+x^2)(1+x)^2.$$

Es wird nichts anderes übrig bleiben, als auszumultiplizieren. Man erhält:

$$(1-2x+3x^2-2x^3+x^4)+(2-2x+2x^2+2x^3-2x^4+2x^5)$$
$$+(1-3x^2-2x^3)+(1+2x-2x^3-x^4)$$
$$+(1-x-2x^2+x^3-x^4-2x^5)+(3+3x+3x^3+3x^4).$$

Es bleibt nur 9 übrig. Daher endlich:

$$y' = \frac{1}{(1+x^3)^2}.$$

Es sei wiederholt: Die Grundlegung der Differentialrechnung ist in § 13, § 14 und § 15 vollendet. Über das eigentliche Differenzieren, d. h. über die Auffindung der abgeleiteten Funktion ist alles beigebracht, und es kann keinen Fall geben, wo diese Auffindung noch auf prinzipielle Schwierigkeiten stoßen könnte. Wer das Vorangegangene ganz erfaßt und durch gehörige Übung Differenzieren gelernt hat, wer sowohl versteht, was Differentiale, Differentialquotient und abgeleitete Funktion an sich sind, als auch wirklich nach gehöriger Übung differenzieren kann, der mag einer solchen Grundlage wohl vertrauen. Was auch noch kommen mag, schwieriger wird es alsdann nicht mehr sein, als diese drei Paragraphen waren.

Übungen zu § 15.

Die folgenden Funktionen sind zu differenzieren:

$$\frac{5+3x}{3-4x}, \quad \frac{3+4x+5x^2}{6+7x+8x^2}, \quad (1+x)^7, \quad (1-x)^7, \quad (3-2x)^7, \quad \ln e^x \qquad \text{Nr. 1—6.}$$

$$\ln\sin x, \quad \ln\cos x, \quad \sin x\cdot e^x, \quad \cos x\cdot e^x,$$

$$\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}\right)e^x. \qquad \text{Nr. 7—11.}$$

$$\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}\right)\sin x-\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}\right)\cos x. \qquad \text{Nr. 12.}$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{3x}{1+2x^2}\right), \quad \operatorname{arc}(\sin=\cos x), \quad \operatorname{arc}(\cos=\sin x). \qquad \text{Nr. 13—15.}$$

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{4+5\operatorname{tg}x}{5-4\operatorname{tg}x}\right), \quad \operatorname{arc}(\sin=2x^2-1), \quad \operatorname{arc}\left(\cos=2x\sqrt{1-x^2}\right). \qquad \text{Nr. 16—18.}$$

$$\operatorname{arc}\left(\sin=\tfrac{4}{5}\sin x-\tfrac{3}{5}\cos x\right), \quad \operatorname{arc}\left(\sin=\tfrac{4}{5}x+\tfrac{3}{5}\sqrt{1-x^2}\right). \qquad \text{Nr. 19—20.}$$

$$(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+97}+88\ln\left(2x+3+\sqrt{4x^2+12x+97}\right). \qquad \text{Nr. 21.}$$

$$(2x-3)\sqrt{97+12x-4x^2}+106\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{2x-3}{\sqrt{106}}\right). \qquad \text{Nr. 22.}$$

$$\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+12x+97}}; \quad \frac{8x^3+36x^2+318x+423}{\sqrt{4x^2+12x+97}^{\,3}}. \qquad \text{Nr. 23—24.}$$

$$\frac{\cos^2 x\sin x}{3}\left(x^4-\frac{4}{3}x^2+\frac{8}{27}\right)+\frac{\cos^3 x}{9}\left(4x^3-\frac{8x}{3}\right)+\frac{\sin x}{3}\left(2x^4-\frac{80}{3}x^2+\frac{1456}{27}\right)$$
$$+\frac{\cos x}{3}\left(8x^3-\frac{160}{3}x\right). \qquad \text{Nr. 25.}$$

$$x^x, \quad \sin x^x, \quad x^{\sin x}, \quad \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{a+bx}{a-bx}\right), \quad \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{a+bx}{b-ax}\right). \qquad \text{Nr. 26—30.}$$

$$\left(\alpha-\frac{\beta b}{2c}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{D}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{cx+\frac{b}{2}}{\sqrt{D}}\right)+\frac{\beta}{2c}\ln(a+bx+cx^2); \qquad \text{Nr. 31.}$$

$$\left(D=ac-\left(\frac{b}{2}\right)^2>0\right).$$

$$\mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Cos}=ax+\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{a^2-1}\right), \quad \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Cos}=a\sqrt{x^2-1}+x\sqrt{a^2-1}\right). \qquad \text{Nr. 32—33.}$$

$$\mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Tg}=\frac{4+5x}{5+4x}\right), \quad \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Cotg}=\frac{4+5\,\mathfrak{Tg}\,x}{5+4\,\mathfrak{Tg}\,x}\right). \qquad \text{Nr. 34—35.}$$

$$\sin\left(\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{4+5\operatorname{tg}x}{5-4\operatorname{tg}x}\right)\right), \quad \cos(\operatorname{arc}(\sin=\sin x)). \qquad \text{Nr. 36—37.}$$

$$\ln\frac{2x+3}{4x+3}, \quad \operatorname{arc}\left(\sin=\frac{2+3x}{\sqrt{5+12x+9x^2}}\right). \qquad \text{Nr. 38—39.}$$

$$\left(\alpha - \frac{\beta b}{2c}\right) \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{-D}} \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Tg} = \frac{cx + \frac{b}{2}}{\sqrt{-D}}\right) + \frac{\beta}{2c} \ln(a + bx + cx^2); \qquad \text{Nr. 40.}$$

$$\left(D = ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 < 0\right).$$

$$-\tfrac{1}{2}\ln(2\sqrt{3 + 4x + 5x^2} + 1 - 3x) + \tfrac{1}{2}\ln(1 + x). \qquad \text{Nr. 41.}$$

$$\frac{1}{1+k}\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{(1+k)x}{1+kx^2}\right), \quad \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right). \qquad \text{Nr. 42—43.}$$

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{a\sin x - b\cos x}{b\sin x + a\cos x}\right), \quad \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{4 + 5\operatorname{tg} x}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\right). \qquad \text{Nr. 44—45.}$$

$$\ln\frac{\sqrt{4x^2 + 12x + 27} + (2x+3)}{\sqrt{4x^2 + 12x + 27} - (2x+3)}, \quad \ln(\operatorname{tg} x), \quad \operatorname{tg}(\ln x). \qquad \text{Nr. 46—48.}$$

$$\ln\frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}, \quad \frac{1}{8}\ln\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}. \qquad \text{Nr. 49—50.}$$

§ 16. Analytische Anwendungen der abgeleiteten Funktion.

131. Nachdem ausführlich gezeigt worden ist, wie zu einer Funktion die abgeleitete Funktion ermittelt werden kann, drängen die einstweilen zurückgestellten Anwendungen hervor. Was hat man an der abgeleiteten Funktion, was an der abgeleiteten Funktion dieser abgeleiteten Funktion usw., das sind sehr berechtigte Fragen. Man will doch wissen, wozu das Differenzieren gut ist.

In diesem § sind die einfachsten analytischen Anwendungen enthalten.

Zu- oder Abnahme des Funktionswertes. Die Gleichung:

$$dy = df(x) = (y' + \varepsilon)dx = (f'(x) + \varepsilon)dx$$

beweist nicht allein, daß dx und dy zugleich verschwinden, sondern auch, daß diese beiden Differentiale zugleich ihr Vorzeichen wechseln. Das Vorzeichen der abgeleiteten Funktion y' entscheidet, ob dabei x und y sich an der betreffenden Stelle in gleichem oder in ungleichem Sinne ändern, d. h. ob x und y zugleich zunehmen und zugleich abnehmen, oder ob y zunimmt, wenn x abnimmt und y abnimmt, wenn x zunimmt. Denn da ε unendlich klein ist, so haben y' und $y' + \varepsilon$ dasselbe Vorzeichen. Ist also y' positiv, so entspricht einem positiven dx ein positives dy und einem negativen dx ein negatives dy; ist aber y' negativ, so entspricht einem positiven dx ein negatives dy und einem negativen dx ein positives dy.

So lange die Funktion und ihre Ableitung endlich und stetig bleiben, kann eine Ausnahme hiervon nur eintreten, wenn die Ab-

leitung verschwindet. An einer solchen Stelle ist:

$$dy = df(x) = \varepsilon dx,$$

d. h. dy ist von höherer Ordnung unendlich klein als dx, oder y ändert sich unendlich langsam gegen x. Im übrigen entscheidet dann ε. Hat ε dasselbe Vorzeichen wie dx, so wird dy positiv, gleichgültig, ob dx negativ oder positiv ist. Der betreffende Funktionswert ist ein Minimum. Hat ε das entgegengesetzte Vorzeichen wie dx, so wird dy negativ, gleichgültig ob dx negativ oder positiv ist. Der betreffende Funktionswert ist ein Maximum. Es kann aber auch ein Maximum-Minimum oder ein Minimum-Maximum vorliegen, oder auch noch anders sein. Näheres in § 20.

Erstes Beispiel. Vorgelegt sei die Funktion:

$$y = \sin x; \quad \text{also} \quad y' = \cos x; \quad d(\sin x) = (\cos x + \varepsilon)dx.$$

Wächst x von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so wächst $\sin x$ von 0 bis $+1$ und in der Tat ist $y' = \cos x$ in diesem Spielraum positiv. Die Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ gibt $y' = 0$ und $y = \sin x$ wird ein Maximum, nämlich $= +1$. Wächst x von $\frac{\pi}{2}$ bis π, so nimmt y ab von $+1$ bis 0, und in der Tat ist $y' = \cos x$ in diesem Spielraum negativ. Wächst x weiter von π bis $\frac{3}{2}\pi$, so nimmt y weiter ab von 0 bis -1, und in der Tat ist $y' = \cos x$ in diesem Spielraum negativ. Die Stelle $x = \frac{3}{2}\pi$ gibt $y' = 0$ und $y = \sin x$ wird ein Minimum, nämlich $= -1$. Wächst x endlich von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π, so nimmt y wieder zu von 0 bis 1, und in der Tat wird $y' = \cos x$ positiv.

Zweites Beispiel. Wie verhält sich die Funktion:

$$y = x^4 - 6x^2 - 5x - 7$$

an der Stelle $x = +2$?. Es ist:

$$y' = 4x^3 - 12x - 5, \text{ also für } x = 2 \text{ wird } y' = 32 - 24 - 5 = +3$$

oder $dy = 3dx$. Daher wächst y mit x und nimmt ab mit x in der Umgebung von $x = 2$.

Man merke also ein für alle mal: Das Vorzeichen der abgeleiteten Funktion entscheidet, ob die Veränderliche und die Funktion sich in gleichem oder ungleichem Sinne ändern. Ihr absoluter Wert bestimmt das absolute Verhältnis beider (unendlich kleinen) Änderungen.

Jedoch muß die Bedingung der Stetigkeit durchaus erfüllt sein und wo sie eine Unterbrechung erleidet, kann es ganz anders sein, (vgl. [113]). So zeigt die Gleichung:

$$d \operatorname{tg} x = (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx,$$

daß $\operatorname{tg} x$ und x im allgemeinen für jeden Wert von x zugleich wachsen und zugleich abnehmen. Aber auszuschließen sind die Stellen $x = \pm \frac{\pi}{2}$, $\pm \frac{3}{2}\pi$, $\pm \frac{5}{2}\pi \ldots$, welche Unstetigkeits-, ja sogar Unendlichkeitsstellen sowohl für die ursprüngliche Funktion $\operatorname{tg} x$ als auch für die abgeleitete Funktion $1 + \operatorname{tg}^2 x$ sind. In der Tat springt ja hier $\operatorname{tg} x$ von $+\infty$ bis $-\infty$, wenn x wachsend durch eine solche Stelle hindurchgeht (vgl. [49]).

132. Jede Funktion kann in der unmittelbaren Umgebung eines Wertepaares durch eine ganze Funktion ersten Grades, also durch die einfachste aller Funktionen überhaupt ersetzt werden, wenn man von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung absieht.

Beweis. Die Gleichung:

$$dy = y' dx = f'(x) dx \tag{1}$$

ist bis auf Glieder höherer Ordnung richtig [117]. Man nehme für x einen beliebigen Wert x_0 als fest an, setze dann noch $y_0 = f(x_0)$ und $y_0' = f'(x_0)$ und gehe von dem Wertepaar (x_0, y_0) zu einem unendlich benachbarten Wertepaar (x, y) über, also daß $dx = x - x_0$ und $dy = y - y_0$ wird. Nach dieser kleinen Änderung erhält (1) die Gestalt:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0) \quad \text{oder} \quad y = y_0 + (x - x_0) y_0'. \tag{2}$$

Man setze hier der Kürze wegen:

$$a = y_0 - x_0 y_0', \quad b = y_0', \tag{3}$$

so wird aus (2) in der Tat:

$$y = a + bx. \tag{4}$$

Doch sei nochmals bemerkt: Erstens „bis auf Größen höherer Ordnung" ist (4) richtig. Zweitens: Auch nur in unmittelbarer Umgebung von $(x_0 y_0)$.

Beispiel. Gegeben sei die Funktion:

$$y = f(x) = x^3 - 7x + 8.$$

Durch welche ganze Funktion ersten Grades ist sie ersetzbar an der Stelle $x_0 = +2$? Es ist:

$$y_0 = f(x_0) = 8 - 14 + 8 = +2, \quad y_0' = 3x^2 - 7 = 12 - 7 = 5,$$

daher nach (2):

$$y = 2 + 5(x - 2) = 5x - 8.$$

Zur Probe setze man rechts noch ein Restglied R hinzu, schreibe also:

$$y = 5x - 8 + R, \text{ d. h.: } x^3 - 7x + 8 = 5x - 8 + R,$$

also:

$$R = x^3 - 12x + 16.$$

Es sei $x = 2 + dx$, so wird:

$$\begin{aligned} R &= (2 + dx)^3 - 12(2 + dx) + 16 \\ &= 8 + 12dx + 6(dx)^2 + (dx)^3 - 24 - 12dx + 16 \\ &= 6(dx)^2 + (dx)^3. \end{aligned}$$

Der Unterschied ist in der Tat von höherer Ordnung als dx.

133. Abgeleitete Funktion und Differenzenquotient. Läßt man die ursprüngliche Veränderliche alle Werte zwischen zwei Werten x und $x + \Delta x$ durchlaufen, und bezeichnet die beiden diesen Grenzen zugehörigen Werte der Funktion mit:

$$y = f(x) \text{ und } y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

so ist unter allen Werten, welche die abgeleitete Funktion $y' = f'(x)$ in demselben Spielraum durchläuft, mindestens einer vorhanden, der dem (ersten) Differenzenquotienten:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

gleich ist.

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz [33] ist A ein Mittelwert aller Differenzenquotienten, die bei beliebiger Teilung des Spielraumes entstehen würden. Da diese Teilung unbegrenzt fortgesetzt werden kann, so ist A auch ein Mittelwert aller Differentialquotienten, also nach der Gleichung [116 4]:

$$\frac{dy}{dx} = y' + \varepsilon = f'(x) + \varepsilon$$

auch ein Mittelwert aller Werte, welche $y' + \varepsilon$ in dem ganzen Spielraum einnimmt, also auch, da die ε sämtlich unendlich klein sind, ein Mittelwert aller Werte, welche y' selbst in dem Spielraum annimmt. Andererseits ist y' eine stetige Funktion von x [120], daher muß dieser Mittelwert mindestens einmal als wirklicher Wert von y' in diesem Spielraum vorkommen.

Erstes Beispiel. Gegeben sei die Funktion:

$$y = x^3 - 2x^2 + 12x - 17; \text{ also } y' = 3x^2 - 4x + 12.$$

Man setze für x nacheinander $+1$ und $+3$, was für y die Werte -6 und $+28$ ergibt, also:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(+28) - (-6)}{(+3) - (+1)} = \frac{34}{2} = +17.$$

Die Bedingung $y' = +17$ führt zu der quadratischen Gleichung $3x^2 - 4x - 5 = 0$, welche die beiden Wurzeln hat:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{19}}{3}; \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{19}}{3}.$$

Die eine, nämlich die erste, liegt wirklich zwischen $+1$ und $+3$.

Zweites Beispiel. Gegeben sei die Funktion:

$$y = \frac{1}{x}; \text{ also } y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Man setze für x nacheinander $+2$ und -3, was für y die Werte $+1:2$ und $-1:3$ ergibt, also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{1}{2}\right)}{-3 - (+2)} = +\frac{1}{6}.$$

Die Bedingung $y' = +1:6$ führt zu der Gleichung:

$$x^2 = -6,$$

welche nur imaginäre Wurzeln hat. Der Satz stimmt diesmal nicht! Er brauchte aber auch nicht zu stimmen. In der Tat liegt in dem Spielraum zwischen $x = +2$ und $x = -3$ eine Unstetigkeitsstelle, nämlich $x = 0$, für welchen Wert die Funktion und ihre Ableitung unendlich groß werden! Vgl. Erste Bemerkung zu Tafel II.

134. Es sei x_m der in [133] genannte Mittelwert der ursprünglichen Veränderlichen, also daß x_m zwischen x und $x + \Delta x$ liegt. Daher nach [11 2]:

$$x_m = x + \lambda \Delta x, \qquad (1 > \lambda > 0) \quad (1)$$

alsdann wird der zugehörige Wert der abgeleiteten Funktion:

$$y' = f'(x_m) = f'(x + \lambda \Delta x)$$

und nach [133] ist λ so bestimmbar, daß:

$$\alpha) \qquad A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x + \lambda \Delta x)$$

$$\text{oder:} \quad \beta) \qquad \Delta y = \Delta f(x) = f'(x + \lambda \Delta x) \cdot \Delta x \qquad (2)$$

wird. Und diese Formel drückt kurz und treffend den Sachverhalt aus. Es gibt mindestens einen Wert von λ zwischen 0 und $+1$, für welchen (2) erfüllt wird. Ist z. B. $f(x)$ eine ganze Funktion ersten Grades:

$$y = f(x) = a + bx,$$

so gibt es nur einen konstanten Differenzenquotienten:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a + b(x + \Delta x)) - (a + bx)}{\Delta x} = b$$

und auch nur eine konstante abgeleitete Funktion, welche auch $= b$ ist. Folglich kann in (2) für λ jeder Wert gesetzt werden. Oder es sei eine ganze Funktion zweiten Grades:

$$y = f(x) = a + bx + cx^2, \text{ also } y' = b + 2cx$$

vorgelegt, so wird der Differenzenquotient [74]:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = b + c(2x + \Delta x),$$

daher nach (2) $b + c(2x + \Delta x) = b + 2c(x + \lambda \Delta x)$ und hieraus $\lambda = \frac{1}{2}$ und $x_m = x + \lambda \Delta x = x + \frac{\Delta x}{2}$, d. h. das arithmetische Mittel zwischen x und $x_1 = x + \Delta x$. Allgemein aber muß man sich mit der Gewißheit begnügen, daß ein Wert von λ zwischen 0 und 1 liegt. Es sei noch zu (2) bemerkt:

I. Weder ist aus dem Beweisverfahren in [133] ersichtlich, noch ist es überhaupt wahr, daß nur ein Wert von λ zwischen 0 und 1 liegen dürfe. Es können sehr wohl mehrere sein, aber einer ist mindestens da. Man nehme z. B.:

$$f(x) = \cos x; \quad f'(x) = -\sin x$$

und für x die Werte 8π und 0, so wird:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos 8\pi - \cos 0}{8\pi} = \frac{1-1}{8\pi} = 0$$

und (2) wird: $-\sin(8\lambda\pi) = 0 \quad (1 > \lambda > 0)$.

Man erhält für λ die Werte:

$$\lambda = 0, \tfrac{1}{8}, \tfrac{2}{8}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{4}{8}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{6}{8}, \tfrac{7}{8}, 1,$$

also außer den Grenzen 0 und 1 noch 7 Zwischenwerte.

II. „Zwischen 0 und 1“ soll hier die Grenzen 0 und 1 ausschließen. Das soll heißen: Selbst wenn $\lambda = 0$ oder $\lambda = +1$ oder beide wie im vorigen Beispiel die Gleichung (2) erfüllen, so gibt es doch außerdem zwischen 0 und 1 einen Wert von λ, der es auch tut. Denn wäre es nicht so, dann könnte die abgeleitete Funktion, weil sie stetig ist, in dem Spielraum zwischen x und $x + \Delta x$ nur kleiner oder nur größer sein als A. Also wäre A kein Mittelwert aller Werte der abgeleiteten Funktion, wie es doch nach dem Mittelwertsatz [33] sein müßte.

III. Die Ableitung sollte zunächst Nachbarwerte von x und die zugehörigen Nachbarwerte von y verknüpfen, das und nichts anderes ist ja der Sinn der Gleichung:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

oder: Differentialquotient = Ableitung.

Diese Verknüpfung wird durch (2) von Nachbarwerten auf zwei beliebige Werte von x und die zugehörigen Werte von y erweitert. Und in dieser Erweiterung, nämlich:

Differenzenquotient = Ableitung

liegt die Hauptbedeutung der Formel (2), welche zwar durch die

Unkenntnis des genauen Wertes für λ etwas eingeschränkt, aber keineswegs aufgehoben wird.

IV. Die Gleichung: Differenzenquotient = Ableitung wird abermals erweitert werden auf höhere Differenzenquotienten und höhere Ableitungen. Vgl. [140] und [155].

V. Setzt man in (2) dx statt Δx und dy statt Δy, so folgt:

$$dy = f'(x + \lambda dx)dx. \tag{3}$$

Es liegt λ zwischen 0 und 1, also ist λdx mit dx unendlich klein, daher, weil die Ableitung stetig ist, nach [120]:

$$f'(x + \lambda dx) = f'(x) + \varepsilon, \text{ folglich: } dy = (f'(x) + \varepsilon)dx,$$

d. h. wieder Tafel I, Nr. 2, wie es sein muß.

VI. Setzt man h statt Δx, so wird:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(x + h) - f(x),$$

also nach (2), wenn $f(x + h)$ entwickelt wird:

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x + \lambda h). \tag{4}$$

In dieser Form drückt diese Gleichung den Taylorschen Lehrsatz aus unter Beschränkung auf zwei Glieder (vgl. § 25).

VII. Aus VI folgt im besonderen: Verschwindet die Ableitung einer Funktion für jeden Wert von x, so ist sie eine Konstante. Denn dann ergibt sich $f(x + h) = f(x)$

135. Satz von Rolle. Es sei $f(x) = 0$ und $f(x + \Delta x) = 0$, also auch $\Delta y = 0$. Aus [134 2] folgt dann:

$$f'(x + \lambda \Delta x) = 0, \qquad (1 > \lambda > 0)$$

d. h.: Verschwindet eine Funktion für zwei Werte x und $x_1 = x + \Delta x$, so verschwindet ihre Ableitung dazwischen (mindestens) einmal:

Beispiel. Die Funktion $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ verschwindet für $x = +1$ und $x = +3$. Die Gleichung:

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 19 = 0$$

hat die Wurzeln:

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{7}}{3}, \quad x_2 = \frac{8 - \sqrt{7}}{3},$$

von denen in der Tat eine, nämlich die zweite, zwischen $+1$ und $+3$ liegt (die erste liegt zwischen $+3$ und $+4$).

Erweiterung des Satzes von Rolle. Verschwindet eine Funktion $y = f(x)$ für n Werte der ursprünglichen Veränderlichen, welche der Größe nach geordnet:

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$$

sein mögen, so verschwindet in dem Spielraume von x_1 bis x_n die erste Ableitung mindestens $(n-1)$ mal, die zweite Ableitung mindestens $(n-2)$ mal, die dritte mindestens $(n-3)$ mal usw. und die $(n-1)^{\text{te}}$ Ableitung mindestens einmal.

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus dem Satz von Rolle, nach welchem die erste Ableitung mindestens einmal sowohl zwischen x_1 und x_2, als auch zwischen x_2 und $x_3 \ldots$ als auch zwischen x_{n-1} und x_n verschwindet. Da nun die zweite Ableitung der ursprünglichen Funktion identisch ist mit der ersten Ableitung der ersten Ableitung, so muß hiernach die zweite Ableitung mindestens $n-2$ mal zwischen x_1 und x_n verschwinden usw. usw.

Beispiel. Die im vorigen Beispiel betrachtete Funktion

$$y = f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$$

verschwindet für $x = +1$, $x = +3$, $x = +4$.

Die erste Ableitung verschwindet für:

$$x = \frac{8+\sqrt{7}}{3}, \quad x = \frac{8-\sqrt{7}}{3},$$

und beide Werte liegen zwischen $+1$ und $+4$. Die zweite Ableitung $y'' = 6x - 16$ verschwindet für $x = +\frac{8}{3}$, und dieser Wert liegt auch zwischen $+1$ und $+4$.

136. Partes Proportionales. Die Gleichung:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f'(x + \lambda \Delta x)\Delta x \tag{1}$$

enthält den Koeffizienten λ, von dem man nach [134] im allgemeinen nur weiß, daß er zwischen 0 und 1 liegt. Aber je kleiner die Veränderlichkeit der abgeleiteten Funktion zwischen x und $x + \Delta x$ ist, desto weniger hat die Unkenntnis des genauen Wertes von λ zu bedeuten. Bei Rechnungen, die überhaupt nur auf eine gegebene Anzahl von Dezimalen geführt werden sollen, darf daher, wenn Δx klein genug angenommen wird, in (1) statt λ irgendein Wert zwischen 0 und 1, ja sogar 0 oder 1 selbst gesetzt werden. Folglich darf (1) durch die genäherte Gleichung:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f'(x)\Delta x \tag{2}$$

vertreten werden, also (nach [117]) gleich als ob die endlichen (wenn auch vielleicht kleinen) Differenzen Δx und Δy bereits Differentiale wären. Man hat nur Obacht zu geben, ob die Differenz:

$$(f'(x + \lambda \Delta x) - f'(x))\Delta x \tag{3}$$

zwischen den rechten Seiten von (1) und (2) kleiner bleibt, als fünf Einheiten der fortzulassenden Dezimalen, selbst wenn λ zwischen 0 und 1 möglichst ungünstig vorausgesetzt wird, also z. B. $\lambda = 1$, wenn

die Ableitung in dem betreffenden Spielraum nur wächst oder nur abnimmt.

Auf (2) beruht die Theorie der Partes Proportionales bei dem Gebrauch von Logarithmentafeln und anderen Tafeln von Funktionswerten. Wenn nämlich (3) für irgendeinen Wert von Δx unter die Genauigkeitsgrenze sinkt, so ist ein gleiches für jeden kleineren Wert von Δx, etwa $\Delta' x$ erst recht der Fall, und man erhält daher nach (2) die zugehörige Differenz von y:

$$\Delta' y = f'(x) \Delta' x,$$

also:

$$\Delta' y : \Delta y = \Delta' x : \Delta x, \quad \Delta' y = \frac{\Delta' x}{\Delta x} \cdot \Delta y. \tag{4}$$

d. h. die Abweichungen der y sind proportional zu den Abweichungen der x. In der Regel ist Δx in den Tafeln klein genug, daß (2), also auch (4) unbedenklich angewendet werden darf.

Es sei etwa:

$$f(x) = \log x; \quad f'(x) = \frac{M}{x} = \frac{0{,}434\ldots}{x}.$$

Bei fünfstelligen Logarithmen ist der Eingang des numerus x vierstellig, also von einem Wert zum nächsten $\Delta x = 0{,}001$, wenn das Dezimalkomma hinter die erste Stelle gesetzt wird. Die Differenz (3) wird daher, da $f'(x)$ mit x beständig abnimmt, kleiner als:

$$M \cdot 0{,}001 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 0{,}001}\right) = \frac{0{,}000000434\ldots}{x \cdot (x + 0{,}001)}.$$

Sie hätte daher selbst für $x = 1$ höchstens erst auf die siebente Stelle des Logarithmus einen Einfluß; also darf nach (4) interpoliert werden, d. h. nach der Theorie der Partes Proportionales.

Die Tafeldifferenz selbst zwischen zwei einander folgenden Logarithmen ist daher

$$\Delta \log x = \frac{0{,}000434\ldots}{x}. \tag{5}$$

In der Tat stimmt das an jeder Stelle der Tafel unter Berücksichtigung der Abrundung: Nimmt man z. B. $x = 1$, so wird

$$\Delta \log x = 0{,}000434\ldots$$

$=$ 43 bis 44 Einheiten der fünften Dezimale. Und wirklich sind die Logarithmen der ersten 10 numeri

1,000, 1,001 ... 1,009; 0,00 000; 043; 087; 130; 173;
217; 260; 303; 346; 389,

also die Differenzen in Einheiten der fünften Dezimale:

43, 44, 43, 43, 44, 43, 43; 43, 43.

Nimmt man $x = 2$, so wird $\varDelta \log x = 0{,}000217 \ldots = 21$ bis 22 Einheiten der fünften Stelle, und zwar ist, wenn man $x = 2$ in die Mitte und 10 Differenzen nimmt, etwa dreimal 21 und siebenmal 22 zu erwarten. Man schlage also für die numeri 1,995; ...; 2,005 die Logarithmen:

0,29|994, 016, 038, 060, 081, 103, 125, 146, 168, 190, 211

auf. Ihre Differenzen sind in Einheiten der fünften Dezimale:

22, 22, 22, 21, 22, 22, 21, 22, 22, 21,

also wirklich dreimal 21, siebenmal 22.

In gleicher Weise lassen sich die trigonometrisch-logarithmischen Tafeln prüfen. Man nehme z. B.:

$$f(x) = \log \sin x = M \ln \sin x,$$

so wird:

$$f'(x) = \frac{M}{\sin x} \cdot \cos x = M \operatorname{cotg} x,$$

folglich nach (2), da die Winkel bei fünfstelligen Tafeln von Minute zu Minute fortschreiten, also in arcusmaß:

$$\varDelta x = \operatorname{arc} 1' = 0{,}0002909$$

gesetzt werden muß:

$$\begin{aligned} \varDelta \log \sin x = M \operatorname{cotg} x \cdot \varDelta x &= 0{,}434 \cdot 0{,}000291 \ldots \operatorname{cotg} x \\ &= 0{,}000126 \operatorname{cotg} x. \end{aligned} \tag{6}$$

Man setze z. B. $x = 30^0$, $\operatorname{cotg} x = \sqrt{3} = 1{,}732$, so wird:

$$\varDelta \log \sin x = 0{,}00219 \ldots$$

$= 21$ bis 22 Einheiten der fünften Stelle, auf 10 Differenzen also etwa einmal 21 und neunmal 22. In der Tat findet man in der Tafel von $x = 29^0 55'$ bis $x = 30^0 5'$ folgende 10 Differenzen angegeben:

22, 22, 22, 22, 22, 22, 22, 22, 21, 22.

Oder man setze $x = 45^0$, $\operatorname{cotg} x = 1$, so wird:

$$\varDelta \log \sin x = 0{,}000126 \ldots$$

$= 12$ bis 13 Einheiten der fünften Stelle. Die Differenzen sind in der Tat für $x = 44^0 55'$ bis $x = 45^0 5'$:

13, 13, 12, 13, 13, 12, 13, 12, 13, 13.

Nur wenn der Winkel x klein ist, kleiner als 1^0, wird $\operatorname{cotg} x$ so groß und ändert sich so schnell, daß sich das Fortlassen von $\lambda \varDelta x$ in (1) schon in der fünften Dezimale bemerkbar macht. Für $x = 0$ wird sogar $\operatorname{cotg} x = \pm \infty$, $\log \sin x = -\infty$. Daß alsdann (2) und (4) ganz versagen müssen, versteht sich von selbst.

137. Die wichtige Formel [136 1] läßt eine Erweiterung zu, die späterer Anwendungen wegen [157] hier ihre Stelle finden mag. Sie lautet:

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)} = \frac{f'(x_m)}{\varphi'(x_m)} = \frac{f'(x+\lambda \Delta x)}{\varphi'(x+\lambda \Delta x)}. \qquad (1)$$

Hierbei bedeuten:

$$\alpha) \quad y = f(x) \quad \text{und} \quad \beta) \quad z = \varphi(x) \qquad (2)$$

zwei Funktionen von x, die nebst ihren Ableitungen:

$$y' = f'(x) \quad \text{und} \quad z' = \varphi'(x)$$

in dem Spielraum der ursprünglichen Veränderlichen von x bis $x + \Delta x$ endlich und stetig bleiben sollen. Außerdem wird von $\varphi(x)$ vorausgesetzt, daß sie in diesem Spielraum nur wachse oder nur abnehme, oder was dasselbe ist [131], daß $\varphi'(x)$ nur positiv oder nur negativ sei.

Beweis von (1). Die letztere Voraussetzung soll bedeuten, daß nach Auflösung von (2 β) auch umgekehrt x sich als stetige und eindeutige Funktion von z ergebe. Denn da $\varphi'(x)$ nur positiv oder nur negativ ist, so ändert sich z nur in einem Sinne, kann also jeden Wert nur einmal annehmen, so daß jedem z in der Tat nur ein x entspricht. Daraus folgt, daß auch y als Funktion von z betrachtet eindeutig und stetig wird. Bei dieser Betrachtung stellt (2) eine Parameterdarstellung im Sinne von [125] dar, nur daß x für t, z für x geschrieben steht. Daher nach [125 5]

$$\frac{dy}{dz} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Da nun $\Delta y : \Delta z$ ein Mittelwert aller $dy : dz$ ist, so muß einer der Werte, welche der Differentialquotient in dem Spielraum annimmt, gleich $\Delta y : \Delta z$ selbst sein, womit (1) erwiesen ist. Beispiel:

$$y = f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x, \quad z = \varphi(x) = x^2,$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 10x + 8, \quad z' = \varphi'(x) = 2x.$$

Die erste Voraussetzung ist erfüllt. Man setze erst: $x = +1$, dann $x = +3$, so ist auch die zweite Voraussetzung erfüllt. Es wird

$$y = +4, z = +1; \quad \text{bez.:}\ y = +6, z = +9,$$

also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{6-4}{9-1} = +\frac{1}{4}.$$

Setzt man statt $x + \lambda \Delta x$ der Kürze wegen x_m, so ergibt (1)

$$+\frac{1}{4} = \frac{3x_m^2 - 10x_m + 8}{2x_m}, \quad \text{oder} \quad 6x_m^2 - 21x_m + 16 = 0,$$

$$x_m = \frac{21 \pm \sqrt{57}}{12}.$$

Es liegen sogar beide Werte von x_m zwischen $+1$ und $+3$. Vergleiche Anmerkung I in [134].

138. Die analytische Bedeutung der zweiten Ableitung. Um ihr nachzugehen, wird man sie mit den Differentialen und Differenzen der ersten Ableitung genau so verknüpfen, wie die erste Ableitung bisher mit den Differentialen und Differenzen der ursprünglichen Funktion selbst verknüpft worden ist. So ergibt sich sofort [121]:

$$f''(x) = \lim_{h=0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad (1)$$

$$(\lim x_2 = x,\ \lim x_1 = x,\ x_2 \neq x_1).$$

$$dy' = df'(x) = (f''(x) + \varepsilon)dx = (y'' + \varepsilon)dx. \quad (2)$$

$$dy' = df'(x) = f''(x)dx = y''dx. \quad (2\text{a})$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{df'(x)}{dx} = y'' + \varepsilon = f''(x) + \varepsilon. \quad (3)$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{df'(x)}{dx} = y'' = f''(x). \quad (3\text{a})$$

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{\Delta f'(x)}{\Delta x} = \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x + \lambda \Delta x). \quad (4)$$

Doch kommt es auch darauf an, die zweite Ableitung unmittelbar an die ursprüngliche Funktion anzuknüpfen, was jetzt geschehen soll.

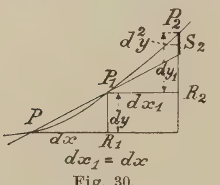


Fig. 30.

Das zweite Differential und die zweite Ableitung. Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$, veranschaulicht durch die Kurve in Fig. 30. Man nehme drei unendlich benachbarte Werte x, x_1, x_2 der ursprünglichen Veränderlichen und zwar zunächst in der Weise, daß der mittlere x_1 das arithmetische Mittel der beiden andern ist, vgl. [28], oder auch, daß $dx = dx_1$ wird, wenn man:

$$dx = x_1 - x, \quad dx_1 = x_2 - x_1$$

setzt, oder auch, daß das „zweite Differential von x“ verschwinde:

$$d^2x = d(dx) = dx_1 - dx = 0.$$

Die drei Werte werden:

$$x; \quad x_1 = x + dx; \quad x_2 = x + 2dx.$$

Ihnen entsprechen die drei Funktionswerte:

$$y = f(x); \quad y_1 = f(x_1) = f(x + dx); \quad y_2 = f(x_2) = f(x + 2dx),$$

aus denen die beiden ersten Differentiale von y folgen:

$$\begin{aligned} dy &= y_1 - y = f(x+dx) - f(x), \\ dy_1 &= y_2 - y_1 = f(x+2dx) - f(x+dx). \end{aligned} \quad (5)$$

Ihr Unterschied:

$$d^2y = d(dy) = dy_1 - dy = y_2 - 2y_1 + y$$
$$= f(x + 2dx) - 2f(x + dx) + f(x). \quad (6)$$

heißt das zweite Differential von y oder von $f(x)$. In Fig. 30 die Strecke S_2P_2, vgl. [28] Fig. 6.

Wenn man die Gleichung $dy = y'dx$ noch einmal differenziiert und dabei dx als eine unendlich kleine Konstante betrachtet (da $dx_1 = dx$ sein sollte), so folgt:

$$d(dy) = dy'dx,$$

d. h. nach (2a) und (6)

$$\mathbf{d^2y = d^2f(x) = y''(dx)^2 = f''(x)(dx)^2,} \quad (7)$$

d. h. das zweite Differential der Funktion ist (bis auf Glieder höherer Ordnung) gleich dem Produkt aus der zweiten abgeleiteten Funktion und dem Quadrate des ersten Diffentials der ursprünglichen Veränderlichen.

Das zweite Differential von y ist also, verglichen mit dx eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung, z. B.

$$d^2(x^n) = n(n-1)x^{n-2}(dx)^2; \quad d^2(\sin x) = -\sin x(dx)^2.$$

Der zweite Differentialquotient und die zweite Ableitung. Aus (7) folgt nach Division durch $(dx)^2$:

$$\mathbf{\frac{d^2y}{(dx)^2} = \frac{d^2f(x)}{(dx)^2} = y'' = f''(x).} \quad (8)$$

Man nennt:

$$\frac{d^2y}{(dx)^2} = \frac{d^2f(x)}{(dx)^2} \quad (9)$$

den zweiten Differentialquotienten von y oder $f(x)$ nach x. Er ist nach (8) gleich der zweiten Ableitung, also eine (im allgemeinen) endliche Größe.

Offenbar sind (7) und (8) die einfachsten und natürlichsten Erweiterungen von (2a) und (3a) in Tafel I § 15. Statt erster Ableitung zweite Ableitung, statt erstes Differential zweites Differential, statt erster Differentialquotient zweiter Differentialquotient, mehr kann man in dieser Hinsicht wirklich nicht verlangen. Nur ist zu beachten, daß bei der Bildung des ersten Differentialquotienten durch dx, bei derjenigen des zweiten durch $(dx)^2$ dividiert werden muß.

139. Der Beweis der grundlegenden Formel (7) in [138] war sehr einfach. Aber, wie freimütig zugegeben werden muß, auf Kosten der Strenge, da die beiden benutzten Formeln:

$$dy = y'dx; \quad dy' = y''dx \quad (1)$$

nur bis auf Glieder höherer Ordnung richtig sind, von denen erst

nachgewiesen werden muß, daß sie (7) nur bis auf Glieder von höherer als der zweiten Ordnung beeinträchtigen können. Um dies zu tun, gehe man zunächst von den ganz strengen Formeln aus [116 5]

$$dy = (y' + \varepsilon)dx = y'dx + k \qquad (k = \varepsilon dx), \tag{2}$$

$$dy' = (y'' + \varepsilon_1)dx = y''dx + k_1, \quad (k_1 = \varepsilon_1 dx), \tag{3}$$

wo ε und ε_1 unendlich klein, also k und k_1 von höherer Ordnung unendlich klein sind. Die Differentiation von (2) gibt, da dx konstant ist:

$$d^2y = dy'dx + dk,$$

oder nach (3)

$$d^2y = y''(dx)^2 + \varepsilon_1(dx)^2 + dk. \tag{4}$$

Das zweite Glied $\varepsilon_1(dx)^2$ ist von höherer als der zweiten Ordnung unendlich klein; bleibt also ein gleiches noch von dk zu erweisen. Hierzu berechne man k aus (2) und schreibe, um anzudeuten, daß k von x abhängt:

$$k = k(x) = dy - y'dx = f(x + dx) - f(x) - f'(x)dx. \tag{5}$$

Es folgt aus (5), wenn man auf beiden Seiten die Ableitung nach x nimmt (dx gilt als unendlich kleine Konstante)

$$k'(x) = f'(x + dx) - f'(x) - f''(x)dx.$$

Daher nach V in [134]:

$$dk = k'(x_m)dx = [f'(x_m + dx) - f'(x_m) - f''(x_m)dx] \cdot dx,$$

wo x_m einen Mittelwert zwischen x und $x + dx$ bezeichnet. Der Ausdruck in den eckigen Klammern ist aber wieder von der Form (5)

$$\varphi(x + dx) - \varphi(x) - \varphi'(x)dx = d\varphi(x) - \varphi'(x)dx,$$

nur daß x_m statt x, $f'(x)$ statt $\varphi(x)$ zu setzen wäre, daher nach [116 5], wenn ε_2 unendlich klein ist:

$$dk = \varepsilon_2(dx)^2,$$

d. h. auch dk ist von höherer Ordnung unendlich klein als $(dx)^2$. Die Gleichung (4) geht daher über, wenn $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ durch δ ersetzt wird, in:

$$d^2y = y''(dx)^2 + \delta(dx)^2 = (y'' + \delta)(dx)^2. \tag{6}$$

Und diese Formel, welche der völlig strengen Formel $dy = (y' + \varepsilon)dx$ entspricht, ist auch völlig streng. Aus ihr folgt [138 6], wenn das Glied $\delta(dx)^2$, das von höherer als der zweiten Ordnung unendlich klein ist, ausgelassen wird.

Setzt man übrigens in [138 8] h statt dx und wendet [138 6] an, so folgt:

$$f''(x) = \lim_{(h=0)} \frac{f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)}{h^2}. \tag{7}$$

Diese natürlichste Erweiterung von [118 2] ist als die gesuchte unmittelbare, d. h. von $f'(x)$ unabhängige Definition der zweiten Ableitung anzusehen.

Schließlich beachte man, daß nach dieser Einführung des zweiten Differentials die acht Ausdrücke:

$$y'' = f''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d\frac{df(x)}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{(dx)^2} = \frac{d^2f(x)}{(dx)^2}, \quad (8)$$

sämtlich einander gleich sind (bis auf unendlich kleine Größen).

140. Zweiter Differenzenquotient und zweite Ableitung vgl. [133]. Man gebe, wie in [138], der ursprünglichen Veränderlichen wieder drei Werte, etwa x_0, x_1, x_2, diesmal aber nicht drei unendlich benachbarte, sondern drei beliebige Werte, nur richte man sich bei der Wahl der Indizes so ein, daß x_1 zwischen x_0 und x_2 liegt, wobei aber durchaus nicht vorausgesetzt wird, daß x_1 das arithmetische Mittel von x_0 und x_2 sei, wie vorhin. Man berechne darauf die drei Funktionswerte:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2)$$

bilde dann ferner, wie in § 3, die beiden ersten Differenzenquotienten

$$A_0 = \frac{\varDelta y_0}{\varDelta x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad A_1 = \frac{\varDelta y_1}{\varDelta x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

und aus ihnen nach [30 7] den zweiten Differenzenquotienten:

$$B = \frac{A_1 - A_0}{\frac{1}{2}(\varDelta x_0 + \varDelta x_1)} = \frac{\varDelta A}{\frac{1}{2}(x_2 - x_0)} \quad (1)$$

(der nach § 3 vollkommen kommutativ ist). Andererseits setze man in $y'' = f''(x)$ für x einen Mittelwert x_m von x_0, x_1, x_2 ein, der gegebenenfalls noch bestimmt werden müßte. Dann gilt die Gleichung:

Zweiter Differenzenquotient = zweite Ableitung, (2)

d. h.

$$\boldsymbol{B = f''(x_m)}. \quad (3)$$

Beweis: Wird für $f(x)$ eine ganze Funktion zweiten Grades:

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 \quad (4)$$

gesetzt, so stimmt (3). Denn dann ist B nach [74] konstant $= 2c$ und die zweite Ableitung auch konstant $= 2c$. Ist aber $f(x)$ eine beliebige andere Funktion von x, so nehme man eine solche Funktion $\varphi(x)$ hinzu und bestimme sie nach [77] so, daß die Funktionswerte von φ und f übereinstimmen für $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$. Es sei also:

$$f(x_0) = \varphi(x_0); \quad f(x_1) = \varphi(x_1); \quad f(x_2) = \varphi(x_2), \quad (5)$$

was zur Folge hat, daß B denselben Wert hat für die Funktion $f(x)$

wie für die Funktion $\varphi(x)$, wenn man eben für x die Werte x_0, x_1, x_2 nimmt. Für $\varphi(x)$ ist wie eben gezeigt:

$$B = \varphi''(x) = 2c. \tag{6}$$

Aus (5) folgt ferner, daß die Funktion $\psi(x) \equiv f(x) - \varphi(x)$ verschwindet sowohl für $x = x_0$, als auch für $x = x_1$, als auch für $x = x_2$. Nach dem erweiterten Satz von Rolle [135] gibt es daher (mindestens) einen Wert x_m, für den $\psi''(x) \equiv f''(x) - \varphi''(x)$ verschwindet, d. h. für welchen $f''(x_m) = \varphi''(x_m)$ ist. Also ist nach (6) auch $B = f''(x_m)$, w. z. b. w.

Offenbar ist (3) die natürlichste und einfachste Erweiterung von [134 2].

Beispiel. Gegeben sei die Funktion:

$$y = f(x) = \frac{7x+5}{x-1}.$$

Man setze für x die Werte $x_0 = +2$, $x_1 = +5$, $x_2 = +7$ ein (die Unendlichkeitsstelle $x = +1$ liegt nicht zwischen ihnen, vgl. Beispiel in [134]) und berechne $y_0 = +19$, $y_1 = +10$, $y_2 = +9$. Es ergibt sich weiter:

$$A_0 = \frac{10-19}{5-2} = -3, \quad A_1 = \frac{9-10}{7-5} = -\frac{1}{2};$$

$$B = \frac{\Delta A}{\frac{1}{2}(\Delta x + \Delta x_1)} = \frac{-\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}(2+3)} = +1.$$

Andererseits ist:

$$f'(x) = -\frac{12}{(x-1)^2}, \quad f''(x) = +\frac{24}{(x-1)^3}.$$

Gleichung (3) gibt daher:

$$(x_m - 1)^3 = 24, \quad x_m = 1 + \sqrt[3]{24}.$$

Dieser Wert liegt zwischen $+3$ und $+4$, also erst recht zwischen $+2$ und $+5$.

141. Die grundlegende Formel [140 3] werde nun auf besondere Fälle angewendet:

Erster Fall: Man setze $\Delta x = \Delta x_1$, d. h. nehme x_1 genau in der Mitte von x_0 und x_2 an und lasse den Index 0 fort, so daß die drei Werte der ursprünglichen Veränderlichen werden:

$$x, \quad x + \Delta x, \quad x + 2\Delta x.$$

Dann geht [140 3] nach [28 10], da x_m zwischen x und $x + 2\Delta x$ liegen muß, über in:

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = f''(x + 2\lambda\Delta x) \qquad (0 < \lambda < 1) \tag{1}$$

oder:

$$\Delta^2 y = f''(x + 2\lambda\Delta x)(\Delta x)^2, \tag{1a}$$

womit Formel [138 7] von Differentialen auf endliche Differenzen erweitert worden ist, vgl. [117 2] einerseits und [136 1] andererseits.

Zweiter Fall: Es sollen x_0, x_1, x_2 voneinander verschieden sein. Doch um wie viel, oder besser, um wie wenig, ist dabei gar nicht ausgemacht. Sie können also insbesondere ein- und demselben Wert x unbegrenzt nahe gebracht werden, worauf mit x_m das gleiche geschieht. Daher nach [140 3] und [30 11]:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim B \\ &= 2\lim\left[\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right] \\ &\qquad (\lim x_0 = \lim x_1 = \lim x_2 = x), \end{aligned} \tag{2}$$

was wieder die natürlichste Erweiterung von [120 5] ist.

Dritter Fall: Wieder seien x_0, x_1, x_2 einander unbegrenzt nahe. Man setze:

$$x_0 = x, \quad x_1 = x + dx, \quad x_2 = x_1 + dx_1 = x + dx + dx_1.$$

In [138] wurde der Einfachheit wegen $dx = dx_1$ gesetzt. Es braucht aber nicht so zu sein, denn es sollen nur dx und dx_1 beide unendlich klein sein. Im besonderen werde angenommen, daß das zweite Differential von x

$$d^2x = d(dx) = dx_1 - dx$$

in bezug auf dx (mindestens) von der zweiten Ordnung unendlich klein, sonst aber beliebig sei. Schreibt man dann B in der Form [30 10], so gibt [140 3]:

$$\begin{aligned} f''(x_m) &= \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx\left(dx + \frac{1}{2}d^2x\right)(dx + d^2x)} \\ &= \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx)^3}\cdot\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dx}\right)\left(1 + \frac{d^2x}{dx}\right)}. \end{aligned}$$

Die beiden Faktoren im Nenner des zweiten Bruches sind nach der eben gemachten Voraussetzung unendlich wenig von 1 unterschieden. Ferner weicht x_m unendlich wenig von x ab. Daher bis auf unendlich kleine Größen:

$$f''(x) = y'' = \frac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx)^3}, \tag{3}$$

d. h. genau so, als ob $dy : dx$ unmittelbar nach VII [122] differenziert

worden wäre. Nach Division von Zähler und Nenner durch dx folgt:

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2y - \frac{dy}{dx}d^2x}{(dx)^2} = \frac{d^2y - (y' + \varepsilon)d^2x}{(dx)^2}.$$

Das Glied εd^2x ist von höherer Ordnung als die übrigen Glieder des Zählers, daher bis auf unendlich kleine Größen:

$$y'' = \frac{d^2y - y'd^2x}{(dx)^2}, \tag{4}$$

oder umgekehrt:

$$\boldsymbol{d^2y = y''(dx)^2 + y'd^2x}, \tag{4a}$$

womit [138 7] auf den Fall erweitert worden ist, daß d^2x nicht $= 0$ sondern unendlich klein von der zweiten Ordnung gesetzt wird. (Übrigens wäre (4) auch unmittelbar aus der Formel: $dy = y'dx$ durch Differenzieren entstanden. Nach V [122] erhält man nämlich:

$$d^2y = dx \cdot dy' + y'd(dx),$$

oder da $d(dx) = d^2x$ und nach [138] $dy' = y''dx$ ist:

$$d^2y = y''(dx)^2 + y'd^2x,$$

aber dieser einfache Beweis wäre nicht streng genug (vgl. [139]).)

Vierter Fall: Man lasse nur zwei der drei Werte x_0, x_1, x_2 einander unbegrenzt nähern und setze hiernach:

$$\lim x_0 = x, \quad \lim x_1 = x, \quad x_2 = x + h$$

(h beliebig), also $x_m = x + \lambda h$, so wird:

$$A_0 = \frac{dy}{dx} = f'(x), \quad A_1 = \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

und nach [30 7], da 0 statt $\varDelta x$ und h statt $\varDelta x_1$ zu schreiben ist:

$$B = 2\frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)}{h} = f''(x + \lambda h)$$

und hieraus umgekehrt:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x + \lambda h). \tag{5}$$

Diese Formel ist die einfachste und natürlichste Erweiterung von [134 4].

Sie ist der Taylorsche Lehrsatz unter Einschränkung auf 3 Glieder.

Aus (5) ergibt sich endlich die versprochene nähere Bestimmung des Nebenteils ε in [116].

Denn setzt man h unendlich klein $= dx$ und bringt $f(x)$ auf die andere Seite, so folgt aus (5):

$$dy = df(x) = f(x + dx) - f(x) = dxf'(x) + \frac{(dx)^2}{2!}f''(x + \lambda dx),$$

oder nach Division durch dx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) + \frac{dx}{2!} f''(x + \lambda dx),$$

also nach [116 4]:

$$\varepsilon = \frac{dx}{2!} f''(x + \lambda dx),$$

d. h. bis auf unendlich kleine Glieder höherer Ordnung:

$$\varepsilon = \frac{dx}{2!} f''(x) = y'' \frac{dx}{2!}$$

und:

$$dy = f'(x)dx + \frac{f''(x)}{2!}(dx)^2 = y' dx + \frac{y''}{2!}(dx)^2. \qquad (6)$$

Da die zweite Ableitung stetig ist, so kann

$$f''(x + \lambda dx) = f''(x) + \varepsilon_1$$

gesetzt werden, wobei ε_1 unendlich klein sein muß. Daher:

$$f(x + dx) = f(x) + dx f'(x) + \frac{(dx)^2}{2!} f''(x) + \frac{\varepsilon_1}{2!}(dx)^2.$$

Das letzte Glied ist von höherer als der zweiten Ordnung unendlich klein, daher wie in [132]: Jede (zweimal differenzierbare) Funktion kann in der Umgebung irgendeines Wertepaares durch eine ganze Funktion zweiten Grades vertreten werden, bis auf Größen von höherer als der zweiten Ordnung. Siehe erstes Übungsbeispiel.

Übungen zu § 16.

1. Gegeben die Funktion $y = \frac{5 + 4x}{4 - 5x}$; welcher das Wertepaar $(+1, -9)$ genügt. A) durch welche ganze Funktion ersten Grades $y = a + bx$ kann sie in der unmittelbaren Nachbarschaft dieses Wertepaares bis auf Größen höherer Ordnung vertreten werden. B) durch welche ganze Funktion zweiten Grades $y = a_1 + b_1 x + c_1 x^2$ kann sie ebenso, aber bis auf Größen von höherer als der zweiten Ordnung vertreten werden.

2. Wenn in einer Logarithmentafel (Briggs) der Numerus von 1,0000, 1,0001 ... bis 9,9999, also um die konstante Differenz 0,0001 fortschreitet, bis auf wie viele Dezimalen dürften die Logarithmen gegeben sein, ehe die Interpolation nach Partes Proportionales einen Fehler ergeben würde, der noch einen Einfluß auf die letzte Stelle hätte.

3. Gegeben irgendeine ganze Funktion dritten Grades

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3$$

und drei Werte x_0, x_1, x_2 für x. Es soll der Mittelwert x_m gefunden werden, welcher der Gleichung [140 3] genügt.

§ 17. Anwendungen der abgeleiteten Funktion auf Geometrie und Mechanik.

142. Tangente und Normale. Es sei:

$$y = f(x) \tag{1}$$

die Gleichung irgendeiner Kurve; dann bestimmt die Formel [28]:

$$A = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

den Richtungskoeffizienten der Sehne PP_1, also auch der unbegrenzten Sekante auf welcher sie liegt (Fig. 31 a). Jetzt lasse man Δx unendlich klein $= dx$ werden, wobei es gleichgültig ist, ob dx positiv oder negativ unendlich klein wird, d. h. ob P_1 sich P von der einen oder der

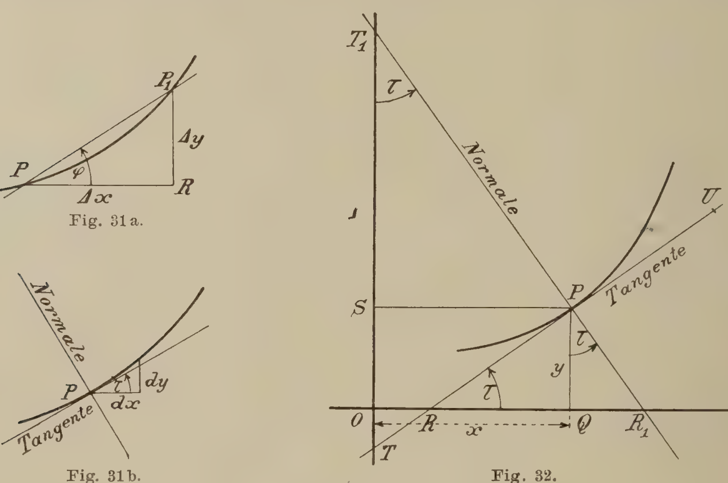


Fig. 31 a. Fig. 31 b. Fig. 32.

andern Seite unbegrenzt nähert. Da alsdann der Differenzenquotient in den Differentialquotienten oder die abgeleitete Funktion übergeht, so hat auch φ einen Grenzwert τ, der durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \tau = y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}, \tag{3}$$

oder umgekehrt:

$$\tau = \operatorname{arc} (\operatorname{tg} = y') \tag{3a}$$

bestimmt wird. Der so zu ermittelnde Winkel τ gehört hiernach einer Geraden an, die aus der Sekante entsteht, wenn man die abgeschnittene Sehne bis zum Verschwinden verkleinert. Mit anderen Worten [86 4]: Er gehört der Tangente an:

Die Formel (3) oder (3a) bestimmt die Tangente an die Kurve im Punkte $P(x, y)$. Die abgeleitete Funktion löst somit das

Tangentenproblem im Prinzip für alle Kurven in allen ihren Punkten. Die Normale wird erklärt als diejenige Gerade, welche auf der Tangente in P senkrecht steht. Folglich löst (3) oder (3a) im Prinzip auch das Normalenproblem in seiner ganzen Allgemeinheit.

Im besonderen (Fig. 32) ergeben sich auf der x-Achse die:

$$\text{Subtangente} = RQ = \frac{y}{\operatorname{tg}\tau} = \frac{y}{y'} = \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{4}$$

$$\text{Subnormale} = QR_1 = y \operatorname{tg}\tau = yy' = f(x) \cdot f'(x) \tag{5}$$

und auf der y-Achse die:

$$\text{Subtangente} = TS = x \operatorname{tg}\tau = xy' = xf'(x), \tag{4a}$$

$$\text{Subnormale} = ST_1 = x \operatorname{cotg}\tau = \frac{x}{y'} = \frac{x}{f'(x)}\cdot \tag{5a}$$

Oder man halte sich an die Gleichung der Tangente, wenn man auf ihr außer dem Berührungspunkt $P(x, y)$ noch irgendeinen anderen Punkt $U(X, Y)$ annimmt. Sie lautet:

$$\frac{Y-y}{X-x} = \operatorname{tg}\tau = y',$$

oder:

$$\text{Tangentengleichung}\quad \boldsymbol{Y = y + y'(X - x)}; \tag{6}$$

ebenso die:

$$\text{Normalengleichung}\quad \boldsymbol{Y = y - \frac{1}{y'}(X - x)}. \tag{7}$$

Genug, mit Formel (3) sind Tangente und Normale bestimmt. Übrigens stimmt (6) bei veränderter Bezeichnung selbstverständlich mit [132 4] überein. In der nächsten Umgebung eines Punktes kann die Kurve, von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung abgesehen, als gradlinig betrachtet werden, als ein „unendlich kleines Stück der Tangente".

Da eine krumme Linie nicht gerade ist, so muß man sich eben begnügen, ein unendlich kleines Stück von ihr als gerade anzusehen. (Wenn aber $f(x)$ nicht stetig oder nicht differenzierbar ist, so schwindet sogar diese bescheidene Hoffnung meist dahin.)

143. Konstruktion der Tangente und der Normale. Der Geometer wird sich für eine gegebene Kurve meist nicht an den eben abgeleiteten Formeln begnügen, sondern versuchen, aus ihnen möglichst einfache und schöne Konstruktionen abzuleiten, indem er die Gleichung [142 3], oder statt ihrer [142 4] bis [142 7] so geschickt wie möglich mit der Gleichung [142 1] der Kurve selbst zusammenstellt, oder bekannte Eigenschaften der Kurve hinzunimmt, die ja implizite in ihrer Gleichung enthalten sind. Einige Beispiele zur Erläuterung:

Erstes Beispiel. (Fig. 33) Scheitelgleichung der Parabel:

I. $y = \frac{x^2}{2p}$; also: II. $y' = \frac{x}{p} = \operatorname{tg} \tau$.

Man findet:

$$\text{Subtangente } RQ = \frac{y}{\operatorname{tg} \tau} = \frac{x^2}{2p} : \frac{x}{p} = \frac{x}{2},$$

also: Erste Konstruktion der Tangente: Man fälle das Lot PQ auf die Scheiteltangente und halbiere SQ in R, so ist RP die Tangente.

Oder man nehme:

$$\text{Subtangente } TU = x \operatorname{tg} \tau = x \frac{x}{p} = \frac{x^2}{p} = 2y, \text{ also: } TS = 2y - y = y$$

also: Zweite Konstruktion der Tangente: Man fälle das Lot $QP = y$ und trage y auf der Hauptachse nach der entgegengesetzten Seite ab. Die Verbindungslinie des Endpunktes T mit P ist die Tangente. Oder man nehme den Brennpunkt F und die Leitlinie (durch W) hinzu. So ist „bekanntlich“:

$$SF = WQ = \frac{p}{2},$$

also:

$$TF = WP = y + \frac{p}{2},$$

d. h. $TWPF$ ist ein Parallelogramm. Es ist aber sogar ein Rhombus, da „bekanntlich“ für die Parabel die Gleichung $PF = WP$ besteht. Im Rhombus halbieren die Diagonalen die Winkel, also:

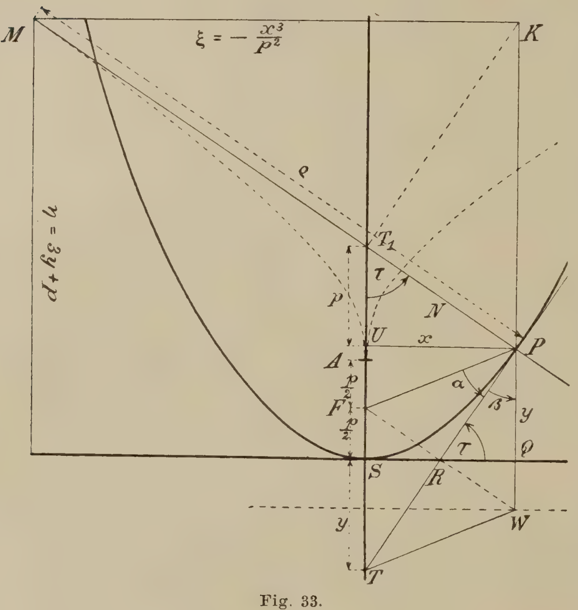


Fig. 33.

Dritte Konstruktion der Tangente. Man fälle das Lot PQ, verbinde P und F und halbiere den so entstandenen Winkel. Die Winkelhalbierende ist die Tangente.

Drei schöne und einfache Tangentenkonstruktionen. Das genügt wohl fürs erste! Man hat aber noch viele, viele andere abgeleitet, doch das gehört wohl mehr in einen Kursus der analytischen oder synthetischen Geometrie.

Zum Schluß sei noch berechnet:

$$\text{Subnormale } UT_1 = \frac{x}{\operatorname{tg}\tau} = x : \frac{x}{p} = p,$$

also: Konstruktion der Normale. Man fälle das Lot PU auf die Hauptachse und verlängere SU über U hinaus um p. Die Verbindungslinie des Endpunktes mit P ist die Normale.

Zweites Beispiel. (Fig. 34) Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ oder: } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

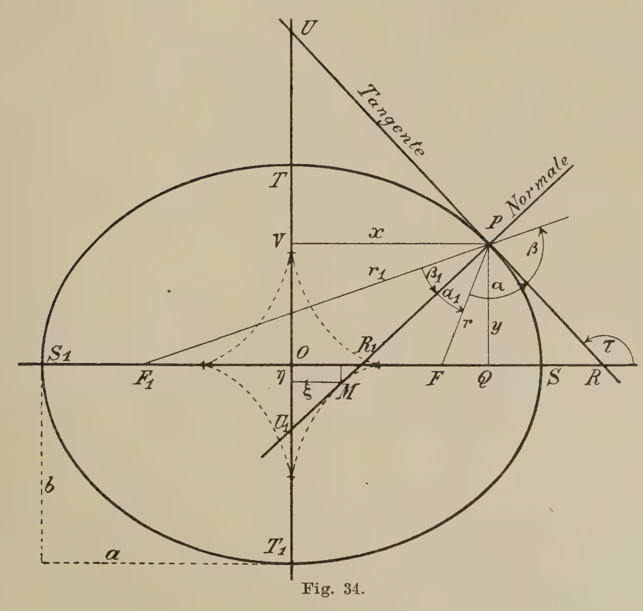


Fig. 34.

Die Differentiation ergibt:

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \text{ oder } y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{tg}\tau.$$

Also: Gleichung der Tangente:

$$\frac{Y-y}{X-x} = \operatorname{tg}\tau = y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \text{ oder: } \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$$

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - 1 = 0.$$

Ferner: Subtangente $QR = y \cdot \operatorname{cotg}(180^0 - \tau) = -\frac{y}{y'} = \frac{a^2 - x^2}{x}$, folglich:

$$OR = x + QR = \frac{a^2}{x},$$

d. h.: OR ist dritte Proportionale zwischen $OS = OS_1 = a$ und $OQ = x$. Daher nach einem sehr bekannten Satz der Elementar-

geometrie die Erste Konstruktion der Tangente: Man konstruiere zu S, S_1 und Q den vierten harmonischen Punkt R, so ist RP die Tangente.

Für den Punkt U folgt entsprechend: $OU = b^2 : y$, also Zweite Konstruktion der Tangente: Man konstruiere zu T_1, T und V den vierten harmonischen Punkt U, so ist UP die Tangente.

Drittens: Es seien ψ und ψ_1 (nicht gezeichnet) die Richtungswinkel des Durchmessers OP und des konjugierten Durchmessers, also $\operatorname{tg} \psi = y : x$ und daher (bekanntlich):

$$\operatorname{tg} \psi_1 = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} \psi} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \text{ also: } \tau = \psi_1 .$$

Dritte Konstruktion der Tangente: Man konstruiere zu PO den konjugierten Durchmesser und ziehe durch P die Parallele zu ihm. Sie ist Tangente in P.

Viertens: Man ziehe die Brennpunkte F und F_1 hinzu. Es ist:

$$FR = OR - OF = \frac{a^2}{x} - e = \frac{a}{x}\left(a - \frac{e}{a} x\right),$$

$$F_1 R = OR + OF_1 = \frac{a^2}{x} + e = \frac{a}{x}\left(a + \frac{e}{a} x\right);$$

andererseits ist bekanntlich:

$$FP = a - \frac{e}{a} x, \quad F_1 P = a + \frac{e}{a} x,$$

daher:

$$FR : F_1 R = FP : F_1 P, \text{ also: } \sphericalangle\, \alpha = \sphericalangle\, \beta$$

(nach einem „bekannten" Satz der Elementargeometrie); mithin:

Vierte Konstruktion der Tangente: Man halbiere den Nebenwinkel der beiden Brennstrahlen.

Vier schöne und einfache Konstruktionen der Tangente! Aus der letzten ergibt sich übrigens sofort eine schöne und einfache Konstruktion der Normale. Denn wenn die Tangente den Nebenwinkel halbiert, so halbiert die Normale den Winkel selbst. Ferner ergibt sich:

$$R_1 Q = y \cdot \operatorname{tg}(180^0 - \tau) = -y \operatorname{tg} \tau = -y y' = +\frac{b^2}{a^2} x$$

$$OR_1 = x - \frac{b^2}{a^2} x = x \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

d. h.:

$$OR_1 = x \frac{e^2}{a^2}; \quad \text{und ebenso } OU_1 = -y \frac{e^2}{b^2},$$

womit abermals zwei Konstruktionen der Normale angezeigt sind. Schließlich merke man an, daß:

$$R_1 P : U_1 P = R_1 Q : OQ = \frac{b^2}{a^2} x : x,$$

d. h.:

$$R_1 P : U_1 P = b^2 : a^2.$$

Die Länge der Normale bis zur großen Achse steht zur Länge der Normale bis zur kleinen Achse im umgekehrten Verhältnis der Quadrate der Längen dieser Achsen.

Drittes Beispiel. Die Gleichung der Exponentialkurve ist [41] (Fig. 13):

$$y = e^x; \text{ also } y' = \operatorname{tg} \tau = e^x.$$

$$\text{Subtangente } RQ = \frac{y}{\operatorname{tg}\tau} = \frac{y}{y'} = \frac{e^x}{e^x} = 1 = OA.$$

Die Subtangente auf der x-Achse ist konstant und zwar gleich der gewählten Längeneinheit, also auch gleich der Ordinate für $x = 0$, da $e^0 = 1 = OA$ ist.

Für Punkt A ist übrigens $\tau = 45^0$.

Viertes Beispiel. Die Parameterdarstellung der Zykloide [60] (Fig. 21) lautet:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi),$$

also (nach [125]):

$$\operatorname{tg}\tau = y' = \frac{dy : d\varphi}{dx : d\varphi} = \frac{r\sin\varphi}{r(1-\cos\varphi)} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

d. h.:

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\cdot$$

Die beiden Winkel τ und $\frac{\varphi}{2}$ sind in der Figur spitz, folglich:

$$\frac{\varphi}{2} = 90^0 - \tau; \quad \tau = 90^0 - \frac{\varphi}{2},$$

daher: Die Tangente geht durch den höchsten Punkt R, die Normale durch den tiefsten Punkt Q des rollenden Kreises in seiner augenblicklichen Lage (vgl. [150]).

144. Das Leibnizsche Dreieck und das Bogendifferential. Das unendlich kleine Dreieck mit dx und dy als Katheten und der unendlich kleinen Sehne ds als Hypotenuse nennt man das zu P zugehörige charakteristische oder Leibnizsche Dreieck (Fig. 35). Der Winkel zwischen dx und ds (bzw. der Nebenwinkel, falls y' negativ ist) stimmt bis auf Größen höherer Ordnung mit τ überein. Ferner ergibt der Lehrsatz des Pythagoras:

Fig. 35.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \tag{1}$$

also bis auf Größen höherer Ordnung:

$$ds = \pm\, dx\sqrt{1 + (y')^2}; \text{ oder auch: } ds = \pm\frac{dx}{\cos\tau} = \pm\frac{dy}{\sin\tau}, \tag{2}$$

wobei die Wurzel so zu nehmen ist, daß ds positiv wird, wenn es

nur auf den absoluten Wert ankommt. Dieses ds kann augenscheinlich betrachtet werden als das Bogenelement der Kurve, wie sich zum Überfluß auch noch analytisch durch folgende Betrachtung dartun läßt. Man schalte zwischen die bereits unendlich nahen Punkte P und P_1 noch beliebig viele andere Punkte Q_1, Q_2 ... ein und berechne die Länge des Polygonzuges $P Q_1 Q_2 \dots P_1$ (Fig. 36). Es ist in aller Strenge:

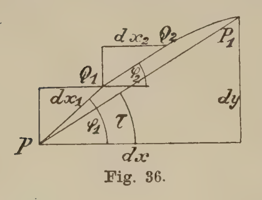


Fig. 36.

$$P Q_1 = \frac{dx_1}{\cos\varphi_1}, \quad Q_1 Q_2 = \frac{dx_2}{\cos\varphi_2} \dots$$

$$dx_1 + dx_2 + dx_3 \dots = dx,$$

daher:

$$P Q_1 Q_2 \dots P_1 = \frac{dx_1}{\cos\varphi_1} + \frac{dx_2}{\cos\varphi_2} + \dots$$

$$= \frac{\frac{dx_1}{\cos\varphi_1} + \frac{dx_2}{\cos\varphi_2} + \dots}{dx_1 + dx_2 + \dots} dx.$$

Der Bruch ist, da dx_1, dx_2 ... alle dasselbe Vorzeichen haben, ein Mittelwert von $1 : \cos\varphi_1$, $1 : \cos\varphi_2$, ..., die sich sämtlich unendlich wenig von $1 : \cos\tau$ unterscheiden. Daher ist bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung:

$$P P_1 = P Q_1 Q_2 \dots P_1 = \frac{dx}{\cos\tau} = ds,$$

womit die Berechtigung der Auffassung von ds als Bogenelement voll dargetan ist. Die Formel (1) gibt das Bogendifferential, aus welchem durch Integrieren nach den Methoden des siebenten und achten Abschnittes die Gesamtlänge des Bogens zwischen zwei beliebigen Punkten der Kurve berechnet werden kann. Formel (1) bereitet also die sogenannte Rektifikation oder Geradestreckung der Kurven vor.

Erstes Beispiel. Für die Parabel ist:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \pm\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2}.$$

Zweites Beispiel. Für die Ellipse ist:

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)} = \frac{a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}$$

$$= \frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{a^2(a^2 - x^2)} = \frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

also:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \pm \frac{dx}{a} \sqrt{\frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}.$$

Drittes Beispiel. Für die gemeine Zykloide [60] und [125]:

$$1 + (y')^2 = 1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$dx = r(1 - \cos\varphi)\,d\varphi = 2r\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

also:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \pm\, 2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Die Vorzeichen in diesen Formeln sind, wie gesagt, so zu nehmen, daß ds positiv wird. Ist also z. B. in der letzten Formel φ auf den Spielraum von 0 bis 2π, also die Zykloide auf einen Bogen von 0 bis A beschränkt, so bleibt $\sin\frac{\varphi}{2}$ positiv. Setzt man $d\varphi$ auch positiv, so wird:

$$ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

145. Die Formel [134 2]:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x + \lambda\Delta x)$$

hat nach [142 2] einerseits und nach [142 3] andererseits folgende augenscheinlich richtige Deutung:

Zwischen zwei beliebigen Punkten P und P_1 der Kurve gibt es auf dem Bogen PP_1 (mindestens) eine zur Sehne PP_1 parallele Tangente Fig. 37a. Es können aber auch mehr sein, etwa zwei in Fig. 37b oder drei in Fig. 37c.

Im besonderen lautet in geometrischer Form der:

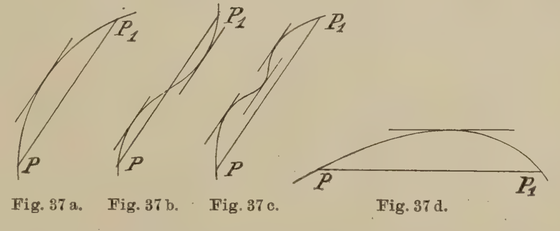


Fig. 37a. Fig. 37b. Fig. 37c. Fig. 37d.

Satz von Rolle [135]: Zwischen zwei Schnittpunkten P und P_1 der Kurve mit der x-Achse liegt mindestens ein Punkt der Kurve, dessen Tangente zur x-Achse parallel ist (Fig. 37d).

Ferner: Die an Formel (1) in [136] geknüpfte Lehre von den Partes proportionales kann geometrisch so gedeutet werden, daß man zum Interpolieren zwischen zwei Punkten P und P_1 die Sehne statt des Bogens nehmen darf, wenn P und P_1 nahe genug liegen.

146. Die geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung. Was jetzt hierüber geboten werden wird, betrachte man nur als Vorbereitungen für die eigentliche Hauptbedeutung, welche sich auf die Krümmung der Kurven bezieht und der ein besonderer § dienen soll.

Der Kontingenzwinkel. Es seien $P(x,y)$ und $P_1(x+dx, y+dy)$ zwei „benachbarte“ Punkte der Kurve (Fig. 38). Die Tangente in P wird nach [142] durch die Formel bestimmt:

$$\operatorname{tg}\tau = y', \text{ oder } \tau = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = y') = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = f'(x)). \tag{1}$$

Die Tangente in P_1 habe den Richtungswinkel $\tau + d\tau$. So ist $d\tau$ der eben genannte Kontingenzwinkel, also der Winkel, um den sich die Tangente, mithin auch die Normale infolge der Krümmung dreht, wenn der Berührungspunkt den unendlichen kleinen Bogen PP_1 beschreibt. Man erhält $d\tau$ durch Differentiation von (1) nach § 15, II 12:

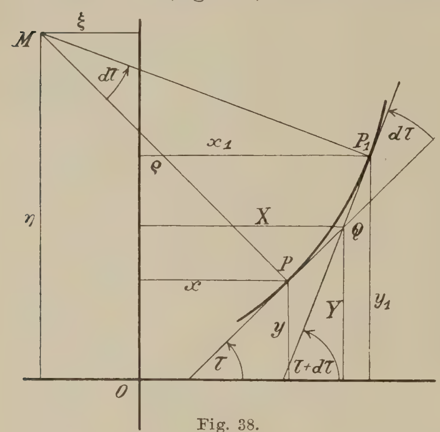


Fig. 38.

$$d\tau = d\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = y') = \frac{dy'}{1+y'^2},$$

oder da nach [138] $dy' = y''dx$ ist:

$$d\tau = \frac{y''}{1+y'^2}\cdot dx. \tag{2}$$

Das Vorzeichen bestimmt nach [9] den Sinn der Drehung, also auch den Sinn der Krümmung, d. h. nach welcher Seite der Normalen die Kurve sich krümmt. Vgl. [149].

Der Schnittpunkt zweier benachbarter Tangenten. Die Gleichung der Tangente in P lautet [142]:

$$Y = y + y'(X-x) \text{ oder } Y = f(x) + f'(x)(X-x). \tag{3}$$

Also ist die Gleichung der Tangente in P_1 entsprechend

$$Y = f(x+dx) + f'(x+dx)(X-(x+dx)). \tag{3a}$$

Für den Schnittpunkt $Q(X, Y)$ müssen beide Gleichungen gelten. Daher:

$$f(x) + f'(x)(X-x) = f(x+dx) + f'(x+dx)(X-(x+dx))$$

und hieraus:

$$X = x + dx - \frac{f(x+dx) - f(x) - f'(x)dx}{f'(x+dx) - f'(x)}.$$

Der Zähler ist nach (5) [141] $= \frac{1}{2}f''(x+\lambda dx)(dx)^2$.

Der Nenner ist nach [134], wenn dort $f(x)$ durch $f'(x)$, also $f'(x)$ durch $f''(x)$ und λ durch μ ersetzt wird $= f''(x+\mu dx)dx$, also:

$$X = x + dx\left(1 - \frac{f''(x+\lambda dx)}{2f''(x+\mu dx)}\right) \quad \binom{1>\lambda>0}{1>\mu>0}.$$

Da dx unendlich klein ist, so kann (außer wenn $f''(x)$ oder y'' zufällig verschwindet [Wendepunkt]) der Bruch bis auf unendlich

kleine Größen $= 1:2$ gesetzt werden. Also bis auf Größen höherer Ordnung:

$$X = x + \frac{dx}{2} \text{ und entsprechend: } Y = y + \frac{dy}{2}, \tag{4}$$

d. h. der Schnittpunkt zweier benachbarter Tangenten weicht von der Mitte der Sehne, welche die Koordinaten hat:

$$\frac{x + x_1}{2} = x + \frac{dx}{2}; \quad \frac{y + y_1}{2} = y + \frac{dy}{2}$$

nur um einen unendlich kleinen Abstand von höherer Ordnung ab.

Da $\lim dx = 0$ und $\lim dy = 0$ ist, so folgt aus (4) ferner: Jeder Punkt einer Kurve kann angesehen werden als Schnittpunkt zweier benachbarter Tangenten. Auf die Reziprozität oder Dualität dieses Satzes zu dem Satze, daß jede Tangente angesehen werden kann als Verbindungslinie zweier benachbarter Punkte der Kurve ist schon in § 10 verwiesen worden. Siehe auch [201] in § 24.

147. Der Schnittpunkt zweier benachbarter Normalen. Die Gleichungen der Normalen in P und P_1 lauten nach [142], wenn ξ und η statt X und Y geschrieben werden:

$$\eta = f(x) - \frac{\xi - x}{f'(x)} = y - \frac{\xi - x}{y'} \tag{1}$$

$$\eta = f(x + dx) - \frac{\xi - (x + dx)}{f'(x + dx)}. \tag{2}$$

Für den Schnittpunkt M (Fig. 38) müssen beide Gleichungen gelten, also:

$$f(x) - \frac{\xi - x}{f'(x)} = f(x + dx) - \frac{\xi - (x + dx)}{f'(x + dx)}$$

und hieraus:

$$\xi = x - \frac{f(x + dx) - f(x)}{f'(x + dx) - f'(x)} \cdot f'(x) \cdot f'(x + dx) - \frac{dx \cdot f'(x)}{f'(x + dx) - f'(x)}$$

oder nach Umformung der Differenzen wie in [146]:

$$\xi = x - \frac{f'(x) \cdot f'(x + \lambda dx) \cdot f'(x + dx)}{f''(x + \mu dx)} - \frac{f'(x)}{f''(x + \mu dx)},$$

oder bis auf unendlich kleine Größen:

$$\xi = x - \frac{[f'(x)]^3}{f''(x)} - \frac{f'(x)}{f''(x)},$$

oder auch:

$$\xi = x - \frac{(1 + y'^2) \cdot y'}{y''} \tag{3}$$

und nach Einsetzen in (1):

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{4}$$

Diese beiden Formeln bestimmen, wie sich in § 21 zeigen wird, den Krümmungsmittelpunkt. Aus (3) und (4) ergibt sich alsdann die Formel für den Krümmungsradius:

$$\varrho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = \pm \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}. \qquad (5)$$

148. Die Abweichung von einer unendlich kleinen Sehne. Es seien

$$P_0(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad P_1(x_1 = x_0 + h, y_1)$$

zwei unendlich nahe Punkte der Kurve, also h unendlich klein (Fig. 39). Außerdem sei ein Punkt P mit der Abszisse $x = x_0 + \lambda h$ und der Ordinate y angenommen, so ist nach [141 5] bis auf Glieder von höherer als der zweiten Ordnung:

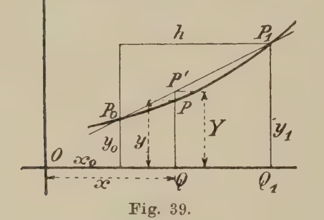


Fig. 39.

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'', \qquad (1)$$

$$y = y_0 + \lambda h y_0' + \frac{\lambda^2 h^2}{2!} y_0''. \qquad (2)$$

Andererseits ist für die Ordinate Y des Punktes P' der Sehne:

$$Y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = y_0 + (y_1 - y_0)\lambda,$$

also nach (1):

$$Y = y_0 + \lambda h y_0' + \frac{\lambda h^2}{2!} y_0'', \qquad (3)$$

daher:

$$P'P = y - Y = -\frac{\lambda - \lambda^2}{2} h^2 y_0'', \qquad (4)$$

oder:

$$P'P = -\frac{\frac{1}{4} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2}{2} h^2 y_0''. \qquad (4a)$$

Damit ist die in der Richtung der y-Achse gemessene Abweichung des Punktes P von der Sehne P_0P_1 bestimmt. Nimmt man P' zwischen P_0 und P_1 an, so liegt λ zwischen 0 und $+1$, und $P'P$ erhält das entgegengesetzte Vorzeichen von y_0''. Der absolut größte Wert dieser Abweichung entsteht, wenn P' bis auf Größen höherer Ordnung in der Mitte von P_0P_1 liegt. Dann wird $\lambda = \frac{1}{2}$ und:

$$P'P = -\tfrac{1}{8} h^2 y_0''. \qquad (5)$$

Liegt P außerhalb P_0P_1, so hat die Abweichung dasselbe Vorzeichen wie y_0''. Der Punkt P tritt dann auf die andere Seite der Sehne P_0P_1.

Für die Tangente in P ist der Richtungskoeffizient:

$$\operatorname{tg}\tau = f'(x) = f'(x_0 + \lambda h) = f'(x_0) + \lambda h f''(x_0) = y_0' + \lambda h y_0''.$$

Für die Sehne P_0P_1 ist der Richtungskoeffizient:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0''}{h} = y_0' + \frac{hy_0''}{2!}.$$

Beide stimmen überein für $\lambda = \frac{1}{2}$, d. h.: Wenn der Bogen unendlich klein ist, so liegt der Punkt P, für welchen (vgl. [145]) die Tangente parallel zur Sehne ist, (abgesehen von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung), in der Mitte.

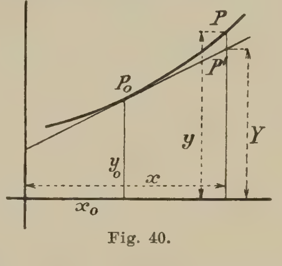


Fig. 40.

149. Die unendlich kleine Abweichung von der Tangente. Gegeben sei ein Punkt $P_0(x_0, y_0)$ und die Tangente P_0P'. (Fig. 40.) Man betrachte eine Nachbarabszisse x, setze also $dx = h = x - x_0$ und $x = x_0 + h$. Dann ist die zugehörige Ordinate y bis zum Schnittpunkt P mit der Kurve nach [141 5]:

$$y = y_0 + hy_0' + h^2\frac{y_0''}{2!} \tag{1}$$

und die Ordinate Y bis zum Schnittpunkt P' mit der Tangente:

$$Y = y_0 + h\operatorname{tg}\tau = y_0 + hy_0', \tag{2}$$

also:

$$\boldsymbol{P'P = y - Y = \frac{h^2}{2!}y_0''}, \tag{3}$$

d. h. die eben beginnende Abweichung von der Tangente, gemessen durch den Unterschied der Ordinaten ist unendlich klein von der zweiten Ordnung und halb so groß wie das zweite Differential d^2y (nach [138]) sein würde. Sie hat für positive und negative dx einerlei Vorzeichen, nämlich das Vorzeichen von y''. Die Kurve krümmt sich von der Tangente fort nur nach einer ihrer beiden Seiten (außer wenn $y'' = 0$ ist [Wendepunkt]). Nach welcher von beiden, das ergibt die folgende aus (3) fließende Regel:

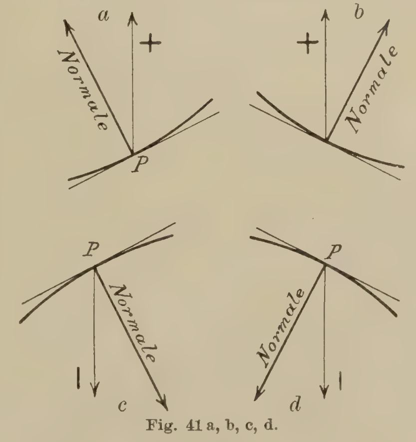


Fig. 41 a, b, c, d.

Ist y'' positiv, so krümmt sich die Kurve von der Tangente fort nach derjenigen Seite, in welcher die durch P gezogene Parallele zur positiven y-Achse läuft. (Fig. 41 a und 41 b.) Ist y'' negativ, so krümmt sich die Kurve von der Tan-

gente fort nach derjenigen Seite, in welcher die durch P gezogene Parallele zur negativen y-Achse läuft (Fig. 41c und 41d). Oder auch kurz: Je nachdem y'' positiv oder negativ ist, krümmt sich die Kurve (schräg) nach oben oder (schräg) nach unten, (natürlich, wenn die $+y$-Achse nach oben, die $-y$-Achse nach unten gerichtet ist).

Oder auch: Haben y und y'' gleiche Vorzeichen, so kehrt die Kurve (in der betreffenden Stelle) der x-Achse die konvexe Seite zu, haben sie entgegengesetzte Vorzeichen, so die konkave Seite. So ist z. B. für die Sinuslinie $y'' = -y$ und wirklich ist sie überall nach der x-Achse hin konkav. (Die Schnittpunkte aber mit der x-Achse sind Wendepunkte.)

150. Differentialgeometrie. Statt nur, wie bisher, analytische Differentialformeln hinterher geometrisch zu deuten, kann man auch eine recht selbständige Differentialgeometrie oder Geometrie des unendlich Kleinen entwickeln, welche von vornherein mit unendlich kleinen Längen, Winkeln, Flächen, Volumina usw. konstruiert und durch solche differentiellen Konstruktionen zu wirklichen Ergebnissen gelangt, wobei der Grenzprozeß, die limes-Bildung durch geometrische Sätze statt durch analytische Formeln vermittelt wird und die Rechnung nur untergeordnete Dienste leistet, falls sie überhaupt gebraucht wird. Dies sei zunächst an einigen Beispielen erläutert.

Erstes Beispiel: Eine Sekante schneide einen Kreis in der Sehne PP_1 mit dem Zentriwinkel $POP_1 = \varphi$. (Fig. 42.) Dann ist:

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta = 90^0 - \frac{\varphi}{2}.$$

Mit der Sehne wird auch φ unendlich klein, also $\lim \alpha = \lim \beta = 90^0$, d. h. die Tangente steht auf dem Radius senkrecht. Weder die Gleichung des Kreises, noch ihre Differentialgleichung ist gebraucht worden.

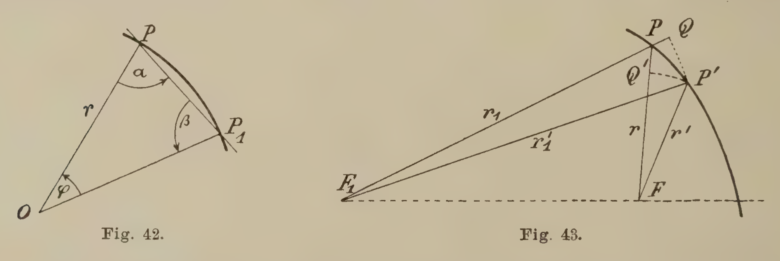


Fig. 42. Fig. 43.

Zweites Beispiel: Zwei beliebige Punkte P und P' einer Ellipse seien mit den beiden Brennpunkten verbunden. Dann ist:

$$r + r_1 = 2a; \quad r' + r_1' = 2a, \quad \text{also:} \quad r - r' = r_1' - r_1.$$

Man schlage um F mit r' und um F_1 mit r_1' die Kreisbögen,

welche r bzw. r_1 in der Verlängerung in Q' bzw. Q schneiden. Dann sagt die eben aufgeschriebene Gleichung aus:

$$PQ' = PQ.$$

Nun lasse man P' unendlich nahe an P herankommen, so werden die beiden Dreiecke $PP'Q$ und $PP'Q'$ unendlich klein und gradlinig. Aber sie werden auch kongruent, denn PP' haben sie gemeinsam, $PQ' = PQ$, wie eben gezeigt und $\sphericalangle PQP' \sphericalangle PQ'P' = 90^0$, weil der Radius den Kreis senkrecht durchdringt. Also zuletzt:

$$\sphericalangle P'PQ = \sphericalangle P'PQ'.$$

$P'P$ hat die Richtung der Tangente in P. Mithin halbiert diese den Nebenwinkel der beiden Brennstrahlen. Eine der vier Tangentenkonstruktionen für die Ellipse in [143] ist wiedergefunden worden, aber ohne die Gleichung der Ellipse noch deren Differentialgleichung.

Drittes Beispiel: Wenn ein Kreis auf einer Geraden oder überhaupt eine Kurve auf einer anderen rollt, so ist der augenblickliche Berührungspunkt offenbar in augenblicklicher Ruhe. [60]. (Fig. 21.) Der ganze Kreis dreht sich augenblicklich um Q, folglich ist die Bewegung von P augenblicklich senkrecht zu PQ gerichtet, d. h. PQ ist Normale und das Lot auf ihr in P ist die Tangente. Die Tangenten- und Normalenkonstruktion der gemeinen Zykloide sind wiedergefunden worden, ohne daß ihre Parameterdarstellung benutzt und differenziert wurde.

Diese drei stehen für Hunderte von Beispielen, in denen man durch differentielle Konstruktionen oder differentielle geometrische Betrachtungen überraschend schnell und leicht zum Ziele gelangt. Ja, zuweilen kann das Verhältnis zwischen Differentialrechnung und Differentialgeometrie geradezu umgekehrt werden, indem eine Differentialformel geometrisch erwiesen wird.

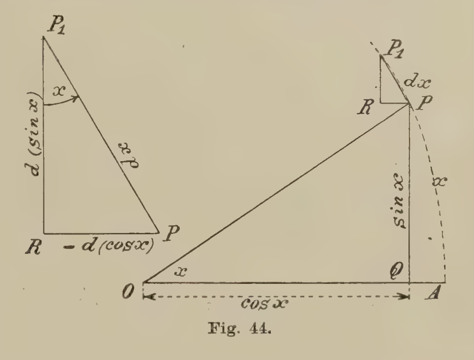


Fig. 44.

Beispiel. Man stelle in der üblichen Weise $\sin x$ und $\cos x$ als Abszisse und Ordinate eines Punktes P im Kreise mit der Einheit als Radius dar und ändere x (das zugleich Bogen und Winkel ist), um dx. (Fig. 44.) Dann ist RP_1 die Änderung von $\sin x$, also $d \sin x$ und RP die negative Änderung von $\cos x$, also $-d \cos x$. Da $PP_1 \perp OP$ und $RP_1 \perp OQ$ steht, so ist $\sphericalangle RP_1P = x$, also:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x; \quad -\frac{d \cos x}{dx} = \sin x; \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

Man sieht, Nr. 3 und Nr. 4 in Tafel II, § 15 sind wieder gefunden, aber diesmal durch Differentialgeometrie.

In einem Lehrbuch der Differentialrechnung kommt selbstverständlich die Rechnung zuerst und die Geometrie zu zweit, sonst würde ja wohl ein Lehrbuch der Differentialgeometrie daraus werden. Aber es schadet nichts, wenn letztere wirklich unmittelbar nach der ersteren kommt, ja wenn sich zuletzt beide recht innig miteinander verbinden.

Es folgen zum Schluß noch einige Betrachtungen über die Rolle, welche die abgeleitete Funktion in der Mechanik spielt.

151. Die Geschwindigkeit als abgeleitete Funktion. Ein Punkt, der sich gleichförmig geradlinig bewegt und in der Zeit t den Weg s beschreibt, hat die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}. \tag{1}$$

Rechnet man die Zeit von irgendeinem Augenblick als Anfangszeit und ebenso die Strecken von irgendeinem gegebenen Punkte als Abszissen, so muß t durch $\varDelta t = t_1 - t$ und s durch $\varDelta x = x_1 - x$ ersetzt werden. Man schreibt dann:

$$v = \frac{\varDelta x}{\varDelta t}. \tag{1a}$$

Die Geschwindigkeit erscheint als Differenzenquotient, der aber bei ungleichförmiger Bewegung nur die durchschnittliche oder mittlere Geschwindigkeit während der Zeit $\varDelta t$ mißt. Um die wahre, die augenblickliche Geschwindigkeit zu erhalten, wird kaum etwas anderes übrig bleiben, als $\varDelta t$ unendlich klein $= dt$ und entsprechend $\varDelta x$ unendlich klein $= dx$ zu denken und zu setzen:

$$v = \frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Man hat sich dann die sog. Bewegungsgleichung, d. h. x als Funktion von t:

$$x = f(t) \tag{3}$$

gegeben vorzustellen, worauf sich die Geschwindigkeit durch Differenzieren als:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = x' = f'(t) \tag{4}$$

ergibt. Die Geschwindigkeit ist der (erste) Differentialquotient des Weges nach der Zeit.

Beispiel: Die Formel von Galilei für die Falltiefe beim freien Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit lautet:

$$s = x = \frac{g}{2} t^2, \tag{5}$$

daher durch Differenzieren:

$$v = \frac{dx}{dt} = gt. \tag{6}$$

Galilei hat freilich damals den umgekehrten Weg eingeschlagen. Er nahm an, daß die Geschwindigkeit der Zeit proportional sei, d. h. er nahm (6) an und ging dann durch das Verfahren, welches wir jetzt „Integrieren" nennen, auf (5) über.

Die Geschwindigkeit v einer Bewegung ist einer der wichtigsten Hilfsbegriffe der Mechanik, denn ohne v ist insbesondere Dynamik überhaupt nicht mehr möglich. Also ist Dynamik auch nicht möglich ohne Differenzieren (und Integrieren). Um diese Folgerung kommt man durch keine noch so geistvollen Worte herum. Man versuche doch, bei einer ungleichförmigen Bewegung eine andere stichhaltige Definition der „augenblicklichen" Geschwindigkeit zu geben als durch (2), und man wird eingestehen müssen, daß es nicht geht.

So steht das Differenzieren durch Vermittlung der Größe v, aus der durch Zusammensetzung mit der Masse bekanntlich von Cartesius die Bewegungsgröße $= mv$ und von Leibniz die vis viva $= \frac{mv^2}{2}$ (der Nenner 2 ist erst später von Coriolis hinzugefügt worden) gebildet worden ist, am Anfang der Dynamik, welche außer dieser Bahngeschwindigkeit noch andere Geschwindigkeiten, z. B. Winkelgeschwindigkeit und Flächengeschwindigkeit als die Geschwindigkeiten eingeführt hat, mit denen sich Winkel oder Flächen mit der Zeit ändern. Sie sind selbstverständlich Differentialquotienten von Winkeln und Flächen „nach der Zeit".

Aber auch andere Naturwissenschaften haben sich den Begriff der Geschwindigkeit im exakten Sinne zu eigen gemacht. So spricht der Physiker von der Geschwindigkeit der Wärmeleitung bei Berührung von Körpern verschiedener Temperatur oder der Chemiker von der Reaktionsgeschwindigkeit, wenn sich Stoffe chemisch verbinden. Und hinter all diesen Geschwindigkeiten steht die Differentialrechnung und sagt: „Was mathematisch an ihnen ist, das gehört mir allein an. Denn es sind Differentialquotienten, mögen sie außerdem noch bedeuten was sie wollen."

152. Die Beschleunigung als zweite abgeleitete Funktion. Die Mechanik begnügt sich aber nicht mit einmaliger Differentiation, sondern differenziert sofort noch einmal und nennt das Ergebnis „Beschleunigung". Bezeichnet man sie etwa mit dem Buchstaben p, so ist:

$$x = f(t), \tag{1}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t), \tag{2}$$

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{(dt)^2} = f''(t). \tag{3}$$

Die Beschleunigung ist der zweite Differentialquotient oder die zweite Ableitung des Weges (der Abszisse) nach der Zeit. Sie ist also auch der erste Differentialquotient der Geschwindigkeit oder so zu sagen die Geschwindigkeit der Geschwindigkeit. Wie wichtig die Beschleunigung für die Dynamik ist, erhellt aus ihrem ersten Grundgesetz, welches bekanntlich lautet:

Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung.

Allerdings ist in der Regel nicht (1) sondern (3) gegeben, eben durch dieses Grundgesetz, worauf man durch einmaliges Integrieren aufsteigt zu (2) und dann durch nochmaliges Integrieren zu (1). (Daß dabei, wenn die Bewegung nicht in einer von vornherein gegebenen Geraden, sondern beliebig im Raume vor sich geht, erst nach den drei Koordinatenachsen [in der Ebene in zwei] zerlegt werden muß usw., ist hier nebensächlich.) Als klassisches Beispiel siehe § 41.

Die Deviation. Eine sehr vorzügliche Anwendung hat die Formel (5) in [141]:

$$y = y_0 + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \lambda h)$$

in der Mechanik erhalten.

Man schreibe t statt x, x statt y und $\varDelta t$ statt h:

$$x = x_0 + \frac{\varDelta t}{1!} v_0 + \frac{(\varDelta t)^2}{2!} f''(t_0 + \lambda \varDelta t),$$

oder:

$$s = \varDelta t \cdot v_0 + \frac{(\varDelta t)^2}{2!} f''(t_0 + \lambda \varDelta t).$$

Ferner denke man sich einen zweiten (fingierten) beweglichen Punkt, der auch zur Zeit t_0 in P_0 ist, dort dieselbe Geschwindigkeit v_0

Fig. 45.

besitzt, aber diese Geschwindigkeit während der Zeit $\varDelta t$ beibehält. (Fig. 45.) Dann erhält man für den Weg dieses zweiten Punktes:

$$s' = \varDelta t \cdot v_0.$$

Der Unterschied beider Wege ist die von Euler eingeführte Deviation. Sie heiße D. Man erhält:

$$D = s - s' = \frac{(\varDelta t)^2}{2!} f''(t_0 + \lambda \varDelta t).$$

Ist im besonderen Δt unendlich klein $= dt$, so entsteht die eben beginnende Deviation, wenn Glieder von höherer als der zweiten Ordnung ausgeschlossen werden:

$$D = f''(t_0)\frac{(dt)^2}{2} = p_0\frac{(dt)^2}{2}.$$

Sie ist unendlich klein von der zweiten Ordnung und entspricht vollständig der in [149] berechneten unendlich kleinen Abweichung von der Tangente.

Übrigens hat man die Beschleunigung genau wie die Geschwindigkeit auch auf Winkel, Flächen und naturwissenschaftliche Größen übertragen. Die Deutung wechselt dabei, aber der mathematische Kern als zweiter Differentialquotient bleibt immer derselbe.

153. Newtons Fluxionsrechnung. Betrachtet man einerseits die Gleichung für die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{1}$$

und andererseits die Gleichung für die abgeleitete Funktion:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \tag{2}$$

so entspricht dem t in (1) das x in (2), dem x in (1) das y in (2) und dem v in (1) das y' in (2). Insofern ist man völlig berechtigt zu erklären:

Der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ oder ihre Ableitung:

$$y' = f'(x) \tag{3}$$

ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Funktion (augenblicklich) ändert, wenn sich die ursprüngliche Veränderliche ändert. Oder im geometrischen Bilde: Sie ist die Geschwindigkeit der Änderung der Ordinate „mit“ der Abszisse. Es wird dann die Abszisse als Zeit und die Ordinate als Weg gedeutet. Warum auch nicht! Gleichnisse haben auch in der abstraktesten Analysis ihr gutes, wenn sie sich nur nicht aufdrängen.

Von einem Gleichnis hat auch die Newtonsche Fluxionsrechnung, welche von der Leibnizschen Differentialrechnung nur in der Form etwas abweicht, ihren Namen. Wie die Zeit stetig fließt, so betrachtete — so zu sagen — Newton die stetig veränderlichen Größen als fließend, als „Fluenten“. In der Funktion:

$$y = f(x) \tag{4}$$

fließt die ursprüngliche Veränderliche x und mit ihr die Funktion y. Die Geschwindigkeit des Fließens der letzteren, also das, was wir Differentialquotient oder abgeleitete Funktion nennen, ist die „Fluxion“.

Auch ihr kommt eine besondere Bezeichnung nämlich der „Fluxionspunkt“ zu, welcher völlig dem Lagrangeschen Differentiationsstrich entspricht. Man schreibt in der Fluxionsrechnung nicht y' und y'', sondern:

$$\dot{y} \quad \text{und} \quad \ddot{y}. \tag{5}$$

Der Name Fluxionsrechnung und die zugehörigen Bezeichnungen sind in England noch vielfach neben denjenigen der Differentialrechnung in Gebrauch. In neuerer Zeit scheinen sie sogar bei uns mehr in Anwendung zu kommen, wenigstens dann, wenn die ursprüngliche Veränderliche wirklich die Zeit, also die Fluxion wirklich Geschwindigkeit ist, was ja besonders für die Mechanik gilt.

Übungen zu § 17.

1. In der Gleichung der Parabel $y = a + bx + cx^2$ sollen die Koeffizienten a, b, c so bestimmt werden, daß sie durch $P(+2, -3)$ geht, daß der Richtungswinkel der Tangente in diesem Punkte $= 30^0$ ist und daß die eben beginnende Abweichung von der Tangente $= 7h^2$ ist, wenn h die unendliche kleine Änderung von x $(+2)$ bedeutet.

2. Gegeben die Gleichung $y = f(x)$ irgend einer Kurve. Von welcher Ordnung unendlich klein ist die Fläche zwischen der durch die Punkte $P(x, y)$ und $P(x + dx,\ y + dy)$ begrenzten Sehne und dem zugehörigen Bogen? Berechnung ausschließlich Glieder höherer Ordnung.

3. Von welcher Ordnung unendlich klein ist der Unterschied zwischen der Länge des Bogens und der Sehne unter gleicher Voraussetzung wie in 2? Berechnung dieses Unterschiedes ausschließlich Glieder höherer Ordnung.

4. Gegeben die Gleichung der Lemniskate in Polarkoordinaten

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Es ist eine einfache Konstruktion der Normale und Tangente zu suchen.

5. Dasselbe für die Spirale mit der Gleichung:

$$r = ae^{k\varphi}.$$

(a und k konstant).

§ 18. Höhere Ableitungen; höhere Differentiale.

154. Vor Inangriffnahme weiterer Anwendungen der Differentialrechnung empfiehlt es sich, ihre Begriffe soweit zu entwickeln, wie es die Mathematik überhaupt für gut befunden hat. Es soll in diesem und dem nächsten Paragraphen geschehen.

Höhere Ableitungen. Die erste und zweite Ableitung einer Funktion:

$$y = f(x), \tag{1}$$

also die Ausdrücke:

$$y' = f'(x), \quad y'' = f''(x) \tag{2}$$

sind in bezug auf ihre Eigenschaften und Anwendungen schon recht eingehend erläutert worden. Auf sie folgen, wenn man das Differenzieren fortsetzt:

$$y''' = f'''(x), \quad y'''' = f''''(x), \ldots \tag{3}$$

und allgemein die p^{te} Ableitung oder die Ableitung p^{ter} Ordnung:

$$y^p = f^p(x) \tag{4}$$

(p ist hier selbstverständlich kein Exponent, sondern steht für p Differentiationsstriche).

Zuweilen bleiben die Rechnungen beim wiederholten Differenzieren so leicht, daß die Ableitung für jede Ordnung p sofort hingeschrieben werden kann. Am allereinfachsten ist

Erstes Beispiel:

$$y = e^x; \quad y' = e^x, \; y'' = e^x, \ldots \quad y^p = e^x, \ldots \tag{1}$$

Zweites Beispiel:

$$\begin{aligned} &y = x^n, \; y' = n x^{n-1}, \; y'' = n(n-1)x^{n-2} \ldots \\ &y^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)x^{n-p}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ist n eine positive ganze Zahl, so wird die n^{te} Ableitung $= n!\, x^0 = n!$, also konstant. Es verschwinden alle folgenden Ableitungen. Ist n aber beliebig, so hört das Differenzieren nie auf, z. B.:

$$= \sqrt{x}, \; y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y'' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, \ldots\ldots$$

Drittes Beispiel:

$$y = \sin x, \; y' = \cos x, \; y'' = -\sin x, \; y''' = -\cos x, \; y'''' = \sin x = y$$

usw. Es gibt nur vier von einander verschiedene Ableitungen. Da:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

ist, so kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} &y = \sin x, \quad y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \cdots \\ &y^p = \sin\left(x + p\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} &y = \cos x, \quad y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \cdots \\ &y^p = \cos\left(x + p\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

In anderen Fällen findet man zwar leicht durch Induktion die allgemeine Form der Ableitung, doch bleiben noch Koeffizienten zu bestimmen übrig.

Beispiel:

$$y = \operatorname{tg} x; \quad y' = \operatorname{tg}^2 x + 1 = y^2 + 1, \quad y'' = 2yy' = 2y^3 + 2y,$$
$$y''' = (6y^2 + 2)y' = (6y^2 + 2)(y^2 + 1) = 6y^4 + 8y^2 + 2.$$

So kann man fortfahren. Es ergibt sich allgemein:

$$y^p = A(\operatorname{tg} x)^{p+1} + B(\operatorname{tg} x)^{p-1} + C(\operatorname{tg} x)^{p-3} + \cdots$$

Doch wären noch $A, B, C, \ldots$ zu bestimmen. Die Induktion, welche noch zu bewahrheiten wäre, ergibt: $A = p!$ und (ausgenommen $p = 1$) $B = (p+1)! : 3$. $C, D \ldots$ sind erheblich schwieriger zu ermitteln, worauf aber hier nicht eingegangen werden soll. Die Hauptsache ist ja doch, daß jede Ableitung aus der vorangehenden immer wieder nach den in Tafel I und Tafel II § 15 aufgestellten Formeln und Regeln berechnet werden kann.

Übrigens lassen einige der allgemeinen Formeln in Tafel I eine entsprechende und recht einfache Ausdehnung zu.

Erstes Beispiel. Es ist allgemein:

$$(u + v + w \cdots)^p = u^p + v^p + w^p + \cdots \tag{5}$$

Setzt man also etwa:

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + lx^{n-1} + mx^n,$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} y' &= b + 2cx + \cdots (n-1)lx^{n-2} + nmx^{n-1} \\ y'' &= 1 \cdot 2c + \cdots + (n-1)(n-2)lx^{n-3} + n(n-1)mx^{n-2} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y^n &= n!\, m \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und alle Ableitungen von noch höherer Ordnung verschwinden.

Zweites Beispiel. Nach § 15 Tafel I 8 ist in anderer Bezeichnung:

$$(uv)' = uv' + vu',$$

also:

$$\begin{aligned} (uv)'' &= (uv')' + (vu')' = uv'' + u'v' + vu'' + v'u' \\ &= uv'' + 2u'v' + u''v \\ (uv)''' &= (uv'')' + 2(u'v')' + (u''v)' \\ &= uv''' + u'v'' + 2u'v'' + 2u''v' + u''v' + u'''v \\ &= uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v \end{aligned}$$

usw. Die Induktion, welche sehr leicht mittels des Schlusses von p auf $p + 1$ bestätigt werden kann, gibt:

$$(uv)^p = uv^p + \binom{p}{1}u'v^{p-1} + \binom{p}{2}u''v^{p-2} + \cdots + u^p v. \tag{7}$$

Liegen implizite Darstellungen vor, so ermittele man die Ableitungen indirekt, wie es für $p = 1$ und $p = 2$ in [124] bis [127] geschehen ist. Die Formeln werden selbstverständlich mit wachsendem p immer länger, aber das Verfahren selbst bleibt wesentlich unverändert.

Was nun folgt, betrachte man in der Hauptsache als eine Ausdehnung der analytischen und geometrischen Betrachtungen der vorangegangenen beiden §§ auf die höheren Ableitungen.

155. Die p^{te} Ableitung und der p^{te} Differenzenquotient.
Lehrsatz. Bildet man unter Zugrundelegung einer Funktion $y = f(x)$ aus irgend welchen $p + 1$ Wertepaaren:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \ldots (x_p, y_p) \tag{1}$$

nach § 3 den p^{ten} Differenzenquotienten L, so gibt es mindestens einen Mittelwert x_m in dem durch $x_0, x_1 \ldots x_p$ bestimmten Spielraum, für welchen die Gleichung besteht:

$$\boldsymbol{L = f^p(x_m)}, \tag{2}$$

d. h.: p^{ter} Differenzenquotient $= p^{te}$ Ableitung.

Beweis: Für $p = 1$ und $p = 2$ ist der Beweis in [133] und [140] bereits erbracht und die Richtigkeit sogar durch Zahlenbeispiele bestätigt worden. Für ein beliebiges p aber kann der Beweis demjenigen für $p = 2$ völlig nachgebildet werden, wie folgt. Man führe außer $f(x)$ noch eine ganze Funktion p^{ten} Grades:

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + mx^p$$

ein. Für diese gilt der Satz, weil einerseits L konstant $= p!\, m$ (77_3), andererseits die p^{te} Ableitung auch konstant $= p!\, m$ ist nach [154 6].

Man bestimme nun die Koeffizienten $a, b, \ldots, m$ so nach [78], daß die Funktionswerte von $\varphi(x)$ mit den Funktionswerten von $f(x)$ für die in (1) angenommenen $p + 1$ Werte $x_0, x_1 \ldots, x_p$ der ursprünglichen Veränderlichen übereinstimmen, also:

$$f(x_0) = \varphi(x_0),\quad f(x_1) = \varphi(x_1) \ldots,\quad f(x_p) = \varphi(x_p)$$

ist, was zur Folge hat, daß erstens L für $f(x)$ und $\varphi(x)$ denselben Wert hat, wenn man diese Werte von x nimmt und daß zweitens die Funktion:

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$$

verschwindet für diese selben Werte von x. Nach dem erweiterten Satz von Rolle [135] gibt es daher (mindestens) einen Wert x_m, für den die p^{te} Ableitung von $\psi(x)$ ebenfalls verschwindet. Andererseits ist:

$$\psi^p(x) = f^p(x) - \varphi^p(x), \text{ also für } x = x_m:$$

$$f^p(x_m) = \varphi^p(x_m).$$

Nun gilt für die Funktion φ die Formel (2) wie eben gezeigt, also ist:

$$f^p(x_m) = L, \text{ q. e. d.}$$

156. Die p^{te} Differenz. Das p^{te} Differential. Der p^{te} Differentialquotient. Man lasse in [155] den Index 0 fort und setze im besonderen:

$$\Delta x = \Delta x_1 \ldots, \quad = \Delta x_{p-1},$$

so geht der Spielraum von x bis $x + p\Delta x$. Also ist x_m von der Form:

$$x_m = x + p\lambda\Delta x,$$

während L die Form [29 3] annimmt. Es wird:

$$\frac{\Delta^p y}{(\Delta x)^p} = f^p(x + p\lambda\Delta x); \quad \Delta^p y = f^p(x + p\lambda\Delta x)\cdot(\Delta x)^p \qquad (0 < \lambda < 1) \quad (1)$$

Die p^{te} Differenz der Funktion ist bei konstanter erster Differenz Δx der ursprünglichen Veränderlichen gleich dem Produkt aus der p^{ten} Potenz von Δx und einem Mittelwert der p^{ten} Ableitung. Vgl. [134 2] und [141 1].

Setzt man im besonderen Δx unendlich klein $= dx$, so folgt:

$$\alpha) \quad \frac{d^p y}{(dx)^p} = f^p(x); \qquad \beta) \quad d^p y = f^p(x)(dx)^p = y^p (dx)^p. \quad (2)$$

Die erste Gleichung α), welche genau ist bis auf unendlich kleine Größen, sagt aus, daß der p^{te} Differentialquotient = der p^{ten} Ableitung ist und die zweite β), welche genau ist bis auf unendlich kleine Größen von höherer als der p^{ten} Ordnung, sagt aus, daß das p^{te} Differential der Funktion gleich dem Produkt aus der p^{ten} Ableitung und der p^{ten} Potenz des ersten Differentials dx der ursprünglichen Veränderlichen ist, falls man letzteres konstant setzt. Vgl. [117 1] und [138 7].

Setzt man h statt dx, so folgt aus (1) (nach [24 3]):

$$f^p(x) = \lim_{(h=0)} \frac{f(x+hp) - \binom{p}{1} f(x + h(p-1)) + \binom{p}{2} f(x + h(p-2)) \cdots \pm f(x)}{h^p} \quad (3)$$

als Definition der p^{ten} Ableitung durch einen limes. Vgl. [118 2] und [139 7].

Es ist aber nicht nötig, daß $dx = dx_1 = dx_2 = \cdots$ gesetzt wird. Man kann auch annehmen, daß $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p$, obgleich sie verschieden sein sollen, sich doch alle in sonst beliebiger Weise dem Wert x unbegrenzt annähern. Nach [31 3] folgt also:

$$f^p(x) = \lim L = p! \lim \Big[\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_p)} + \cdots + \frac{f(x_p)}{(x_p - x_0)(x_p - x_1)\cdots(x_p - x_{p-1})} \Big] \tag{4}$$
$$(\lim x_0 = \lim x_1 = \lim x_2 \cdots = x)$$

als zweite, erheblich erweiterte Definition der p^{ten} Ableitung durch einen limes. Vgl. [120 5] und [141 2].

Geometrische Dimensionen der Ableitungen. Wenn x und $y = f(x)$ als Koordinaten, also als Längen oder Größen von der ersten (geometrischen) Dimension gedeutet werden, so müssen auch die Ableitungen nach (1) ihre ganz bestimmten geometrischen Dimensionen haben. Die erste Ableitung hat die Dimension 0, sie ist ein „reines" Verhältnis. Die zweite Ableitung hat die Dimension -1, d. h. ihr reziproker Wert würde eine Länge sein, denn in (1) wird für $p = 2$ eine Länge durch das Quadrat einer Länge dividiert. Die dritte Ableitung hat die Dimension -2, denn in (1) wird für $p = 3$ eine Länge durch den Kubus einer Länge dividiert usw. Allgemein ist die Dimension der p^{ten} Ableitung (wenn x und y Längen bedeuten) $= -p + 1$.

Wo sich Gelegenheit bietet, prüfe man die Dimensionen. Sie müssen in einer richtigen Gleichung links und rechts stimmen. Wenn z. B. die Formel für den Krümmungsradius:

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}$$

vorgelegt wird, so kann man, auch ohne ihre Herkunft zu kennen, sie doch auf die Dimensionen hin prüfen. Links steht ϱ, d. h. eine Länge, also Dimension 1. Rechts steht im Zähler ein Ausdruck von der Dimension 0 und im Nenner ein Ausdruck von der Dimension -1. Also hat die rechte Seite auch die Dimension 1. Die Dimensionen „stimmen". (Würden sie nicht stimmen, so würde man sofort mit größter Gewißheit sagen können, daß ein Fehler in der Formel stecken muß).

157. Der Taylorsche Lehrsatz mit dem allgemeinen Restglied von Lagrange. Man nehme die Formel [31 4] von Newton, setze $y = f(x)$, schreibe p statt n, lasse $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{p-1}$ sämtlich x unbegrenzt nähern, setze aber zuletzt $x_p = x + h$, $x_p - x = h$ (h beliebig), also auch $\lim x_p - x_1 = \lim x_p - x_2 = \cdots = h$. Dann wird nach [156 4], wenn dort statt p der Reihe nach $1, 2, 3, \ldots p-1$ gesetzt wird:

$$\lim A = f'(x), \quad \lim B = f''(x), \ldots \lim K = f^{p-1}(x).$$

Dagegen nach [155 2]: $L = f^p(x + \lambda h)$. So ergibt [31 4]:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$
$$+ \frac{h^{p-1}}{(p-1)!}f^{p-1}(x) + \frac{h^p}{p!}f^p(x+\lambda h). \qquad (1)$$

Die rechte Seite ist eine Potenzreihe, fortschreitend nach Potenzen von h, aber abgebrochen bei der $p-1^{\text{ten}}$ Potenz und deshalb geschlossen durch „das Restglied von Lagrange“:

$$R = \frac{h^p}{p!}f^p(x+\lambda h). \qquad (1 > \lambda > 0) \qquad (2)$$

Für $p = 1$ und $p = 2$ ist:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x+\lambda h), \qquad (1\,\text{a})$$

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x+\lambda h), \qquad (1\,\text{b})$$

wie schon in [134 4] und [141 5] gezeigt wurde. Von λ ist allgemein nur bekannt, daß sein Wert zwischen 0 und 1 liegt. Daher müßte man bei gleichzeitigem Gebrauch von (1), (1 a) und (1 b) die drei λ durch Indizes etwa als λ_1, λ_2, λ_3 unterscheiden.

Andere Restformen für die Taylorsche Reihe. Der Rest von Cauchy, der Rest von Schloemilch. Man setze allgemein:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!}f^{p-1}(x) + R \qquad (3)$$

und suche für R einfache Ausdrücke auf. Zunächst setze man $x + h = z$, $h = z - x$ und berechne R aus (3). Man erhält:

$$R(x) = f(z) - f(x) - \frac{z-x}{1!}f'(x) - \frac{(z-x)^2}{2!}f''(x) \cdots - \frac{(z-x)^{p-1}}{(p-1)!}f^{p-1}(x). \quad (4)$$

Daß hier $R(x)$ statt R geschrieben ist, soll bedeuten, daß zunächst z als gegeben, x aber als veränderlich anzusehen ist. Man erhält in diesem Sinne sofort:

$$R(z) = 0. \qquad (5)$$

Sodann differenziere man (4) nach x und beachte die Gleichungen:

$$\frac{d\left(-\frac{z-x}{1!}f'(x)\right)}{dx} = f'(x) - \frac{z-x}{1!}f''(x),$$

$$\frac{d\left(-\frac{(z-x)^2}{2!}f''(x)\right)}{dx} = \frac{(z-x)}{1!}f''(x) - \frac{(z-x)^2}{2!}f'''(x),$$

$$\frac{d\left(-\frac{(z-x)^3}{3!}f'''(x)\right)}{dx} = \frac{(z-x)^2}{2!}f'''(x) - \frac{(z-x)^3}{3!}f''''(x)$$

usw. Also heben sich bei der Differentiation von (4) rechts alle Glieder bis auf das letzte. Man erhält ganz überraschend einfach:

$$R'(x) = -\frac{(z-x)^{p-1}}{(p-1)!} f^p(x). \tag{6}$$

Diese Formel für R' soll die gesuchten Ausdrücke für R liefern. Man wende hierzu (1 a) an, setze dort gleichfalls $h = z - x$, aber $R(x)$ statt $f(x)$. Man erhält:

$$R(z) = R(x) + \frac{z-x}{1!} R'(x + \lambda(z-x)),$$

also nach (5):

$$R(x) = -\frac{z-x}{1!} R'(x + \lambda(z-x)). \tag{7}$$

Nun ist nach (6):

$$R'(x + \lambda(z-x)) = -\frac{[z-(x+\lambda(z-x))]^{p-1}}{(p-1)!} f^p(x + \lambda(z-x))$$

$$= -\frac{(z-x)^{p-1}(1-\lambda)^{p-1}}{(p-1)!} f^p(x + \lambda(z-x)),$$

also wenn in (7) eingesetzt, statt $R(x)$ wieder R und statt $z - x$ wieder h geschrieben wird:

$$\boldsymbol{R = \frac{h^p}{(p-1)!}(1-\lambda)^{p-1} f^p(x+\lambda h) \qquad (1 > \lambda > 0).} \tag{8}$$

Dies ist die Restform von Cauchy. Man vergleiche mit der von Lagrange (2). Die Ähnlichkeit springt in die Augen, aber auch die Abweichung. Um weitere Restformen abzuleiten, nehme man die (eigens hierzu entwickelte) Formel [137]:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \frac{f'(x+\lambda h)}{\varphi'(x+\lambda h)}, \quad \text{oder} \quad \frac{f(z) - f(x)}{\varphi(z) - \varphi(x)} = \frac{f'(x+\lambda(z-x))}{\varphi'(x+\lambda(z-x))}.$$

Hier ersetze man zunächst $f(x)$ durch $R(x)$. Man erhält nach (6), da $R(z)$ identisch verschwindet:

$$\frac{-R(x)}{\varphi(z) - \varphi(x)} = -\frac{[z-(x+\lambda(z-x))]^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \frac{f^p(x+\lambda(z-x))}{\varphi'(x+\lambda(z-x))}. \tag{9}$$

Nach [137] soll $\varphi'(x)$ in dem fraglichen Spielraum das Vorzeichen nicht wechseln. Diese Bedingung für die Funktion $\varphi(x)$ wird z. B. erfüllt, wenn man $\varphi(x) = (z-x)^q$ setzt. Es wird $\varphi(z) = 0$ und $\varphi'(x) = -q(z-x)^{q-1}$, daher:

$$\varphi'(x+\lambda(z-x)) = -q[z-(x+\lambda(z-x))]^{q-1} = -q(z-x)^{q-1}(1-\lambda)^{q-1}.$$

Daher nach Einsetzen in (9) und gehöriger Umformung:

$$R(x) = \frac{(z-x)^p(1-\lambda)^{p-q}}{q(p-1)!} f^p(x+\lambda(z-x)),$$

oder wenn schließlich wieder R und h statt $R(x)$ und $z-x$ geschrieben werden:

$$R = \frac{h^p (1-\lambda)^{p-q}}{q(p-1)!} f^p(x+\lambda h). \quad (1 > \lambda > 0) \tag{10}$$

Diese Restform rührt von Schloemilch her. Für $q = p$ geht sie in die von Lagrange (2), für $q = 1$ in die von Cauchy (8) über.

158. Da die Hauptanwendungen des so äußerst wichtigen Taylorschen Satzes auf den fünften und sechsten Abschnitt aufgespart sind, so seien hier nur einige einfachere Folgerungen vorgebracht.

Es mögen die Funktion $f(x)$, sowie ihre erste, zweite ... p^{te} Ableitung für einen bestimmten Wert von x verschwinden. Dann folgt für dieses x, wenn in [157 1] $p+1$ statt p gesetzt wird:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{p+1}(x+\lambda h); \tag{1}$$

oder für $h = \Delta x$:

$$\Delta y = \Delta f(x) = \frac{(\Delta x)^{p+1}}{(p+1)!} f^{p+1}(x+\lambda \Delta x) \tag{1a}$$

und im besonderen, wenn Δx unendlich klein $= dx$ gesetzt wird:

$$dy = df(x) = f^{p+1}(x+\lambda dx) \cdot \frac{(dx)^{p+1}}{(p+1)!}. \tag{1b}$$

An einer solchen Stelle wird also dy nicht wie sonst [114] von gleicher, sondern von höherer, nämlich der $p+1^{ten}$ Ordnung unendlich klein im Vergleich zu dx. Beispiel:

$$y = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 3; \quad y' = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4.$$
$$y'' = 12x^2 - 30x + 12 \qquad y''' = 24x - 30.$$

Es verschwinden y' und y'' aber nicht y''' für $x = +2$, während y den Wert $+5$ erhält. Also muß dy von der dritten Ordnung unendlich klein werden. In der Tat folgt:

$$\begin{aligned} dy &= f(2+dx) - f(2) \\ &= [(2+dx)^4 - 5(2+dx)^3 + 6(2+dx)^2 + 4(2+dx) - 3] - 5 \\ &= +3(dx)^3 + (dx)^4. \end{aligned}$$

Übrigens ergibt sich im vorliegenden Ausnahmefall eine beachtenswerte Verschiedenheit, je nachdem p ungerade oder gerade ist. $f^{p+1}(x)$ soll $\neq 0$ sein, also hat $f^{p+1}(x+\lambda\Delta x)$ für hinreichend kleine Δx dasselbe Vorzeichen wie $f^{p+1}(x)$. Bleibt $|\Delta x|$ innerhalb eines solchen Spielraumes, so folgt aus (1a):

Ist p gerade, so wechselt Δy mit Δx zugleich das Vorzeichen, da $(\Delta x)^{p+1}$ mit Δx das Vorzeichen wechselt. Ist aber p ungerade,

so wechselt Δy nicht sein Vorzeichen, wenn Δx das seinige wechselt, weil $(\Delta x)^{p+1}$ immer positiv ist.

159. Aus [158] folgt: Wenn zwei Funktionen:

$$y = f(x), \quad Y = \varphi(x) \tag{1}$$

die Eigenschaft haben, daß für ein bestimmtes x, etwa für x_0, die Funktionswerte, aber außerdem ihre ersten, zweiten ... bis p^{ten} Ableitungen übereinstimmen, während die $p+1^{\text{ten}}$ Ableitungen voneinander verschieden sind:

$$y_0 = Y_0, \quad y_0' = Y_0' \cdots, \quad y_0^p = Y_0^p, \quad y_0^{p+1} \neq Y_0^{p+1}, \tag{2}$$

so wird der Unterschied:

$$\psi(x) = y - Y = f(x) - \varphi(x) \tag{3}$$

unendlich klein von der $p+1^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn der Unterschied zwischen x und x_0 unendlich klein von der ersten Ordnung gesetzt wird.

Denn es folgt aus (2), da $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$ gesetzt ist:

$$\psi(x_0) = 0, \quad \psi'(x_0) = 0 \ldots, \quad \psi^p(x_0) = 0, \quad \psi^{p+1}(x_0) \neq 0,$$

also nach [158], wenn $f(x)$ durch $\psi(x)$, x durch x_0, $x+h$ durch x ersetzt wird:

$$\psi(x) - \psi(x_0) = y - Y = \frac{(x-x_0)^{p+1}}{(p+1)!} \psi^{p+1}(x_0 + \lambda(x - x_0)),$$

oder:

$$y - Y = \frac{(x-x_0)^{p+1}}{(p+1)!} \left(f^{p+1}(x_0 + \lambda(x-x_0)) - \varphi^{p+1}(x_0 + \lambda(x - x_0))\right) \cdot \tag{4}$$

Diese Formel beweist den Satz.

S c h n e i d e n v o n K u r v e n u n d B e r ü h r u n g e n v e r s c h i e d e n e r O r d n u n g e n. Man nehme an, (1) seien die Gleichungen zweier Kurven I und II und es sei zunächst $p = 0$, also:

$$y_0 = Y_0, \quad y_0' \neq Y_0',$$

so ist der gemeinsame Punkt: $P_0(x_0 y_0)$ ein gewöhnlicher Schnittpunkt

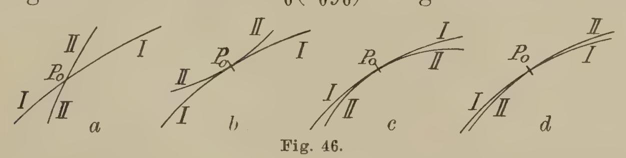


Fig. 46.

der beiden Kurven. (Fig. 46 a.) Sie haben in diesem Punkt verschiedene Tangenten. Ist dagegen $p = 1$, also:

$$y_0 = Y_0, \quad y_0' = Y_0', \quad y_0'' \neq Y_0'',$$

so ist P_0 ein gewöhnlicher Berührungspunkt, oder ein Berührungspunkt e r s t e r Ordnung. Die Abweichungen in der nächsten Umgebung von P_0 sind von der zweiten Ordnung und wechseln ihre

Zeichen nicht. Die Kurven gehen nicht durcheinander durch, sie berühren sich, aber schneiden sich nicht. (Fig. 46 b und Fig. 46 c.)

Ist dagegen $p = 2$, also:

$$y_0 = Y_0, \quad y_0' = Y_0', \quad y_0'' = Y_0'', \quad y_0''' \neq Y_0''',$$

so findet in P_0 eine Berührung von der zweiten Ordnung statt. Die Abweichungen in der nächsten Umgebung von P_0 sind von der dritten Ordnung und wechseln ihre Vorzeichen, wenn man sich auf die andere Seite von P_0 begibt. Die Kurven gehen durcheinander hindurch, sie berühren sich und schneiden sich zugleich. (Fig. 46 d.)

Für $p = 3$ findet eine Berührung dritter Ordnung statt. Die Abweichungen sind von der vierten Ordnung und wechseln ihre Vorzeichen nicht. Die Kurven berühren sich, aber schneiden sich nicht usw. Allgemein: Ist die Berührung von ungerader Ordnung, so gehen die Kurven an der Berührungsstelle nicht durcheinander hindurch, sie berühren sich, aber schneiden sich nicht. Ist die Berührung von gerader Ordnung, so gehen die Kurven an der Berührungsstelle hindurch, sie berühren sich und schneiden sich.

Erstes Beispiel: Gegeben:

$$\alpha)\ y = \frac{x^2}{2p}, \quad \beta)\ Y = p \pm \sqrt{p^2 - x^2}.$$

Die erste Kurve ist eine Parabel mit dem Halbparameter p, die zweite ein Kreis mit dem Radius p (Fig. 47). Man setze $x = 0$ und nehme in β) das $-$Zeichen, so folgt:

$$y_0 = 0, \quad Y_0 = 0; \quad y_0 = Y_0,$$

d. h. (0, 0) ist ein gemeinsamer Punkt. Man differenziere:

$$y' = \frac{x}{p}, \quad Y' = +\frac{x}{\sqrt{p^2 - x^2}},$$

also für $x = 0$,

$$y_0' = 0, \quad Y_0' = 0; \quad y_0' = Y_0',$$

d. h. $P(0, 0)$ ist kein Schnittpunkt, sondern ein Berührungspunkt. Um die Ordnung der Berührung zu bestimmen, differenziere man noch einmal. Es folgt:

$$y'' = \frac{1}{p}, \quad Y'' = \frac{\sqrt{p^2 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{p^2 - x^2}}}{\sqrt{p^2 - x^2}^{\,2}} = \frac{p^2}{+\sqrt{p^2 - x^2}^{\,3}},$$

also für $x = 0$,

$$y_0'' = \frac{1}{p}, \quad Y_0'' = +\frac{1}{p}; \quad y_0'' = Y_0''.$$

Die Berührung ist mindestens zweiter Ordnung. Man differenziere weiter. Es folgt:

$$y''' = 0, \quad Y''' = \frac{3p^2 x}{\sqrt{p^2 - x^2}^{\,5}},$$

also für $x = 0$,

$$y_0''' = 0, \quad Y_0''' = 0; \quad y_0''' = Y_0'''.$$

Die Berührung ist mindestens von der dritten Ordnung.

Man differenziere weiter. Es folgt:

$$y'''' = 0, \quad Y'''' = \frac{3p^2}{\sqrt{p^2 - x^2}^5} + \frac{15p^2x^2}{\sqrt{p^2 - x^2}^7},$$

also für $x = 0$,

$$y'''' = 0; \quad Y'''' = \frac{3}{p^3}; \quad Y'''' \neq y'''',$$

d. h. die Berührung ist von der dritten Ordnung. Der Kreis berührt die Parabel im Scheitel, schneidet sie aber nicht. (Fig. 47.) (Er ist Krümmungskreis im Scheitel [182]).

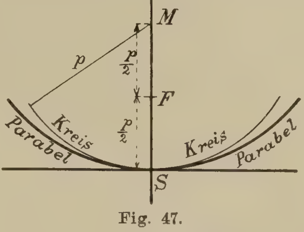


Fig. 47.

Zweites Beispiel (Fig. 48):

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad Y = \frac{5}{2}p \pm \sqrt{8p^2 - (x+p)^2}.$$

Die erste Kurve ist eine Parabel, die zweite ist ein Kreis mit dem Radius $2p\sqrt{2}$. Man setze $x = p$ und nehme das $-$Zeichen vor der Wurzel. Es folgt:

$$y = \frac{p}{2}, \quad Y = \frac{p}{2}; \quad y = Y,$$

d. h. der Punkt $P\left(+p, +\frac{p}{2}\right)$ ist ein gemeinsamer Punkt beider Kurven. Man differenziere. Es folgt:

$$y' = \frac{x}{p}, \quad Y' = \frac{x+p}{+\sqrt{8p^2 - (x+p)^2}},$$

also für $x = p$,

$$y_0' = +1, \quad Y_0' = +1; \quad y_0' = Y_0',$$

d. h. P ist ein Berührungspunkt. Man differenziere noch einmal. Es folgt:

$$y'' = \frac{1}{p}, \quad Y'' = \frac{8p^2}{+\sqrt{8p^2 - (x+p)^2}^3};$$

also für $x = p$,

$$y_0'' = \frac{1}{p}, \quad Y'' = \frac{1}{p}; \quad y_0'' = Y_0'',$$

d. h. die Berührung ist mindestens von der zweiten Ordnung. Man differenziere noch einmal. Es folgt:

$$y''' = 0, \quad Y''' = \frac{24p^2(x+p)}{\sqrt{8p^2 - (x+p)^2}^5},$$

also für $x = p$,

$$y''' = 0, \quad Y''' = \frac{3}{2p^2}; \quad y''' \neq Y''',$$

d. h. die Berührung ist von der zweiten Ordnung. Der Kreis und die Parabel durchdringen sich, sie berühren sich und schneiden sich in P. (Fig. 48.) (Der Kreis ist der Krümmungskreis der Parabel für den Punkt P [182]).

Drittes Beispiel (Fig. 49): Gegeben:

$$1)\quad y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2, \qquad 2)\quad Y = -x + 3.$$

Man setze $x = x_0 = +1$, es folgt:

$$y_0 = +2, \quad Y_0 = +2; \quad y_0 = Y_0.$$

Die Kurven haben $P(+1, +2)$ gemeinsam. Man differenziere:

$$y' = 3x^2 - 6x + 2; \quad Y' = -1,$$

also für $x = x_0 = +1$:

$$y_0' = -1, \quad Y_0' = -1; \quad y_0' = Y_0'.$$

P ist ein Berührungspunkt. Man differenziere noch einmal:

$$y'' = 6x - 6, \quad Y'' = 0,$$

also für $x = x_0 = +1$:

$$y_0'' = 0, \quad Y_0'' = 0, \quad y_0'' = Y_0''.$$

Die Berührung in P ist mindestens von der zweiten Ordnung. Man differenziere noch einmal:

$$y''' = 6, \quad Y''' = 0, \quad y''' \neq Y'''.$$

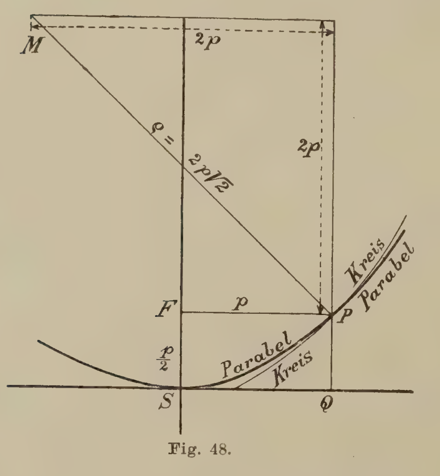


Fig. 48.

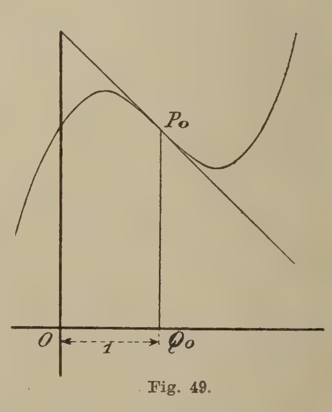


Fig. 49.

Die Berührung ist von der zweiten Ordnung. (Der Punkt $P(+1, +2)$ ist ein Wendepunkt der Kurve (Fig. 49) [181]. Die Wendetangente berührt nicht nur, sondern schneidet auch die Kurve in P).

160. Man sagt auch wohl: Bei einer Berührung p^{ter} Ordnung fallen $p+1$ Punkte der beiden Kurven in dem Berührungspunkt zusammen. Die Berechtigung dieser Redewendung läßt sich wie folgt dartun. Man nehme zunächst an, die Kurven mögen sich in $p+1$ beliebigen Punkten $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots P_p$ schneiden, so stimmen die aus den $p+1$ Wertepaaren:

$$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \ldots (x_p, y_p)$$

nach § 3 zu bildenden Differenzenquotienten für beide Kurven überein. Kommen sich nun $P_0, P_1, \ldots P_p$ unendlich nahe, so werden die Differenzenquotienten zu Differentialquotienten oder Ableitungen, und man kommt auf [159] zurück.

Erstes Beispiel: Es sollen die Schnittpunkte der Parabel und des Kreises:

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad y = p \pm \sqrt{p^2 - x^2}$$

bestimmt werden. Vgl. [159] erstes Beispiel. Man eliminiere y:

$$\frac{x^2}{2p} - p = \pm \sqrt{p^2 - x^2},$$

oder:

$$\left(\frac{x^2}{2p} - p\right)^2 = p^2 - x^2; \quad \text{d. h. } x^4 = 0.$$

Diese Gleichung vierten Grades hat vier Wurzeln, nämlich:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Sie fallen alle vier zusammen und ergeben:

$$y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0,$$

d. h. die Parabel und der Kreis haben vier Schnittpunkte gemeinsam, welche aber alle vier mit dem Scheitel zusammenfallen. Dort haben daher beide Kurven eine Berührung dritter Ordnung (wie vorhin schon auf andere Weise gezeigt).

Zweites Beispiel: Gegeben die Kurven (vgl. [159] zweites Beispiel):

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad y = \frac{5}{2}p \pm \sqrt{8p^2 - (x+p)^2}.$$

Es sollen die Schnittpunkte bestimmt werden. Man eliminiere y:

$$\frac{x^2}{2p} = \frac{5}{2}p \pm \sqrt{8p^2 - (x+p)^2};$$

$$\left(\frac{x^2}{2p} - \frac{5}{2}p\right)^2 = 8p^2 - (x+p)^2, \quad \text{oder:} \quad x^4 - 6p^2x^2 + 8p^3x - 3p^4 = 0.$$

Die linke Seite ist identisch mit dem Produkt (vgl. [161]):

$$(x-p)(x-p)(x-p)(x+3p),$$

folglich hat die Gleichung die vier Wurzeln:

$$x_0 = p, \quad x_1 = p, \quad x_2 = p, \quad x_3 = -3p,$$

denen die vier Werte von y:

$$y_0 = \frac{p}{2}, \quad y_1 = \frac{p}{2}, \quad y_2 = \frac{p}{2}, \quad y_3 = \frac{9}{2}p$$

entsprechen. Von den vier Schnittpunkten fallen also drei in $P\left(+p, +\frac{p}{2}\right)$ zusammen. Dort haben Parabel und Kreis eine Berührung zweiter Ordnung (bereits gezeigt). Der vierte Punkt $P'\left(-3p, +\frac{9}{2}p\right)$ dagegen ist ein gewöhnlicher Schnittpunkt.

161. Mehrfache Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades. Vorgelegt sei eine Gleichung n^{ten} Grades:

$$G_n(x) \equiv a + bx + cx^2 + \cdots + kx^{n-1} + lx^n = 0. \tag{1}$$

Sie habe die (reellen) Wurzeln $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{p-1}$ (und möglicherweise noch mehr), so hat die linke Seite nach [76] die Faktoren

$$(x - x_0), (x - x_1), \ldots (x - x_{p-1}),$$

d. h. es ist:

$$G_n(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{p-1})\, G_{n-p}(x), \tag{2}$$

wo $G_{n-p}(x)$ eine ganze Funktion von der Ordnung $n - p$ bezeichnet.

Es sei im besondern $x_0 = x_1 = x_2 = x_{p-1}$, d. h. die Gleichung habe p mal die Wurzel $x = x_0$. Dagegen habe die Gleichung $G_{n-p}(x) = 0$ nicht mehr die Wurzel $x = x_0$, so daß $x = x_0$ zwar eine p-fache, aber keine $p+1$-fache Wurzel von (1) ist. Aus (2) wird dann:

$$G_n(x) \equiv (x - x_0)^p \cdot G_{n-p}(x).$$

Die Differentiation nach x ergibt:

$$\begin{aligned} G_n'(x) &= (x - x_0)^p \cdot G'_{n-p}(x) + G_{n-p}(x) \cdot p(x - x_0)^{p-1} \\ &= (x - x_0)^{p-1}[(x - x_0)\, G'_{n-p}(x) + p\, G_{n-p}(x)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Hieraus folgt, daß $x = x_0$ eine $p - 1$-fache Wurzel der Gleichung $G_n'(x) = 0$ sein muß. Eine $p - 1$-fache, aber keine p-fache Wurzel, weil sonst in der eckigen Klammer, also auch in $G_{n-p}(x)$ der Faktor $x - x_0$ enthalten sein müßte, was obiger Annahme widerspricht. Also:

Lehrsatz: Hat eine Gleichung n^{ten} Grades $G_n(x) = 0$ eine p-fache Wurzel $x = x_0$, so hat die Gleichung $G_n'(x) = 0$ diese Wurzel x_0 $p - 1$-fach. Also hat die Gleichung $G_n''(x) = 0$ diese Wurzel x_0 $p - 2$-fach usf. Zuletzt hat die Gleichung $G^{n-(p-1)}(x) = 0$ die Wurzel x_0 als einfache Wurzel. Dagegen hat die Gleichung $G^{n-p}(x) = 0$ nicht mehr die Wurzel $x = x_0$. Umgekehrt:

Lehrsatz: Haben die Gleichungen:

$$G(x) = 0, \quad G'(x) = 0, \quad G''(x) = 0, \ldots G^{n-(p-1)}(x) = 0$$

ein und dieselbe Wurzel $x = x_0$, ist aber:

$$G^{n-p}(x) \neq 0$$

für $x = x_0$, so ist die Wurzel eine p-fache Wurzel der Gleichung:

$$G(x) = 0.$$

Beweis. Da diese Gleichung die Wurzel $x = x_0$ mindestens einmal haben soll, so ist zunächst:

$$G(x) \equiv (x - x_0)K(x),$$

wo K um einen Grad niedriger ist als G. Also:

$$G'(x) = (x - x_0)K'(x) + K(x).$$

Da die Gleichung $G'(x) = 0$ auch die Wurzel $x = x_0$ haben soll, so folgt, daß auch $K(x)$ diese Wurzel haben muß. Es ist daher:

$$K(x) = (x - x_0)K_1(x),$$

d. h.:

$$G(x) = (x - x_0)(x - x_0)K_1(x) = (x - x_0)^2 K_1(x).$$

In dieser Weise kann man fortfahren und zeigen, daß $x = x_0$ in der Tat eine p-fache Wurzel der Gleichung (1) ist.

Beispiel. Es sei [160], zweites Beispiel:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 6p^2x^2 + 8p^3x - 3p^4, \\
f'(x) &= 4x^3 - 12p^2x + 8p^3, \\
f''(x) &= 12x^2 - 12p^2, \\
f'''(x) &= 24x, \\
f''''(x) &= 24.
\end{aligned}$$

Man setze $x = p$, so folgt

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \quad f'''(x) \neq 0,$$

also ist $x = p$ eine dreifache Wurzel der Gleichung:

$$x^4 - 6p^2x^2 + 8p^3x - 3p^4 = 0.$$

Im besondern folgt aus beiden Lehrsätzen:

Eine einfache Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$ kann nicht zugleich Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ sein. Dagegen ist eine mehrfache Wurzel der ersten Gleichung zugleich Wurzel der zweiten Gleichung. Man kann also die mehrfachen Wurzeln bestimmen, indem man zu $f(x)$ und $f'(x)$ in der üblichen Weise den größten gemeinsamen Faktor ermittelt (konstante Faktoren spielen dabei keine Rolle) und diesen gemeinsamen Faktor $= 0$ setzt.

Beispiel. Es sind die (etwaigen) mehrfachen Wurzeln der vorigen Gleichung:

$$f(x) \equiv x^4 - 6p^2x^2 + 8p^3x - 3p^4 = 0$$

zu ermitteln. Man bilde:

$$f'(x) = 4x^3 - 12p^2x + 8p^3$$

und dividiere. (Zur Vermeidung konstanter Nenner wird $f'(x)$ vorher durch 4 dividiert.)

$$\begin{array}{l} x^4 - 6p^2x^2 + 8p^3x - 3p^4 : x^3 - 3p^2x + 2p^3 = x, \\ \underline{x^4 - 3p^2x^2 + 2p^3x} \\ \text{Rest } -3p^2x^2 + 6p^2x - 3p^4. \end{array}$$

Man sondere im Rest den Faktor $-3p^2$ ab, lasse diesen fort und dividiere nochmals:

$$\begin{array}{l} x^3 - 3p^2x + 2p^3 : x^2 - 2px + p^2 = x + 2p, \\ x^3 - 2px^2 + p^2x, \\ \underline{- \quad + \quad -} \\ 2px^2 - 4p^2x + 2p^3, \\ 2p^2x - 4p^2x + 2p^3, \\ \underline{- \quad + \quad -} \\ \text{Rest } = 0. \end{array}$$

Also ist $x^2 - 2px + p^2 = (x-p)^2$ der größte gemeinsame Faktor von $f(x)$ und $f'(x)$. Er gibt die Doppelwurzel $x = p$, also hat $f(x) = 0$ die dreifache Wurzel $x = p$.

Übungen zu § 18.

1. Gegeben die Funktion $y = \frac{5+4x}{4-5x}$, welche durch das Wertepaar $(+1, -9)$ erfüllt wird. Gesucht die ganze Funktion dritten und die ganze Funktion vierten Grades, welche sie in der Umgebung dieses Wertepaares bis einschließlich Größen dritter bez. vierter Ordnung vertreten können.

2. Der Kreis $x^2 + y^2 - 25 = 0$ geht durch $P(+3, +4)$. Es soll eine Kurve (Hyperbel) mit der Gleichung $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ so bestimmt werden, daß sie mit dem Kreis in dem genannten Punkte eine Berührung (mindestens) dritter Ordnung hat.

3. Ausdrücke für die p^{ten} Ableitungen von $x^n e^x$, $x^n \sin x$, $x^n \cos x$ sind aufzustellen. Wie lauten sie, wenn x^n durch eine beliebige Funktion $f(x)$ ersetzt wird.

4. In der Gleichung $ax^4 + x^3 - 3x^2 + \frac{11}{3}x - \frac{3}{2} = 0$ ist der unbekannte Koeffizient a so zu bestimmen, daß sie eine Doppelwurzel hat. Welches ist der Wert von a, welchen Wert hat die Doppelwurzel und welche Werte haben die anderen Wurzeln.

§ 19. Partielle Differentialquotienten und partielle Ableitungen. Partielle und totale Differentiale.

162. Dieser Paragraph enthält die letzte Erweiterung der Elemente der Differentialrechnung, nämlich die Erweiterung auf Funktionen mehrerer Veränderlicher, welche für einen besonderen Fall (in [126] und [127]) vorweggenommen worden war.

Partielle Ableitungen. Vorgelegt sei eine Funktion

$$z = F(x, y) \tag{1}$$

zweier ursprünglicher Veränderlicher x und y. Man kann sie als eine Funktion von x allein oder von y allein betrachten, indem man y oder x wie eine Konstante, wie einen im Funktionsausdruck vorkommenden Parameter ansieht (vgl. [35]). Insbesondere kann man daher die partiellen Ableitungen, d. h. die „Ableitung nach x“ und die „Ableitung nach y“ bilden, als wenn es sich um gewöhnliche Ableitungen handelte.

Selbstverständlich muß bei ihrer Bezeichnung ganz scharf hervortreten, nach welcher Veränderlichen die abgeleitete Funktion genommen wird; es ist z. B. nicht angängig, mit Hilfe des Lagrangeschen Differentiationsstriches einfach $F'(x, y)$ zu schreiben. Daher fügt man die Veränderliche, nach welcher abgeleitet wird, wie einen Index unten an und schreibt:

$$\alpha)\quad F_x'(x, y) \text{ und } F_y'(x, y) \quad \text{oder kürzer} \quad \beta)\quad F_x' \text{ und } F_y'. \tag{2}$$

Beispiel. Gegeben sei:

$$z = F(x, y) = \frac{2x + 3y + 4}{5x + 6y + 7}.$$

Man differenziere „nach x“. Es wird:

$$z_x' = F_x' = \frac{(5x + 6y + 7)2 - (2x + 3y + 4)5}{(5x + 6y + 7)^2} = \frac{-3y - 6}{(5x + 6y + 7)^2}.$$

Man differenziere „nach y“. Es wird:

$$z_y' = F_y' = \frac{(5x + 6y + 7)3 - (2x + 3y + 4)6}{(5x + 6y + 7)^2} = \frac{3x - 3}{(5x + 6y + 7)^2}.$$

Sind, wie im vorliegenden Falle, nur zwei ursprüngliche Veränderliche vorhanden, so pflegt man der Kürze wegen diese beiden partiellen Ableitungen mit p und q zu bezeichnen (natürlich nur dann, wenn diese beiden so oft benutzten Buchstaben noch frei sind). Also im vorliegenden Beispiel:

$$p = z_x' = F_x' = \frac{-3y - 6}{(5x + 6y + 7)^2},$$

$$q = z_y' = F_y' = \frac{3x - 3}{(5x + 6y + 7)^2}.$$

Wie in diesem Beispiel, so sind auch allgemein p und q Funktionen von x und y, was für die Folge, wenn nötig, so zum Ausdruck gebracht werden soll, daß man schreibt:

$$p = p(x, y); \quad q = q(x, y). \tag{3}$$

163. Die partiellen Differentiale. Man ändere x um dx, lasse aber y konstant oder setze $dy = 0$. Dann ist nach Formel [117 2] das zugehörige Differential von z, das vorläufig als $(dz)_x$ bezeichnet werden mag:

$$(dz)_x = p\,dx = z_x'\,dx = F_x'\,dx. \tag{1}$$

Ganz entsprechend bilde man:

$$(dz)_y = q\,dy = z_y'\,dy = F_y'\,dy. \tag{2}$$

Im vorigen Beispiele hiernach:

$$(dz)_x = \frac{-3y-6}{(5x+6y+7)^2}\,dx; \quad (dz)_y = \frac{3x-3}{(5x+6y+7)^2}\,dy.$$

Die partiellen Differentialquotienten. Nach Division durch dx bez. durch dy ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{(dz)_x}{dx} &= p = z_x' = F_x', \\ \frac{(dz)_y}{dy} &= q = z_y' = F_y'. \end{aligned} \tag{3}$$

Man nennt die beiden Brüche $\frac{(dz)_x}{dx}$ und $\frac{(dz)_y}{dy}$ partielle Differentialquotienten. Sie sind den zugehörigen partiellen Ableitungen gleich (bis auf unendlich kleine Größen). Ausführlich ausgedrückt ist nach [116 4]:

$$\alpha)\ \frac{(dz)_x}{dx} = \frac{F(x+dx, y) - F(x, y)}{dx}, \quad \beta)\ \frac{(dz)_y}{dy} = \frac{F(x, y+dy) - F(x, y)}{dy}. \tag{4}$$

Die Schreibweise von Jacobi. Mit Fortlassung der Indizes x und y und gleichzeitiger Vertauschung des Buchstabens d mit dem Buchstaben ∂ werden die partiellen Differentialquotienten bezeichnet als:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{5}$$

Doch wird vorausgesetzt, daß diese beiden Ausdrücke bereits in die ihnen nach (3) gleichen partiellen Ableitungen p und q durch ‚Differenzieren“ umgeformt seien. Darüber hinaus werden „freie“ Differentiale nach wie vor mit dem alten d, nicht mit dem neuen ∂ geschrieben, wobei natürlich auch, wenn nötig, die Indizes wieder erscheinen. Es wird dann also:

$$\alpha)\ (dz)_x = p\,dx = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx; \qquad \beta)\ (dz)_y = q\,dy = \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{6}$$

[Es würde gar keinen Sinn haben, in der ersten Gleichung dx gegen ∂x und in der zweiten dy gegen ∂y zu „heben".]

Übrigens sind die Gleichungen (1) nach [116] nur bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung genau. Will man diese mitnehmen, so wende man [134 3] an und schreibe nach [162 3]:

$$(dz)_x = F(x+dx, y) - F(x, y) = p(x+\lambda dx, y)\cdot dx \quad (0<\lambda<1), \quad (7)$$

$$(dz)_y = F(x, y+dy) - F(x, y) = q(x, y+\mu dy)\cdot dy \quad (0<\mu<1). \quad (8)$$

164. Das totale Differential. Die beiden unendlich kleinen Differenzen $(dz)_x$ und $(dz)_y$ sind, wie gesagt, partielle Differentiale und entstehen, wenn man nur x um dx oder nur y um dy ändert. Dagegen ist die unendlich kleine Differenz:

$$dz = dF(x, y) = F(x+dx, y+dy) - F(x, y), \quad (1)$$

bei deren Bildung zugleich x um dx und y um dy geändert wird, mit der ausdrücklichen Verwahrung, daß dx und dy zwar beide unendlich klein, sonst aber beliebig und voneinander unabhängig sein sollen, das totale Differential von z oder von $F(x, y)$. Es ist ohne Index geschrieben worden.

Verschwindet dy, so geht dz wieder in $(dz)_x$ über. Verschwindet dx, so geht dz wieder in $(dz)_y$ über. Ganz allgemein aber gilt der überaus wichtige

Lehrsatz vom totalen Differential: Das totale Differential ist bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung gleich der algebraischen Summe der partiellen Differentiale.

Beweis. Es ist:

$$dz = F(x+dx, y+dy) - F(x, y)$$
$$= [F(x+dx, y+dy) - F(x, y+dy)] + [F(x, y+dy) - F(x, y)].$$

Der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer entsteht aus [163 7], wenn y durch $y+dy$ ersetzt wird. Er ist also (unter Voraussetzung, daß $p(x, y)$ eine stetige Funktion von x und von y sei) von $(dz)_x$ nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung unterschieden. Der Ausdruck in der zweiten eckigen Klammer aber ist $= (dz)_y$ selbst [163 8]. Also wirklich bis auf Größen höherer Ordnung:

$$\boldsymbol{dz = (dz)_x + (dz)_y} \quad (2)$$

oder auch nach [163]:

$$\boldsymbol{dz = dF(x, y) = F'_x dx + F'_y dy}$$
$$\boldsymbol{= p\,dx + q\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.} \quad (3)$$

In dem Beispiel zu [162] ist daher:

$$d\left(\frac{2x+3y+4}{5x+6y+7}\right) = \frac{-3y-6}{(5x+6y+7)^2}dx + \frac{3x-3}{(5x+6y+7)^2}dy$$

also z. B. im besondern in der Umgebung von $x = +5$, $y = -5$

$$d\left(\frac{2x+3y+4}{5x+6y+7}\right) = \frac{9}{4}\,dx + 3\,dy.$$

165. Der Satz vom totalen Differential ist von einer solchen Bedeutung für die höhere Mathematik, daß es angemessen erscheint, ihn von den verschiedensten Seiten zu betrachten.

A) Zunächst sei sofort seine Vorwegnahme in § 15 Tafel I für besonders einfache Fälle festgestellt. Es sei z. B. $F(x, y) = x + y$, so wird:

$$p = F_x' = 1; \quad q = F_y' = 1,$$

also:

$$d(x + y) = 1\,dx + 1\,dy = dx + dy,$$

d. h. I 6, wenn u und v statt x und y geschrieben wird. Oder es sei:

$$F(x, y) = x \cdot y,$$

so wird:

$$p = F_x' = y; \quad q = F_y' = x,$$

also:

$$d(x, y) = y\,dx + x\,dx,$$

d. h. I 8, wenn u und v statt x und y geschrieben wird.

B) Der Satz gilt nur von Differentialen und auch für diese nur bis auf Größen höherer Ordnung. Dagegen wird er im allgemeinen für endliche Differenzen falsch. Es ist zwar:

$$dz = (dz)_x + (dz)_y,$$

aber im allgemeinen:

$$\Delta z \neq (\Delta z)_x + (\Delta z)_y.$$

Beispiel. Man betrachte wieder die Funktion:

$$z = \frac{2x+3y+4}{5x+6y+7}$$

und setze zuerst $x = +5$, $y = -5$, so wird:

$$z = \frac{10 - 15 + 4}{25 - 30 + 7} = -\frac{1}{2}.$$

Alsdann ändere man nur x um $+3$; setze also $x = +8$, $y = -5$, und bezeichne den neuen Wert von z mit z_1, so wird:

$$z_1 = \frac{16 - 15 + 4}{40 - 30 + 7} = +\frac{5}{17}.$$

Ferner ändere man nur y um $+2$, setze also $x = +5$, $y = -3$, so wird:

$$z_2 = \frac{10 - 9 + 4}{25 - 18 + 7} = +\frac{5}{14}.$$

Nun aber ändere man zugleich x um $+3$ und y um $+2$, setze also $x = +8$, $y = -3$, so wird:

$$z_3 = \frac{16 - 9 + 4}{40 - 18 + 7} = +\frac{11}{29}.$$

Mit diesen vier Werten ergibt sich:

$$(\Delta z)_x = z_1 - z = \frac{5}{17} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{10 + 17}{34} = +\frac{27}{34},$$

$$(\Delta z)_y = z_2 - z = \frac{5}{14} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5 + 7}{14} = +\frac{6}{7},$$

$$(\Delta z)_x + (\Delta z)_y = \frac{27}{34} + \frac{6}{7} = \frac{189 + 204}{238} = +\frac{393}{238}.$$

Dagegen ist:

$$\Delta z = z_3 - z = \frac{11}{29} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{22 + 29}{58} = +\frac{51}{58},$$

also wirklich:

$$\Delta z \neq (\Delta z)_x + (\Delta z)_y.$$

C) Nur ausnahmsweise ist also auch:

$$\Delta z = (\Delta z)_x + (\Delta z)_y.$$

Dies gilt z. B. für alle Werte von Δx und Δy, wenn z eine ganze Funktion ersten Grades von x und y ist:

$$z = ax + by + c, \tag{1}$$

$$\text{also:} \quad \begin{cases} z_1 = a(x + \Delta x) + by + c \\ z_2 = ax + b(y + \Delta y) + c \\ z_3 = a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y) + c. \end{cases}$$

Mit diesen vier Werten ergibt sich:

$$(\Delta z)_x = a\Delta x, \quad (\Delta z)_y = b\Delta y,$$

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$$

und in der Tat:

$$\Delta z = (\Delta z)_x + (\Delta z)_y.$$

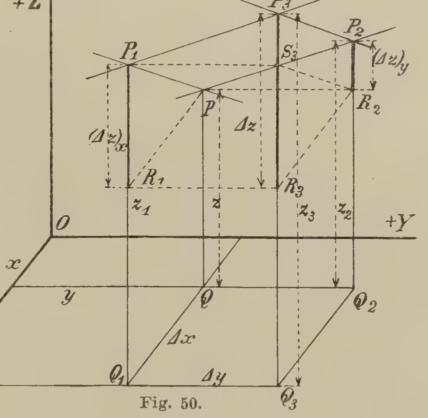


Fig. 50.

Geometrischer Beweis (Figur 50). Bekanntlich stellt (1) eine Ebene vor, etwa die Ebene P, P_1, P_2, P_3 (unbegrenzt erweitert gedacht). Die vier Ordinaten sind:

$$z = QP, \quad z_1 = Q_1P_1, \quad z_2 = Q_2P_2, \quad z_3 = Q_3P_3.$$

Ferner ist:

$$(\Delta z)_x = R_1P_1, \quad (\Delta z)_y = R_2P_2, \quad \Delta z = R_3P_3.$$

Man ziehe durch P_1 die Parallele zur Y-Achse und bestimme so

Punkt S_3. Dann ist $R_1R_3 =$ und $\| PR_2$, $P_1S_3 =$ und $\| R_1R_3$, also auch $P_1S_3 =$ und $\| PR_2$, d. h. $PP_1S_3R_2$ ist ein Parallelogramm (sogar ein Rechteck), also $PP_1 =$ und $\| R_2S_3$. Da auch $PP_1 =$ und $\| P_2P_3$ ist, so folgt: $R_2S_3P_3P_2$ ist ein Parallelogramm, mithin $S_3P_3 = R_2P_2$, folglich:

$$\Delta z = R_3P_3 = R_3S_3 + S_3P_3 = R_1P_1 + R_2P_2,$$

d. h.:

$$\Delta z = (\Delta z)_x + (\Delta z)_y.$$

D) Gegeben sei die Funktion $z = F(x, y)$ und ihre beiden Ableitungen: $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$.

Man setze für x und y zwei beliebige Werte x_0 und y_0 und bezeichne die zugehörigen Werte von z, p und q, mit z_0, p_0, q_0. Alsdann nehme man ein unendlich benachbartes, sonst aber beliebiges Wertepaar x und y an, bezeichne den zugehörigen Funktionswert also auch ohne Index mit z, so daß in [164 3]:

$$dx = x - x_0; \quad dy = y - y_0, \quad dz = z - z_0$$

eingesetzt werden muß. Man erhält:

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0),$$

oder:

$$z = p_0x + q_0y + (z_0 - p_0x_0 - q_0y_0), \tag{2}$$

d. h. von der Form:

$$z = ax + by + c. \tag{2a}$$

In der nächsten Umgebung einer beliebigen Stelle (x_0y_0) kann daher die Funktion durch eine ganze Funktion ersten Grades vertreten werden (wenn man von Größen höherer Ordnung absieht und Stetigkeit, sowie Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird). Stimmt vorzüglich zu [132]; auch vergleiche man diesen Satz mit der Bemerkung über ganze Funktionen ersten Grades in Nr. C).

E) Tangentialebene und Normale. Man deute die Funktion $z = F(x, y)$ in der üblichen Weise als eine Fläche. Dann sagt der Satz vom totalen Differential in der Form (2) aus, daß ein unendlich kleines Stück der Fläche in der nächsten Umgebung eines beliebigen Punktes P als eben angesehen werden darf. Gleichung (2a) oder in veränderter Bezeichnung die Gleichung:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \tag{2b}$$

ist die Gleichung dieser Ebene, welche also identisch ist mit der Tangentialebene im Punkte $P(x, y, z)$ vgl. [142 6].

Für die Richtungswinkel α, β, γ der Normalen, d. h. der Senkrechten auf der Tangentialebene im Punkte P, erhält man aus (2) nach den Grundformeln der analytischen Geometrie des Raumes:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = p : q : -1 \tag{3}$$

und hieraus die Richtungskosinus selbst:

$$\cos\alpha = \frac{p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{4}$$

da $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ist. (Die beiden Vorzeichen der Wurzel entsprechen den beiden entgegengesetzten Richtungen der Normale.) Offenbar sind die Formeln (3) und (4) Erweiterungen der Formeln:

$$\operatorname{tg}\tau = y', \quad \sin\tau = \frac{y'}{\pm\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos\tau = \frac{1}{\pm\sqrt{1+y'^2}},$$

welche nach [142] Tangente und Normale für einen Punkt einer ebenen Kurve bestimmen.

Beispiel: Es soll die Tangentialebene an einem beliebigen Punkt des Ellipsoides (vgl. [143] zweites Beispiel):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad \text{oder} \quad z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \tag{5}$$

bestimmt werden. Man berechne:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = c \cdot \frac{-\frac{2x}{a^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = c \cdot \frac{-\frac{2y}{b^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}.$$

Die Gleichung der Tangentialebene wird daher nach (2):

$$Z = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}X - \frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}Y + \left(z + \frac{c^2x^2}{a^2z} + \frac{c^2y^2}{b^2z}\right),$$

oder mit Hilfe von (5) nach Multiplikation mit z und Division durch c^2:

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} - 1 = 0. \tag{6}$$

F) Das implizite Differenzieren. Gegeben sei eine Gleichung:

$$F(x, y) = 0. \tag{7}$$

Man soll, ohne y aus (7) explizite nach x aufzulösen, dennoch y' ermitteln [126].

Lösung. Man betrachte zunächst die allgemeine Gleichung:

$$z = F(x, y)$$

und differenziere total. Es folgt:

$$dz = F_x' dx + F_y' dy = p dx + q dy.$$

Es soll $z = 0$ sein für alle zusammengehörenden Werte von x und y. Als ist auch $dz = 0$ zu setzen. Daher:

$$p dx + q dy = 0, \tag{8}$$

d. h. einfacher ausgedrückt, man differenziere (7) total. Aus (8) folgt:

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{p}{q} = -\frac{F_x'}{F_y'}. \tag{9}$$

Diese Formel war in [126] vorweg genommen. Die implizite Form (1) hat vor der expliziten Form den Vorzug, daß sie in das Belieben stellt, ob man y als Funktion von x oder x als Funktion von y ansehen will. Tut man letzteres, so tritt an Stelle von (9) die Formel:

$$\frac{dx}{dy} = x' = -\frac{q}{p} = -\frac{F_y'}{F_x'}. \tag{9a}$$

166. Dem Satz vom totalen Differential kann man als eine Art Gleichnis die sehr bekannte und in den Naturwissenschaften sehr gewürdigte Erscheinung gegenüberstellen, daß aus verschiedenen Ursachen stammende Wirkungen sich algebraisch oder geometrisch addieren, so lange sie klein genug bleiben. Als Beispiel sei die Ebbe und Flut des Weltmeeres erwähnt. Sie wird verursacht durch die Anziehung von Mond und Sonne; in welcher Weise, das kommt hier nicht in Betracht. Folglich gibt es eine theoretische Mondflut und eine theoretische Sonnenflut, die aber beide eben nur theoretisch sind. Die wirkliche, die wahre Flut aber, wie sie im Steigen und Fallen des Wasserspiegels an der Küste meßbar in die Erscheinung tritt, wird von Mond und Sonne zugleich verursacht und ist, wie die gründlichste Analyse der Messungsergebnisse auf Grund der Laplaceschen Flutformeln gezeigt hat, gleich der algebraischen Summe der beiden theoretischen Fluten. Letztere sind gleichsam partielle Differentiale, deren Summe als totales Differential die wirkliche Flut ergibt.

Ein anderes Beispiel. In der Elastizitätslehre, in der Optik, in der Akustik ist die sog. Superposition kleiner Schwingungen ein viel benutztes Prinzip. Die Schwingungen addieren sich algebraisch, so daß jede in der Gesamtschwingung als Summand erhalten bleibt und nicht verloren geht. In derselben Weise bleiben die partiellen Differentiale im totalen Differentiale als Summanden bestehen, ohne sich im geringsten zu beeinflussen oder zu stören. Auf diese Weise kommt jedes von ihnen so zu sagen vollständig zu seinem Recht.

167. Höhere partielle Ableitungen. Die beiden Ableitungen $p = F'_x$, $q = F'_y$ einer Funktion zweier Veränderlichen $z = F(x, y)$ sind im allgemeinen, gleich der ursprünglichen Funktion, auch Funktionen von x und von y, wie schon [162] in der Schreibweise:

$$p = p(x, y), \quad q = q(x, y) \tag{1}$$

zum Ausdrucke kommen sollte. Es steht daher nichts im Wege, sie wieder abzuleiten und so partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$F''_{x,x}, \quad F''_{x,y}, \quad F''_{y,x}, \quad F''_{y,y} \tag{2}$$

zu bilden, dann von diesen durch abermaliges Differenzieren zu den Ableitungen dritter Ordnung überzugehen usw. Man schreibt sie aber auch mit Hilfe des von Jacobi für partielle Differentiation eingeführten Buchstabens ∂ wie höhere Differentialquotienten, nämlich:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2}. \tag{3}$$

Beispiel. Es sei wieder:

$$z = F(x, y) = \frac{2x + 3y + 4}{5x + 6y + 7}$$

und:

$$F'_x = p = \frac{-3y - 6}{(5x + 6y + 7)^2}, \quad F'_y = q = \frac{3x - 3}{(5x + 6y + 7)^2}.$$

Man leite erst p nach x und y, dann q nach x und y ab, so folgt:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = F''_{x,x} = \frac{\partial p}{\partial x} = (-3y - 6) \cdot (-2) \cdot (5x + 6y + 7)^{-3} \cdot 5$$
$$= \frac{30y + 60}{(5x + 6y + 7)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F''_{x,y} = \frac{\partial p}{\partial y} = (-3y - 6) \cdot (-2)(5x + 6y + 7)^{-3} \cdot 6$$
$$+ (-3) \cdot (5x + 6y + 7)^{-2}$$
$$= (5x + 6y + 7)^{-3}[36y + 72 - 3(5x + 6y + 7)]$$
$$= \frac{-15x + 18y + 51}{(5x + 6y + 7)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = F''_{y,x} = \frac{\partial q}{\partial x} = (3x - 3) \cdot (-2)(5x + 6y + 7)^{-3} \cdot 5$$
$$+ 3(5x + 6y + 7)^{-2}$$
$$= (5x + 6y + 7)^{-3}[-30x + 30 + 3(5x + 6y + 7)]$$
$$= \frac{-15x + 18y + 51}{(5x + 6y + 7)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = F''_{y,y} = \frac{\partial q}{\partial y} = (3x - 3) \cdot (-2)(5x + 6y + 7)^{-3} \cdot 6$$
$$= \frac{-36x + 36}{(5x + 6y + 7)^3}.$$

Will man die dritten, die vierten, die fünften usw. partiellen Ableitungen haben, so differenziere man auf diese Weise weiter und weiter, und zwar nach x oder nach y, wie es gerade verlangt wird. Allerdings würden im vorliegenden Falle die Rechnungen immer größer werden, aber doch völlig elementar bleiben gemäß den Formeln in Tafel I und II § 15.

Vertauschbarkeit beim Differenzieren. In dem vorigen Beispiel fällt auf den ersten Blick die Gleichung:

$$F''_{x,y} = F''_{y,x}, \quad \text{oder:} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

oder: (4)

$$\frac{\partial \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\partial x} \quad \text{oder:} \quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}$$

in die Augen. Also versuche man sie ganz allgemein zu beweisen. Es ist:

$$\frac{F(x+dx, y) - F(x, y)}{dx} = p = p(x, y).$$

Man bilde die Ableitungen beider Seiten nach y. Es folgt:

$$\frac{F_y'(x+dx, y) - F_y'(x, y)}{dx} = \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y},$$

oder auch, da F_y' mit q bezeichnet werden sollte:

$$\frac{q(x+dx, y) - q(x, y)}{dx} = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Die linke Seite ist der partielle Differentialquotient von q nach x, also:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Erste Anmerkung. In dem Beweis sind unendlich kleine Glieder außer acht gelassen worden, von denen nachzuweisen wäre, daß sie auch in (4) nur unendlich kleine Glieder zur Folge haben würden. Man kann wie in [139] verfahren, um diesen Einwand zu heben.

Zweite Anmerkung. Man achte darauf, daß nach (4) die Größen p und q, als Funktionen von x und y betrachtet, nicht ganz voneinander unabhängig sind. Siehe z. B. [303], Fall. V.

Dritte Anmerkung. Es macht nach (4) nichts aus, ob man erst nach x und dann nach y oder erst nach y und dann nach x differenziert. Die Reihenfolge des Differenzierens darf vertauscht werden. Für eine Funktion zweier Veränderlichen gibt es also nicht vier, sondern nur drei verschiedene Ableitungen der zweiten Ordnung. Man bezeichnet sie oft in aller Kürze mit **r, s, t,** also daß sein soll:

$$r = F''_{x,x} = p_x' = \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2}, \tag{5}$$

$$s = F''_{x,y} = F''_{y,x} = p_y' = q_x' = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \tag{6}$$

$$t = F''_{y,y} = q_y' = \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2}. \tag{7}$$

Selbstverständlich kommt der Satz von der Vertauschbarkeit der Reihenfolge des Differenzierens auch bei der Bildung der höheren Ableitungen immer wieder in Betracht. So gibt es vier verschiedene Ableitungen dritter Ordnung, nämlich:

$$1.\ F'''_{x,x,x}, \qquad 2.\ F'''_{x,x,y} = F'''_{x,y,x} = F'''_{y,x,x},$$
$$3.\ F'''_{x,y,y} = F'''_{y,x,y} = F'''_{y,y,x}, \qquad 4.\ F'''_{y,y,y}$$

und allgemein $n+1$ verschiedene Ableitungen n^{ter} Ordnung.

168. Höhere totale Differentiale. Man differenziere das erste totale Differentiale:

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{1}$$

noch einmal total. Man erhält:

$$d(dz) = d(p\,dx) + d(q\,dy) = p\,d(dx) + dx\,dp + q\,d(dy) + dq\,dy.$$

Es ist:

$$d(dx) = d^2x, \quad d(dy) = d^2y, \quad d(dz) = d^2z$$

und nach Anwendung von (1) auch auf die Funktionen p und q:

$$dp = d(p(x,y)) = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy = r\,dx + s\,dy, \tag{2}$$

$$dq = dq(x,y) = \frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial y}dy = s\,dx + t\,dy, \tag{3}$$

daher:

$$d^2z = p\,d^2x + dx(r\,dx + s\,dy) + q\,d^2y + dy(s\,dx + t\,dy), \tag{4}$$

oder auch anders geordnet:

$$\boldsymbol{d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + (r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2).} \tag{5}$$

In dieser Gleichung werden d^2x und d^2y als mindestens von zweiter Ordnung unendlich klein vorausgesetzt (vgl. [141]). Alsdann wird d^2z auch von der zweiten Ordnung, da rechts alle Glieder diese Ordnung haben.

In gleicher Weise könnte man durch abermaliges Differenzieren d^3z, d^4z usw. erhalten; die Ausdrücke würden aber immer länger und unübersichtlicher werden. Nur in einem Falle bleiben sie einfach genug, dann nämlich, wenn man voraussetzt, daß sämtliche höhere Differentiale von x und von y verschwinden. Aus (5) wird alsdann:

$$d^2z = r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2$$
$$= \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2}(dy)^2. \tag{5a}$$

Man differenziere nochmals total und betrachte dx sowie dy als konstant. Es folgt:

$$d^3z = d\left(\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2}\right)(dx)^2 + 2d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)dx\,dy + d\left(\frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2}\right)(dy)^2.$$

Der Satz vom totalen Differentiale angewendet auf $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ usw. ergibt:

$$d\left(\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2}\right) = \frac{\partial \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2}}{\partial x}dx + \frac{\partial \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2}}{\partial y}dy = \frac{\partial^3 z}{(\partial x)^3}dx + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dy$$

usw. Daher:

$$\begin{aligned} d^3z &= \left(\frac{\partial^3 z}{(\partial x)^3}dx + \frac{\partial^3 z}{(\partial x)^2\partial y}dy\right)(dx)^2 + 2\left(\frac{\partial^3 z}{(\partial x)^2\partial y}dx + \frac{\partial^3 z}{\partial x(\partial y)^2}dy\right)dx\,dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial^3 z}{(\partial y)^2\partial x}dx + \frac{\partial^3 z}{(\partial y)^3}dy\right)(dy)^2 \qquad (6) \\ &= \frac{\partial^3 z}{(\partial x)^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{(\partial x)^2\partial y}(dx)^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x(\partial y)^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{(\partial y)^3}(dy)^3. \end{aligned}$$

Der Bau der Formeln (5a) und (6) drängt die Induktion gewaltsam auf. Die Koeffizienten sind Binomialkoeffizienten. Man erhält allgemein (Schluß von n auf $n+1$) unter symbolischer Bezeichnung:

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{dy}dy\right)^n \qquad (7)$$

mit der Maßgabe, daß nach der Entwicklung der rechten Seite mittelst des binomischen Lehrsatzes statt:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^\beta$$

zu setzen sei:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{(\partial x)^\alpha(\partial y)^\beta} = \frac{\partial^n z}{(\partial x)^\alpha(\partial y)^\beta}. \qquad (8)$$

169. Um das implizite Differenzieren nach F) in [165] auf zweite Differentiale auszudehnen, setze man außer $dz = 0$ auch noch $d^2z = 0$, also nach [168 5]:

$$0 = pd^2x + qd^2y + (r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2).$$

Da x ursprüngliche Veränderliche werden soll, wird in der üblichen Weise $d^2x = 0$ angenommen [138]. Man erhält nach Division durch $(dx)^2$:

$$\frac{d^2y}{(dx)^2} = y'' = -\frac{r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{q} = -\frac{r + 2sy' + t(y')^2}{q} \qquad (1)$$

und nach Einsetzen von y' aus [165 9]:

$$y'' = -\frac{rq^2 - 2spq + tp^2}{q^3}. \qquad (2)$$

Diese Formeln sind in [127] vorweggenommen. Die Ermittelung von y''', y'''' usw. durch implizites Differenzieren würde in gleicher Weise vor sich gehen können, nur werden die Endformeln erheblich länger und in ihrem Bau verwickelter. Eines aber ersieht man bald. Alle diese Ausdrücke, schon mit dem für y' anfangend, haben Potenzen von q im Nenner. Sollte daher q gelegentlich verschwinden, so betrachte man lieber x als Funktion von y. Dies würde zu der Formel:

$$x'' = -\frac{tp^2 - 2sqp + rq^2}{p^3}$$

führen, welche übrigens denselben Zähler hat, wie (2).

170. Differentielle Transformationen. Oft genug hat man hinreichende Veranlassung, von einem System von Veränderlichen zu einem anderen System von Veränderlichen überzugehen. Selbstverständlich werden in solchen Fällen mit den Veränderlichen auch die Differentiale transformiert. Genügen erste Differentiale, so hat man die Transformationsformeln nur einmal zu differenzieren nach dem Satz vom totalen Differential; sind aber zweite, dritte ... Differentiale zu betrachten, so differenziere man eben zweimal, dreimal ....

Beispiel. Man gehe von rechtwinkligen auf Polarkoordinaten über. Die Transformationsformeln sind:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{1}$$

Man differenziere einmal total. Es ergibt sich:

$$\alpha)\ dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi, \qquad \beta)\ dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi. \tag{2}$$

Man differenziere noch einmal total. Es folgt:

$$\begin{aligned} \alpha)\quad d^2x &= \cos\varphi\,d^2r - r\sin\varphi\,d^2\varphi - 2\,dr\,d\varphi\sin\varphi - r\cos\varphi(d\varphi)^2, \\ \beta)\quad d^2y &= \sin\varphi\,d^2r + r\cos\varphi\,d^2\varphi + 2\,dr\,d\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi(d\varphi)^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Um die umgekehrten Transformationen der Differentiale zu erhalten, könnte man zunächst (1) umkehren in:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

und nun diese Umkehrungen differenzieren. Man kann aber auch unmittelbar (2) und (3) selbst umkehren, indem man aus (2) dr und $d\varphi$, und aus (3) d^2r und $d^2\varphi$ berechnet. Es wird:

$$\begin{aligned} dr &= \cos\varphi\,dx + \sin\varphi\,dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{r} = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ d\varphi &= \frac{\cos\varphi\,dy - \sin\varphi\,dx}{r} = \frac{x\,dy - y\,dx}{r^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Entsprechend ergeben sich d^2r und $d^2\varphi$.

Hat man hiernach irgendeine Differentialformel in rechtwinkligen Koordinaten abgeleitet, so kann die entsprechende Differentialformel in Polarkoordinaten sofort durch Einsetzen von (2) und (3) bestimmt werden.

So ist z. B. in rechtwinkligen Koordinaten:

I. Das Bogenelement: $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$,

II. Die Richtungskonstante der Tangente: $\operatorname{tg} \tau = y' = \frac{dy}{dx}$,

III. Das Sektorelement

$$dS = \Delta OPP_1 = \frac{x(y+dy) - y(x+dx)}{2} = \frac{xdy - ydx}{2}.$$

Daher in Polarkoordinaten:

$$ds = \sqrt{(\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi)^2 + (\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi^2},$$

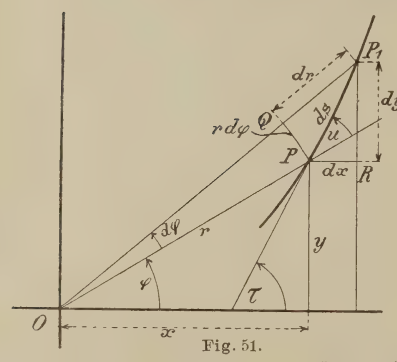


Fig. 51.

oder, nach erheblicher Vereinfachung:

I a. $$\boldsymbol{ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2}}.$$

Statt τ empfiehlt es sich, bei Polarkoordinaten den Winkel u zwischen Tangente und Radiusvektor zu nehmen. Es ist:

$$u = \tau - \varphi, \quad \operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\tau \operatorname{tg}\varphi},$$

also:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} = \frac{\cos\varphi\, dy - \sin\varphi\, dx}{\cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy}$$

$$= \frac{\cos\varphi(\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi) - \sin\varphi(\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi)}{\cos\varphi(\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi) + \sin\varphi(\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi)},$$

oder, nach erheblicher Vereinfachung:

II a. $$\boldsymbol{\operatorname{tg} u = \frac{r\,d\varphi}{dr}}.$$

Das Sektorelement wird:

$$dS = \frac{xdy - ydx}{2} = \frac{r\cos\varphi(\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi) - r\sin\varphi(\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi)}{2},$$

oder, nach erheblicher Vereinfachung:

III a. $$\boldsymbol{dS = \frac{r^2 d\varphi}{2}}.$$

Selbstverständlich hätte man diese drei Formeln auch ohne Transformation unmittelbar durch Differentialgeometrie [150] erhalten

können und sogar erheblich einfacher. Hierzu denkt man sich um O als Mittelpunkt mit r als Radius den unendlich kleinen Bogen PQ geschlagen, so entsteht das unendlich kleine rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse ds und den beiden Katheten dr und $rd\varphi$. Also nach Pythagoras:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\varphi)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2},$$

womit I a. wieder gefunden worden ist. Ferner ist der Winkel zwischen dr und $ds = u$ (genauer $= u - d\varphi$), daher:

$$\operatorname{tg} u = \frac{QP}{QP_1} = \frac{rd\varphi}{dr},$$

womit II a. wieder gefunden ist. Drittens beachte man, daß der Inhalt des Dreiecks PQP_1 unendlich klein von der zweiten Ordnung ist, daher unter Beschränkung auf Größen erster Ordnung:

$$dS = \text{Kreissektor } OPQ = \frac{\text{Bogen} \times \text{Radius}}{2} = \frac{r\,.\,d\varphi \cdot r}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2},$$

womit III a. wieder gefunden ist. Wo aber zweite Differentiale vorkommen (wie in der Theorie der Krümmung, § 21), da wird die Differentialgeometrie unter Zugrundelegung von Polarkoordinaten recht schwierig, so daß man doch besser mit dem analytischen Transformieren und Differenzieren fährt, obgleich auch dieses manchmal erhebliche Rechenarbeit macht. Als Beispiel, das später Anwendung finden wird, werde der Ausdruck:

$$dxd^2y - dyd^2x$$

in Polarkoordinaten transformiert: Man erhält:

$$\begin{aligned} dxd^2y - dyd^2x &= (\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi)d^2y - (\sin\varphi dr + r\cos\varphi)d^2x \\ &= -dr(\sin\varphi d^2x - \cos\varphi d^2y) - rd\varphi(\cos\varphi d^2x + \sin\varphi d^2y). \end{aligned}$$

Nun ergibt sich ferner aus (3), nach erheblicher Vereinfachung:

$$\begin{aligned} \sin\varphi d^2x - \cos\varphi d^2y &= -rd^2\varphi - 2drd\varphi, \\ \cos\varphi d^2x + \sin\varphi d^2y &= d^2r - r(d\varphi)^2. \end{aligned}$$

Daher:

$$dxd^2y - dyd^2x = rdrd^2\varphi + 2d\varphi(dr)^2 + r^2(d\varphi)^3 - rd\varphi d^2r. \qquad \text{IV.}$$

171. Bisher sind in diesem Paragraphen nur Funktionen von zwei ursprünglichen Veränderlichen betrachtet worden. Sind drei solche, etwa x, y, z und eine Funktion von ihnen:

$$U = F(x, y, z) \tag{1}$$

gegeben, so wird nur die Anzahl der partiellen Ableitungen entsprechend größer, sonst aber bleiben die Sätze und Formeln bestehen. Es gibt drei Ableitungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial U}{dx} = F'_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F'_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = F'_z, \tag{2}$$

ferner sechs Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U}{(\partial x)^2} = F''_{x,x}, \quad \frac{\partial^2 U}{(\partial y)^2} = F''_{y,y}, \quad \frac{\partial^2 U}{(\partial z)^2} = F''_{z,z}, \\
&\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = F''_{x,y} = F''_{y,x}, \\
&\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = F''_{x,z} = F''_{z,x}, \\
&\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = F''_{y,z} = F''_{z,y},
\end{aligned} \tag{3}$$

usw. Das erste totale Differential wird:

$$d\,U = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. \tag{4}$$

Das zweite totale Differential wird:

$$\begin{aligned}
d^2 U = &\frac{\partial U}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial U}{\partial y} d^2 y + \frac{\partial U}{\partial z} d^2 z \\
&+ \Big(\frac{\partial^2 U}{(\partial x)^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 U}{(\partial y)^2} (dy)^2 + \frac{\partial^2 U}{(\partial z)^2} (dz)^2 \\
&+ 2\,\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} dx\,dy + 2\,\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} dy\,dz + 2\,\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} dz\,dx\Big)
\end{aligned} \tag{5}$$

usw. B e i s p i e l. Es sei:

$$U = \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}. \tag{6}$$

[μ, a, b, c sind Konstanten; $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ kann gedeutet werden als Abstand eines festen Punktes Q mit den Koordinaten a, b, c, von dem beliebigen Punkt P mit den Koordinaten x, y, z]. Es folgt durch einmaliges Differenzieren:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{\mu(x-a)}{r^3} = -\frac{\mu(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}^3}, \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\mu(y-b)}{r^3} = -\frac{\mu(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}^3}, \\
\frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{\mu(z-c)}{r^3} = -\frac{\mu(z-c)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}^3}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Ferner ergibt sich durch nochmaliges Differenzieren:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{(\partial x)^2} &= -\frac{\mu}{r^3} + \frac{3\mu(x-a)^2}{r^5}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{3\mu(y-b)(z-c)}{r^5}, \\
\frac{\partial^2 U}{(\partial y)^2} &= -\frac{\mu}{r^3} + \frac{3\mu(y-b)^2}{r^5}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{3\mu(z-c)(x-a)}{r^5}, \\
\frac{\partial^2 U}{(\partial z)^2} &= -\frac{\mu}{r^3} + \frac{3\mu(z-c)^2}{r^5}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{3\mu(x-a)(y-b)}{r^5}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Wenn der vorhin genannte Punkt P von dem festen Punkt Q nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz angezogen wird, so ist der Ausdruck für die Kraft:

$$K = \frac{\mu}{r^2}. \tag{9}$$

Es ist nun sehr beachtenswert, daß die Komponenten X, Y, Z dieser Kraft K nach den Koordinatenachsen mit den ersten partiellen Ableitungen von U identisch sind:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{10}$$

eine Tatsache, welche zu allererst Anlaß gegeben hat, die Funktion U in die Mechanik als sogenanntes Newtonsches Potential einzuführen. Näheres hierüber gehört in Lehrbücher der Mechanik; doch sei nur noch erwähnt, daß die Addition von (8) ergibt:

$$\frac{\partial^2 U}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial z)^2} = -\frac{3\mu}{r^3} + \frac{3\mu[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}{r^5},$$

also, überaus einfach:

$$\frac{\partial^2 U}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial z)^2} = 0. \tag{11}$$

Dies ist die sogenannte Laplace'sche partielle Differentialgleichung, welche in der Theorie des Newtonschen Potentials eine äußerst wichtige Rolle spielt.

Sind noch mehr als drei, sind beliebig viele ursprüngliche Veränderliche gegeben, so bezeichnet man sie oft nicht mehr mit verschiedenen Buchstaben als $x, y, z, \ldots$, sondern mit demselben Buchstaben, dem Indizes angehängt werden, als $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Es sind also dann $x_1, x_2, x_3, \ldots$ nicht mehr, wie es früher war, verschiedene Werte, die man nacheinander derselben Veränderlichen x beigelegt denkt, sondern verschiedene Veränderliche selbst. Im übrigen tritt keine wesentliche Veränderung ein.

172. Partielle Differentiation von Funktionen von Funktionen. Gegeben sei eine Funktion:

$$U = U(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) \tag{1}$$

der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Man ersetze sie durch beliebig viele andere Veränderliche $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$, indem die Reihe der x mittels gegebener Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m), \\ x_2 &= x_2(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m) \end{aligned} \tag{2}$$

ausgedrückt sei durch die Reihe der ξ. Nach Einsetzen von (2) in (1) wird U in erweitertem Sinn [56] zu einer Funktion von Funktionen $\xi_1, \xi_2 \ldots$ Sie soll partiell nach $\xi_1, \xi_2 \ldots$ differenziert werden.

Lösung. Nach dem Satz vom totalen Differentiale ist sowohl:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} dx_3 + \cdots \tag{3}$$

als auch:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial U}{\partial \xi_3} d\xi_3 + \cdots \tag{4}$$

Nach demselben Satz sind ferner die Gleichungen (2) zu differenzieren. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} d\xi_3 + \cdots, \\ dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} d\xi_3 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{5}$$

daher nach Einsetzen von (5) in (3):

$$\begin{aligned} dU = &\frac{\partial U}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots\right) \\ &+ \frac{\partial U}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots\right) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

oder, anders geordnet:

$$\begin{aligned} dU = &\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} + \cdots\right) d\xi_1 \\ &+ \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} + \cdots\right) d\xi_2 \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

Diese Gleichung (6) muß, da die Differentiale $d\xi_1, d\xi_2, \ldots$ zwar unendlich klein, sonst aber beliebig sind, mit (4) identisch sein. Daher:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} + \cdots \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

Offenbar sind diese Gleichungen anzusehen als die allgemeinste Erweiterung der Gleichung in [123]:

$$\frac{d\left(f(\varphi(x))\right)}{dx} = f'(z) \cdot \varphi'(x) \qquad (z = \varphi(x)),$$

denn man braucht nur anzunehmen, daß sowohl die Reihe $x_1, x_2, \ldots,$ als auch die Reihe $\xi_1, \xi_2, \ldots$ nur je eine Veränderliche x und ξ enthält, wodurch das System (7) sich auf eine einzige Gleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

reduziert, welche mit der vorigen, abgesehen von den veränderten Bezeichnungen, identisch ist.

Will man auch Ableitungen zweiter Ordnung transformieren, so differenziere man (7) nochmals partiell nach $\xi_1, \xi_2, \ldots$ und wende auf die partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial \xi_1} = \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial x_1}}{\partial \xi_1}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial x_1}}{\partial \xi_2}; \;\ldots\ldots\ldots$$

abermals (4) an, nachdem U durch $\frac{\partial U}{\partial x_1} \ldots$ ersetzt ist. Entsprechend verfahre man bei der Transformation der Ableitungen dritter, vierter Ordnung usw. Die Endformeln werden selbstverständlich immer länger.

173. Variationen und Variationsrechnung. Zunächst sei zur Vermeidung von Verwechslungen sofort erklärt, daß die Variationen, welche hier genannt sind, auch nicht das mindeste gemeinsam haben mit den Variationen, welche mit den Permutationen und Kombinationen die Hauptbegriffe elementarer Kombinatorik bilden. Denn die Variationen der höheren Mathematik, im besonderen der Variationsrechnung, welche noch eine Stufe höher steht, als die elementare Differentialrechnung, sind unendlich klein, sind wesentlich nichts anderes als Differentiale.

Doch mit einem feinen aber bedeutsamen Unterschied in der Auffassung. Nämlich mit demselben Unterschied, welcher in der Mechanik zur Unterscheidung von virtuell und wirklich Anlaß gegeben hat. Virtuelle Bewegungen eines Körpers sind bekanntlich solche Bewegungen, die er meist unter Voraussetzung eines „Zwanges" nach dem Maße seiner „Freiheit" noch ausführen könnte, während er doch, wenn außer den Zwangskräften noch andere gegebene Kräfte auf ihn wirken, nur eine Bewegung wirklich beschreibt.

Und ungefähr so verhält es sich mit einer Variation und einem Differential. Eine Variation ist so zu sagen ein virtuelles Differential; ein Differential schlechthin ist dagegen ein wirkliches Differential. Vielleicht ist diese Auseinandersetzung noch zu allgemein und zu unbestimmt; man müßte an Beispielen erläutern, wie sie zu verstehen ist. Doch soll es hier nicht geschehen, weil von Variationen nur diese eine Nummer überhaupt handelt.

Das in der Variationsrechnung gebrauchte Zeichen für Variationen ist der Buchstabe δ, das griechische *d*. Man schreibt δx, wenn eine Variation von x gemeint ist und dx, wenn ein Differential von x gemeint ist. So z. B. die Gleichung:

$$z = 3x^2 + 5y^2 + 7xy$$

differenzieren heißt die Gleichung bilden:

$$dz = 6x\,dx + 10y\,dy + 7y\,dx + 7x\,dy.$$

Sie variieren heißt aber die Gleichung bilden:

$$\delta z = 6x\,\delta x + 10y\,\delta y + 7y\,\delta x + 7x\,\delta y.$$

Oft hat man Veranlassung, beide Gleichungen aufzuschreiben, z. B. in der höheren Mechanik. Man wird da oft beide Buchstaben d und δ zugleich finden. Der Variation kommt aber noch eine höhere als die eben auseinandergesetzte Bedeutung zu, in welcher sie das ursprüngliche Differenzieren weit überflügelt. Denn wo differenziert wird, handelt es sich immer nur um eine endliche Anzahl von Größen, welche ihre Werte ändern, etwa x, oder x und y, oder x, y und z usw. Wo aber variiert wird in dem eigentlichsten Sinne der Variationsrechnung, da handelt es sich meist um Funktionen in ihrem ganzen Verlauf, welche sich ändern sollen. Um dies in einem geometrischen Bilde zu zeigen, nehme man irgend zwei Kurven A und B als gegeben an. Der Augenschein lehrt, daß es unbegrenzt viele Möglichkeiten gibt, durch stetige Veränderung, durch fortgesetztes „Variieren" die eine Kurve in die andere zu verwandeln, wobei eben auch die Gleichung der einen auf stetige Weise in die Gleichung der anderen übergeht. Beim Differenzieren bleibt man auf derselben Kurve und geht von einem Punkt zum Nachbarpunkt. Beim Variieren aber geht man von einer Kurve zu einer benachbarten Kurve über. Darin besteht, geometrisch ausgedrückt, der Unterschied zwischen Differenzieren und dem Variieren in dem eigentlichsten Sinne, wie ihn die Variationsrechnung meint.

Daß an sich sehr einfache Aufgaben Veranlassung zum Variieren geben können, zeigt folgende Überlegung, die gar keine mathematisch-technische Kenntnisse erfordert. Offenbar gibt es unzählig viele geschlossene Kurven, welche denselben Umfang haben; doch wird der eingeschlossene Flächeninhalt kleiner oder größer sein können, je nach der Gestalt der Kurve. Er wird aber einen größten Wert, ein Maximum haben, und es leuchtet wohl ein, daß dieses Maximum eintreten wird für den Kreis. Doch den strengen analytischen Beweis, vgl. [179], wird man wohl nur durch Variieren der Kurve, Berechnung der zugehörigen Variation des Inhaltes F, (also eines δF, nicht dF) und Behandlung derselben nach den Methoden der Variationsrechnung führen können. Es gibt aber andere Fälle, wo die Lösung nicht so augenscheinlich ist, z. B. die „Kurve des schnellsten Falles", deren Auffindung seinerzeit erheblich zur Ausbildung der Variationsrechnung beigetragen hat.

Aufgaben zu § 19.

1. Zu den Ausdrücken für das erste und zweite totale Differential:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2$$

einer Funktion von zwei Veränderlichen sollen Ausdrücke für ihr drittes und viertes totales Differential ergänzt werden. Dabei seien der Kürze wegen die vier dritten Ableitungen mit α, β, γ, δ und die fünf vierten mit A, B, C, D, E bezeichnet, also:

$$\alpha = F'''_{xxx}, \qquad \beta = F'''_{xxy}, \ldots$$
$$A = F''''_{xxxx}, \quad B = F''''_{xxxy}, \ldots$$

2. Unter Bezugnahme auf 1. sollen zu den Ausdrücken in [168]:

$$y' = -\frac{p}{q}, \quad y'' = -\frac{r + 2sy' + ty'^2}{q} = \frac{-rq^2 + 2spq - tp^2}{q^3}$$

die Ausdrücke für y''' und y'''' ergänzt werden.

3. Der Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 U}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial z)^2},$$

(vgl. [171]), in dem U irgendeine Funktion der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z bedeuten soll, ist durch Übergang zu räumlichen Polarkoordinaten r, φ, δ umzuformen. Die Transformationsformeln sind (vgl. [61 9]):

$$\text{a)} \quad x = r\cos\varphi\cos\delta, \quad y = r\sin\varphi\cos\delta, \quad z = r\sin\delta,$$

oder umgekehrt:

$$\text{b)} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \delta = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right),$$

$$\varphi = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right).$$

Fünfter Abschnitt.

Hauptanwendungen der Differentialrechnung.

§ 20. Maxima und Minima.

174. Maxima und Minima sind größte und kleinste Werte; aber der Sinn, welchen der Mathematiker in diese Worte hineinlegt, weicht doch manchmal erheblich von dem Sinn des gewöhnlichen Sprachgebrauches ab. Wenn z. B. (Fig. 52) von der unbegrenzten Geraden l nur die Strecke $P_0 P_1$ betrachtet wird, so ist zwar y_0 ein Minimum und y_1 ein Maximum sämtlicher Ordinaten, jedoch nur für den gegebenen Spielraum. Sie würden bei seiner Erweiterung sofort aufhören größte und kleinste Werte zu sein. Solche durch Begrenzung entstehenden größten und kleinsten Werte gelten hier nicht als Maxima oder Minima.

Ein Maximum oder Minimum ist vielmehr ein Wert, welcher größer bzw. kleiner ist (oder noch genauer, welcher nicht kleiner bzw. nicht größer ist) als alle Nachbarwerte nach allen Seiten. In diesem eigentlichen Sinne ist in Fig. 53 y_0 ein Maximum und y_1 ein Minimum. Man beachte bei dieser Definition das Wort „Nachbarwerte“, welches bedeutet, daß das Maximum oder Minimum sich nur auf die Nachbarschaft bezieht oder zu beziehen braucht. Das soll heißen: Es kann zwar ein Maximum ein schlechthin größter und ein Minimum ein schlechthin kleinster Wert sein. Und oft ist es auch so. Es kann aber auch ein Maximum bzw. Minimum nur für seine Umgebung ein größter oder kleinster Wert sein, wie z. B. in Fig. 53 y_0 ein Maximum bleibt, obgleich y_3 noch größer ist und y_1 ein Minimum bleibt, obgleich y_2 noch kleiner ist.

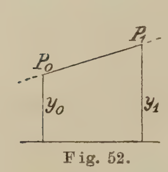


Fig. 52.

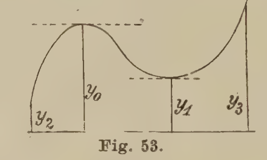


Fig. 53.

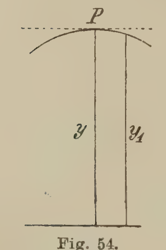


Fig. 54.

Nach dieser Klarstellung des Begriffes eines Maximum oder Minimum sei zunächst die allereinfachste hierher gehörende Aufgabe behandelt.

Aufgabe: Gegeben sei eine Funktion einer Veränderlichen:

$$y = f(x), \tag{1}$$

etwa geometrisch durch die Kurve Fig. 54 veranschaulicht. Es soll der Wert (oder die Werte) von x bestimmt werden, für welche y ein Maximum oder Minimum ist.

Lösung: Es sei $x_1 = x + h$ ein „Nachbarwert" von x. Der zugehörige Funktionswert ist nach dem Taylorschen Satz [157 1a]:

$$y_1 = f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x+\lambda h) = y + \frac{h}{1!} f'(x+\lambda h). \qquad (2)$$

Er unterscheidet sich also von dem ursprünglichen $f(x)$ um $hf'(x+\lambda h)$. Daher kann y kein Maximum oder Minimum sein, wenn $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Denn bei hinreichend kleinen h hat $f'(x+\lambda h)$ dasselbe Vorzeichen wie $f'(x)$, folglich wechselt $hf'(x+\lambda h)$ sein Vorzeichen mit h. Also:

Erste Bedingung eines Maximum oder Minimum ist die Gleichung:

$$\boldsymbol{y' = f'(x) = 0}, \qquad (3)$$

oder geometrisch ausgedrückt: Die Tangente in P muß horizontal sein. Es sei also (3) erfüllt, so gehe man in der Entwicklung nach dem Taylorschen Lehrsatz um einen Schritt weiter und schreibe nach [157 1b]:

$$y_1 = y + \frac{h^2}{2!} f''(x+\lambda h).$$

Angenommen, es verschwinde $f''(x)$ nicht, sondern sei positiv oder negativ. Dann kann $|h|$ hinreichend klein gemacht werden, daß $f''(x+\lambda h)$ dasselbe Vorzeichen habe wie $f''(x)$. Da h^2 immer positiv ist, folgt, daß die Differenz:

$$y_1 - y = \frac{h^2}{2!} f''(x+\lambda h) \qquad (4)$$

dasselbe Vorzeichen hat wie $f''(x)$. Daher:

$$\boldsymbol{y \text{ ein Max., wenn } y' = 0, \quad y'' < 0}, \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{y \text{ ein Min., wenn } y' = 0, \quad y'' > 0}. \qquad (6)$$

Man kann sich auch so ausdrücken. Damit ein Maximum oder Minimum überhaupt vorliege, muß das erste Differential:

$$dy = f'(x)\,dx = y'\,dx \qquad (7)$$

verschwinden. Ist das zweite Differential:

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 = y''(dx)^2 \qquad (8)$$

positiv, so liegt ein Minimum, negativ, so liegt ein Maximum vor.

Damit ist der normale Fall dargelegt. Es sei nur noch hinzugefügt, daß nach (4) in der Umgebung des Maximum oder Minimum die Veränderung von y dem Quadrate der Änderung von x proportional ist. Hieraus folgt nämlich, daß sich die Funktion dort außerordentlich langsam verändert (es verschwindet ja ihr erstes Differential!), worauf zuerst Kepler aufmerksam gemacht haben soll.

Es bleibt noch der Ausnahmefall übrig, daß:

$$y' = f'(x) = 0 \quad \text{und auch} \quad y'' = f''(x) = 0 \qquad (9)$$

sei. Dann gehe man in dem Taylorschen Satz noch ein Glied weiter und schreibe:

$$y_1 = y + \frac{h^3}{3!} f'''(x + \lambda h).$$

Wenn $f'''(x)$ nicht verschwindet, sondern positiv oder negativ ist, so kann $|h|$ hinreichend klein gemacht werden, daß $f'''(x + \lambda h)$ dasselbe Vorzeichen habe wie $f'''(x)$. Die Differenz:

$$y_1 - y = \frac{h^3}{3!} f'''(x + \lambda h)$$

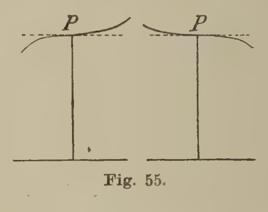


Fig. 55.

wechselt also ihr Vorzeichen mit h. Also kann y weder ein Maximum noch ein Minimum sein. Es ist vielmehr y ein sogenanntes Maximum-Minimum, wenn y''' positiv ist und ein Minimum-Maximum, wenn y''' negativ ist (Fig. 55). Wieder bleibt der Ausnahmefall übrig, daß nämlich:

$$y' = f'(x) = 0, \quad y'' = f''(x) = 0 \quad \text{und} \quad y''' = f'''(x) = 0$$

sei. Dann gehe man in dem Taylorschen Satze noch ein Glied weiter und schreibe:

$$y_1 = y + \frac{h^4}{4!} f''''(x + \lambda h)$$

usw. Also:

Soll y ein Maximum oder Minimum sein, so muß y' verschwinden. Man setze den Wert von x, für welchen diese Bedingung erfüllt wird, ein in y'' und wenn 0 herauskommen sollte in y''' und wenn 0 herauskommen sollte in y'''' usf. ein. Allgemein sei y^p die erste nicht verschwindende Ableitung. Ist p gerade, so liegt ein Maximum vor, wenn y^p negativ ist und ein Minimum vor, wenn y^p positiv ist. Ist aber p ungerade, so liegt weder ein Maximum noch ein Minimum vor, sondern entweder ein Maximum-Minimum, wenn y^p positiv ist oder ein Minimum-Maximum, wenn y^p negativ ist.

Doch der einfachste Fall, daß schon y'' nicht verschwindet, ist, wie gesagt, der Normalfall. Oft, sogar meistens, kann man sich die zuweilen ziemlich mühsame Bestimmung des Vorzeichens von y'' schenken, wenn nämlich anderweitig klar erkenntlich ist, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt. Es sei z. B. $a < b$ und für $x = a$ sei y' positiv, für $x = b$ sei y' negativ (oder für $x = a$ wachse y, für $x = b$ nehme y ab). Außerdem verschwinde y' nur einmal zwischen $x = a$ und $x = b$. So kann y an dieser Stelle nur ein Maximum sein und die Bestimmung des Vorzeichens von y'' wird entbehrlich.

175. Erstes Beispiel (Fig. 56). In eine Ellipse ein Rechteck von möglichst großem Inhalt einzubeschreiben. Es soll sein:

$$J = 4xy = 4\frac{b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2} = \text{Max.}, \tag{1}$$

also nach [174]:

$$J' = 4\,\frac{b}{a}\left(x\,\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2}\right) = 0, \tag{2}$$

oder:

$$0 = -x^2 + (a^2 - x^2), \quad x = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{b}{2}\sqrt{2},$$

$$x : y = a : b,$$

$$J_{\max} = 4 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{b}{2}\sqrt{2} = 2ab.$$

Zuweilen kann man sich die Rechnung etwas vereinfachen. Konstante Faktoren in (1) haben nichts auf sich. Außerdem hätte die Wurzel entfernt werden können, wenn man nicht J, sondern

$$\frac{a^2}{16\,b^2}J^2 = a^2x^2 - x^4$$

= einem Maximum gesetzt hätte. Es würde sich ergeben haben:

$$2a^2x - 4x^3 = 0,$$

also nach Fortlassung des Faktors x, (da $x = 0$ hier offenbar nicht in Betracht kommt), dasselbe wie vorhin. Selbstverständlich wird J

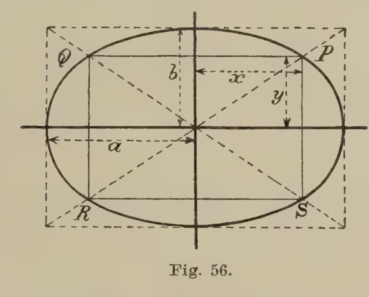


Fig. 56.

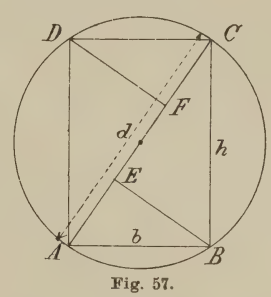


Fig. 57.

zu einem Maximum. Wer aber durchaus will, der differenziere (2) noch einmal und berechne:

$$J'' = 4\,\frac{b}{a}\left(-\frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}^{\,3}} - \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right),$$

x und $\sqrt{a^2-x^2}$ werden positiv vorausgesetzt. Also wird J'' negativ, d. h. J ein Maximum.

Zweites Beispiel (Fig. 57). Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt einen Balken von möglichst großer Tragfähigkeit herauszuarbeiten. Es soll das „Widerstandsmoment“:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(d^2-b^2)}{6} = \frac{bd^2-b^3}{6}$$

möglichst groß sein. Also:

$$6\,W'_{(b)} = d^2 - 3b^2 = 0, \quad b = \frac{d}{\sqrt{3}},$$

$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = d\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$b : h = 1 : \sqrt{2} \sim 5 : 7.$$

Geometrische Lösung: Man teile den Durchmesser AC in drei gleiche Teile, errichte in den Teilpunkten die Lote auf ihm und bestimme so B und D.

Drittes Beispiel. In eine Ellipse ein Rechteck von möglichst großem Umfang einzubeschreiben. Es soll sein:

$$U = 4x + 4y = 4x + 4\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \text{Max.},$$

$$U' = 4 - 4\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0,$$

oder:

$$a^2(a^2 - x^2) = b^2 x^2,$$

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad x : y = a^2 : b^2,$$

$$U_{\max} = \frac{4a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{4b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Das Rechteck mit dem größten Umfang hat also denselben Umfang wie das der Ellipse einbeschriebene Rhombus, dessen Ecken die vier Scheitel sind. Denn jede Seite desselben ist $= \sqrt{a^2 + b^2}$.

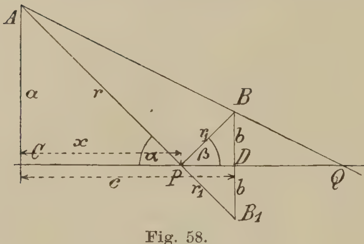


Fig. 58.

Viertes Beispiel. (Fig. 58.) Auf einer Geraden einen Punkt P so zu bestimmen, daß:

$$AP + BP = r + r_1 = \text{Min.}$$

wird. Es soll sein:

$$s = r + r_1 = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2} = \text{Min.},$$

$$s' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0,$$

$$x^2(b^2 + (c - x)^2) = (c - x)^2(a^2 + x^2),$$

$$b^2 x^2 = a^2(c - x)^2, \quad bx = \pm a(c - x),$$

entweder:

$$x = x_1 = \frac{ac}{a + b}, \quad c - x = \frac{bc}{a + b},$$

oder:

$$x = x_2 = \frac{ac}{a - b}, \quad c - x = -\frac{bc}{a - b}.$$

Der zweite Wert kommt hier nicht in Betracht. Er gibt den Schnittpunkt Q von l mit der Verlängerung von AB. Für ihn

ist nicht die Summe $r + r_1$ ein Minimum, sondern die Differenz $r - r_1$ ein Maximum $= AB$. Die Gleichung für x ergibt ferner:

$$\frac{x}{r} - \frac{c-x}{r_1} = 0, \quad \text{d. h.:} \quad \cos\alpha = \cos\beta; \quad \alpha = \beta,$$

also das Gesetz der Spiegelung. Man suche zu B das Bild B_1, als ob die Gerade ein Spiegel wäre und verbinde B_1 mit A. Der Schnittpunkt mit l ist der Punkt B. Die Spiegelung geht also so vor sich, daß das Licht zwischen A und B einen möglichst kleinen Weg s zurücklegt, also auch möglichst wenig Zeit gebraucht. Die Zeit ist ein Minimum. (Siehe 6. Aufgabe.)

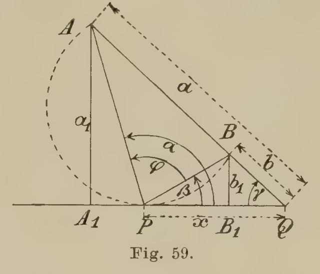


Fig. 59.

Fünftes Beispiel. (Fig. 59.) Auf einer Geraden einen Punkt P so zu bestimmen, daß $\sphericalangle APB = \varphi$ möglichst groß wird.

Lösung. Man halte sich nicht an φ selbst, sondern an eine trigonometrische Funktion, etwa an $\operatorname{tg}\varphi$. Es ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Ferner berechne man:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{AA_1}{A_1P} = \frac{a\sin\gamma}{x - a\cos\gamma}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{BB_1}{PB_1} = \frac{b\sin\gamma}{x - b\cos\gamma},$$

also:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{a\sin\gamma}{x - a\cos\gamma} - \dfrac{b\sin\gamma}{x - b\cos\gamma}}{1 + \dfrac{a\sin\gamma\; b\sin\gamma}{(x - a\cos\gamma)(x - b\cos\gamma)}} = \frac{a\sin\gamma(x - b\cos\gamma) - b\sin\gamma(x - a\cos\gamma)}{(x - a\cos\gamma)(x - b\cos\gamma) + ab\sin^2\gamma},$$

oder nach möglichster Vereinfachung:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(a-b)\sin\gamma \cdot x}{x^2 - (a+b)x\cos\gamma + ab} = \text{Max.},$$

$$(\operatorname{tg}\varphi)' = 0 = (a-b)\sin\gamma\,\frac{(x^2 - (a+b)x\cos\gamma + ab) - x(2x - (a+b)\cos\gamma)}{(x^2 - (a+b)x\cos\gamma + ab)^2},$$

also, sehr einfach:

$$x^2 = ab, \quad x = \pm\sqrt{ab}.$$

Das — Zeichen würde einem Punkt P' auf der anderen Seite von AB entsprechen, der von Q ebensoweit entfernt ist wie P. Übrigens hätte diese Aufgabe auch durch Differentialgeometrie [150] auf überaus einfache Weise wie folgt gelöst werden können. Bekanntlich liegen alle Punkte, von denen aus A und B unter einem gegebenen Sehwinkel φ erscheinen, auf einem Kreisbogen über AB als Sehne. Nimmt man φ größer als das gesuchte Maximum, so schneidet der Kreisbogen l überhaupt nicht (P wird imaginär). Nimmt man φ kleiner, so schneidet der Kreisbogen l in zwei Punkten. Also

wird das Maximum eben dann erhalten, wenn der Kreisbogen l berührt. Dann ist nach dem bekannten Sehnen- und Tangentensatz:

$$x^2 = ab; \quad x = \sqrt{ab}.$$

Sechstes Beispiel. (Fig. 60.) Ein Mann geht am Strande spazieren und hört, als er sich in A befindet, in B ein in das Wasser gefallenes Kind schreien. Wo liegt die Stelle P, an der er sich in das Wasser stürzen muß, um das Kind möglichst schnell zu retten. Es soll die Zeit:

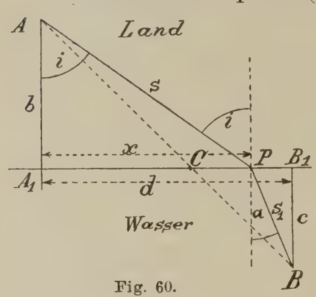


Fig. 60.

$$t = t_1 + t_2 = \text{Min.}$$

sein. Bezeichnet man die Geschwindigkeiten, mit welchen der Mann auf dem Lande laufen und im Wasser schwimmen kann, mit V und v, so ergibt sich:

$$t_1 = \frac{s}{V} = \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{V}, \quad t_2 = \frac{s_1}{v} = \frac{\sqrt{c^2 + (d-x)^2}}{v},$$

also:

$$t = \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{V} + \frac{\sqrt{c^2 + (d-x)^2}}{v} = \text{Min.},$$

$$t' = \frac{x}{V\sqrt{b^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{v\sqrt{c^2 + (d-x)^2}} = 0,$$

$$v^2 x^2 (c^2 + (d-x)^2) - V^2 (d-x)^2 (b^2 + x^2) = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung vierten Grades hat für $V > v$ eine einzige Wurzel zwischen d und $A_1 C = db : (b + c)$ und diese Wurzel, welche etwa nach der Newtonschen Näherungsmethode § 22 bestimmt werden könnte, entspricht der gestellten Aufgabe.

In dieser Fassung handelt es sich selbstverständlich um eine Scherzaufgabe, doch etwas anders gedeutet erhält sie einen sehr tiefen Sinn. Es ist nämlich:

$$\frac{x}{s} = \sin i, \quad \frac{d-x}{s_1} = \sin a.$$

Die Gleichung für x bedeutet daher:

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin a}{v}, \quad \sin i = n \sin a,$$

wo $n = V : v$ gesetzt wird. Bekanntlich stellt diese Beziehung zwischen i und a das Brechungsgesetz des Lichtes von Snellius vor. Man darf daher in Verbindung mit der Erläuterung des vierten Beispiels sagen, daß der Weg des Lichtes nicht durch die Bedingung bestimmt wird, daß seine Länge, sondern dadurch, daß die gebrauchte Zeit ein

Minimum ist. So schließt also die allgemeine Theorie der Maxima und Minima in überraschender Weise die geometrische Optik als eine Anwendung ein.

176. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Gesetzt, es solle:

$$z = F(x, y) \tag{1}$$

ein Maximum oder Minimum werden. Dann muß zu allererst das totale erste Differential, vgl. [174 7]:

$$dz = p\,dx + q\,dy = F_x'\,dx + F_y'\,dy \tag{2}$$

identisch verschwinden, d. h. für jedes Verhältnis von dx und dy. Denn wäre es nicht so, so würde dz sein Vorzeichen wechseln, wenn dx und dy ihre Vorzeichen wechseln, d. h. dz würde positiv und negativ sein können, was weder bei einem Maximum noch bei einem Minimum möglich ist. Soll aber (2) identisch verschwinden, so müssen die Gleichungen:

$$\mathbf{p = 0}, \qquad \mathbf{q = 0} \tag{3}$$

beide erfüllt sein. Sie treten an die Stelle der vorigen einen Gleichung $y' = 0$ und dienen zur Bestimmung von x und y. Um ferner zu entscheiden, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt, bilde man ganz entsprechend zu [174 8] das zweite totale Differential, welches nach [168 5a] wegen (3) jetzt heißt:

$$d^2z = r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2. \tag{4}$$

Kann d^2z nur positiv sein, so ist z ein Minimum. Kann d^2z nur negativ sein, so ist z ein Maximum. Kann aber d^2z positiv und negativ werden, je nach dem Verhältnis von $dx : dy$, so ist z ein Maximum-Minimum, wenn auch in etwas anderem Sinne als [174]. Da die rechte Seite von (4) eine quadratische Form ist, so entscheidet daher zu allererst nach [73] die Diskriminante $rt - s^2$. Man erhält folgende drei Normalfälle:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ rt - s^2 > 0;\quad r > 0, \text{ also auch } t > 0, \text{ so } z \text{ ein Minimum.} \\ 2.\ rt - s^2 > 0;\quad r < 0, \text{ also auch } t < 0, \text{ so } z \text{ ein Maximum.} \\ 3.\ rt - s^2 < 0;\quad \text{so } z \text{ ein sog. Maximum-Minimum.} \end{array}\right\} \tag{5}$$

Fall 1 entspricht dem höchsten Punkt eines Berggipfels; Fall 2 entspricht dem tiefsten Punkt einer Talmulde. Fall 3 aber entspricht dem höchsten Punkt eine Gebirgspasses, dessen Höhe ein Minimum ist im Vergleich zu den Nachbarhöhen des zu überschreitenden

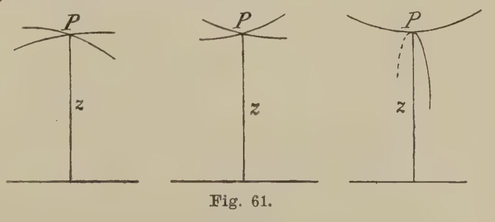


Fig. 61.

Gebirgskammes, dessen Höhe aber ein Maximum ist im Vergleich zu den Nachbarhöhen des Passes.

Außer den drei Normalfällen gibt es auch Ausnahmefälle, wie in [174]. Es kann ja z. B. auch $rt - s^2 = 0$ sein, dann kann sich z „eben noch“ als ein Maximum oder „eben noch“ als ein Minimum ergeben. Es kann aber auch außer dem ersten sogar das zweite totale Differential identisch verschwinden, oder:

$$r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0$$

sein. Dann käme das dritte totale Differential an die Reihe usw.

Sind statt zwei etwa drei oder noch mehr ursprüngliche Veränderliche vorhanden, so hat man statt der beiden Gleichungen $p = 0$, $q = 0$ deren drei oder noch mehr zur Bestimmung der Stelle, an der sich das Maximum oder Minimum befinden muß. Das erste totale Differential der Funktion verschwindet an einer solchen Stelle identisch, und zur Frage, ob ein Maximum oder ein Minimum oder ein Maximum-Minimum vorliegt, wird das zweite totale Differential zuständig. Es ist ein Ausdruck zweiten Grades der ersten Differentiale der ursprünglichen Veränderlichen, welcher auf sein Vorzeichen hin nach den entsprechenden Theorien der Algebra untersucht werden müßte.

Diese Untersuchung allgemein zu führen und überhaupt alle sonst noch möglichen Fälle, die z. B. entstehen, wenn außer dem ersten auch das zweite, sowie das dritte, ... totale Differential identisch verschwinden, ist hier nicht beabsichtigt, zumal oft genug auf andere Weise, (etwa so wie in [174] angedeutet) die Sachlage leicht entschieden werden kann.

177. Erstes Beispiel (Fig. 62). In einem Dreieck einen Punkt P so zu bestimmen, daß die Summe seiner Abstände von den drei Ecken möglichst klein wird.

Lösung. Es soll sein:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \text{Min.} \tag{1}$$

Man lege ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde, bezeichne die drei Ecken mit:

$$A(a_1, b_1); \qquad B(a_2, b_2); \qquad C(a_3, b_3)$$

und den gesuchten Punkt mit: $P(x, y)$. Dann ist:

$$\begin{gathered} r_1 = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2}; \\ r_3 = \sqrt{(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2}. \end{gathered} \tag{2}$$

Nach Einsetzung in (1) wird die linke Seite eine Funktion von x und y, die Gleichungen [176 3] ergeben hier:

$$p = \frac{x - a_1}{r_1} + \frac{x - a_2}{r_2} + \frac{x - a_3}{r_3} = 0,$$
$$q = \frac{y - b_1}{r_1} + \frac{y - b_2}{r_2} + \frac{y - b_3}{r_3} = 0. \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen (3) wäre x und y zu ermitteln, was wegen der Irrationalität von r_1, r_2, r_3 ziemlich langwierig sein würde. Sie lassen dafür eine vorzügliche geometrische Deutung und als Folgerung eine einfache Konstruktion zu, welche hier an Stelle der Rechnung treten mag. Man erhält nach Elimination von r_1:

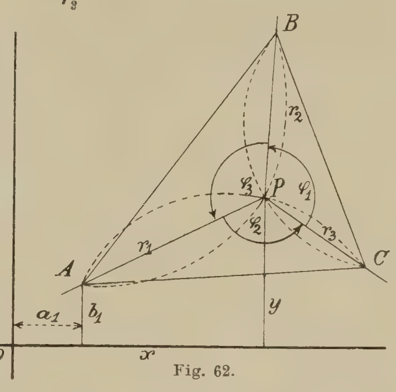


Fig. 62.

$$\frac{(x - a_2)(y - b_1) - (x - a_1)(y - b_2)}{r_2} = \frac{(x - a_1)(y - b_3) - (x - a_3)(y - b_1)}{r_3},$$

oder auch:

$$2\,\Delta ABP \cdot r_3 = 2\,\Delta APC \cdot r_2.$$

Nun ist nach einer sehr bekannten Formel:

$$2\,\Delta ABP = r_1 r_2 \sin \varphi_3; \qquad 2\,\Delta APC = r_1 r_3 \sin \varphi_2,$$

also:

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_3.$$

Da beide Winkel konkav sind, muß hiernach entweder:

$$\varphi_2 = \varphi_3 \quad \text{oder} \quad \varphi_2 + \varphi_3 = 180^0$$

sein. Letzteres ist ausgeschlossen, weil P sonst auf BC liegen müßte. Also bleibt $\varphi_2 = \varphi_3$. Ebenso $\varphi_1 = \varphi_2$ und $\varphi_1 = \varphi_3$. Da die drei Winkel zusammen 360^0 betragen, so folgt:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 120^0.$$

Mithin die Konstruktion: Man schlage über den Seiten des Dreiecks nach innen Kreisbögen, welche die Winkel 120^0 als Peripheriewinkel fassen. Ihr Schnittpunkt ist der verlangte Punkt P.

Es wäre noch nachzuweisen, daß $r_1 + r_2 + r_3$ auch wirklich ein Minimum ist. Man bilde daher nach Einsetzen von (2) in (1) die zweiten partiellen Ableitungen r, s, t. Sie werden:

$$r = \frac{(y - b_1)^2}{r_1^{\,3}} + \frac{(y - b_2)^2}{r_2^{\,3}} + \frac{(y - b_3)^2}{r_3^{\,3}},$$

$$s = -\frac{(x - a_1)(y - b_1)}{r_1^{\,3}} - \frac{(x - a_2)(y - b_2)}{r_2^{\,3}} - \frac{(x - a_3)(y - b_3)}{r_3^{\,3}},$$

$$t = \frac{(x - a_1)^2}{r_1^{\,3}} + \frac{(x - a_2)^2}{r_2^{\,3}} + \frac{(x - a_3)^2}{r_3^{\,3}}$$

und hieraus nach gehöriger Umformung:

$$rt - s^2 = \frac{[(x-a_2)(y-b_3)-(x-a_3)(y-b_2)]^2}{r_2^{\,3}\cdot r_3^{\,3}} + \frac{[(x-a_3)(y-b_1)-(x-a_1)(y-b_3)]^2}{r_3^{\,3}\cdot r_1^{\,3}} + \frac{[(x-a_1)(y-b_2)-(x-a_2)(y-b_1)]^2}{r_1^{\,3}\cdot r_2^{\,3}}.$$

Die Zähler und Nenner sind Quadrate, also positiv, folglich:

$$rt - s^2 > 0 \quad \text{und außerdem} \quad r > 0 \quad \text{oder} \quad t > 0,$$

also nach [176 5] in der Tat ein Minimum, wie zu erwarten war.

Somit ist alles in Ordnung, bis auf eins. Offenbar sind r_1, r_2, r_3 absolut gemeint, also daß „stillschweigend" die Wurzeln in (2) positiv gesetzt wurden. Könnten sie aber nicht auch negativ werden? In der Tat, wenn das gegebene Dreieck ABC stumpfwinklig ist und der stumpfe Winkel mehr als 120° beträgt, so existiert P innerhalb des Dreiecks gar nicht, weil die Kreisbögen sich gar nicht treffen. Ein Schnittpunkt P würde erst entstehen, wenn man zwei der Kreisbögen über die Ecken des stumpfen Winkels verlängert; aber für diesen Punkt P würde augenscheinlich die Summe der absoluten Abstände kein Minimum sein. Ein Abstand wird hier wohl negativ genommen werden müssen, nämlich der Abstand r_1, wie eine genauere Untersuchung zeigt (Fig. 63).

Aber sofort erhebt sich wieder ein Zweifel. Nämlich, wie auch die drei Punkte liegen mögen, einen Punkt muß es doch unter allen Umständen geben, für den die absolute Summe der Abstände möglichst klein ist, also auch selbst dann, wenn der Winkel A stumpf ist und mehr als 120° beträgt. Innerhalb des Dreiecks liegt er alsdann nicht, wie soeben gezeigt, außerhalb wird er auch kaum liegen können. So bleibt nur übrig, daß er auf dem Umfang liege; dann aber muß er mit A zusammenfallen, weil, wie sich leicht zeigen läßt, für jeden andern Punkt die absolute Summe größer wird, als für A, nämlich größer als $|AB| + |AC|$. Werden aber nun für A, d. h. wenn man $x = a_1$, $y = b_1$ setzt, die Bedingungsgleichungen (3) erfüllt? Nein! Denn die beiden Brüche:

$$\frac{x-a_1}{r_1} \quad \text{und} \quad \frac{y-b_1}{r_1}$$

erhalten die Form $0:0$ und werden unbestimmt, die Gleichungen (3) fallen überhaupt fort. Es liegt also der Fall so, daß die gewöhnliche Theorie der Maxima und Minima versagt, wie ja überhaupt die Differentialrechnung immer versagen muß, wenn die Differentialquotienten unbestimmt werden, worauf wohl oft genug nachdrücklich hingewiesen worden ist.

Man wird also das erste Differential der Summe:

$$|r_1| + |r_2| + |r_3|,$$

wenn man A als den betreffenden Punkt nimmt und also der laufende Punkt P unbegrenzt nahe an A liegt, nicht wie gewöhnlich durch die Formel:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

sondern auf andere Weise bilden müssen. Zunächst ist:

$$d(|r_1| + |r_2| + |r_3|) = d|r_1| + d|r_2| + d|r_3|$$

und ferner ist $|dr_1|$ nichts anderes als $|r_1|$ selbst. Diese unendlich kleine Größe möge ε genannt werden, also: $|dr_1| = |r_1| = \varepsilon$. Sodann ergibt sich:

$$|r_2| = \left|\sqrt{c^2 + \varepsilon^2 - 2c\varepsilon\cos\beta}\right|,$$

Fig. 63.

also:

$$d|r_2| = |r_2| - c = \sqrt{c^2 + \varepsilon^2 - 2c\varepsilon\cos\beta} - c = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 2c\cos\beta)}{|r_2| + c},$$

ebenso:

$$d|r_3| = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 2b\cos\alpha)}{|r_3| + b},$$

daher:

$$d(|r_1| + |r_2| + |r_3|) = \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{(\varepsilon - 2c\cos\beta)}{|r_2| + c} + \frac{(\varepsilon - 2b\cos\alpha)}{|r_3| + b}\right).$$

Der erste Faktor ε ist absolut oder positiv. Es kommt daher auf den zweiten an, welcher, da ε unendlich klein, b und c aber endlich sind und $\lim |r_2| = c$, $\lim |r_3| = b$ ist, unendlich wenig von dem Ausdruck:

$$1 - (\cos\alpha + \cos\beta) = 1 - 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

verschieden ist. Sein Wert hängt von der Richtung von ε oder $|dr_1|$ ab; wenn aber $A > 120^0$, also $\cos\frac{A}{2} < \cos 60^0$, d. h. $\left|2\cos\frac{A}{2}\right| < 1$ ist, so bleibt er positiv, welche Richtung man ε auch gibt. Also ist die absolute Summe der Abstände für den Punkt A ein Minimum.

Worin aber besteht die Abweichung zwischen diesem Minimum und dem „regulären" Minimum? In der allgemeinen Theorie soll das erste totale Differential identisch verschwinden, also das wirkliche Differential der Funktion von höherer Ordnung sein. Hier aber verschwindet das erste totale Differential überhaupt nicht, sondern bleibt von der ersten Ordnung, ist aber trotzdem immer positiv, niemals negativ.

Man sieht, wo die Differentialquotienten unbestimmt werden, sind besondere Untersuchungen nötig.

Zweites Beispiel. Es soll nicht die Summe der Entfernungen selbst, sondern die Summe der Quadrate der Entfernungen ein Minimum werden.

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \text{Min.},$$

oder nach (2):

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 = \text{Min.},$$

$$\left.\begin{aligned} p &= 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + 2(x - a_3) = 0 \\ q &= 2(y - b_1) + 2(y - b_2) + 2(y - b_3) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und hieraus:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \quad y = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}. \tag{5}$$

Diese beiden Formeln bestimmen bekanntlich den Schwerpunkt S des Dreiecks. Die weitere Differentiation ergibt:

$$r = 2 + 2 + 2 = 6, \quad s = 0, \quad t = 2 + 2 + 2 = 6.$$

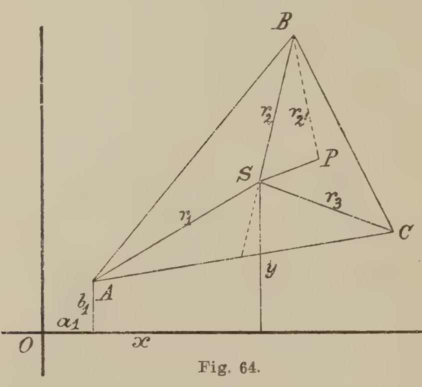


Fig. 64.

Also ist $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ für den Schwerpunkt wirklich ein Minimum nach [176 5], was man auch leicht wie folgt bestätigen kann. Es sei $P(x_1 y_1)$ irgendein anderer Punkt und man setze:

$$x_1 = x + \Delta x, \quad y_1 = y + \Delta y.$$

Daher für den Punkt P, wenn seine Abstände durch Striche von den Abständen des Punktes S unterschieden werden:

$$(r_1')^2 = (x + \Delta x - a_1)^2 + (y + \Delta y - b_1)^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 \\ + 2(\Delta x(x - a_1) + \Delta y(y - b_1)) + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

oder auch:

$$(r_1')^2 = r_1^2 + SP^2 + 2(\Delta x(x - a_1) + \Delta y(y - b_1)).$$

Berechnet man ebenso $(r_2')^2$ und $(r_3')^2$, addiert und berücksichtigt (4), so folgt:

$$(r_1')^2 + (r_2')^2 + (r_3')^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 3SP^2,$$

womit abermals bewiesen ist, daß für den Schwerpunkt die Summe der Quadrate der Abstände kleiner ist, als für jeden anderen Punkt P.

Anmerkung. Es sei die Lage eines Punktes dreimal, d. h. durch drei verschiedene trigonometrische Messungen von demselben „Gewicht“ bestimmt worden. Diese drei Bestimmungen werden infolge der Beobachtungsfehler etwas abweichen, so daß man im allgemeinen statt eines Punktes ihrer drei, A, B, C, erhalten wird. Da die drei Messungen gleich gut sein sollen, so wird man weder A, noch

B, noch C bevorzugen, sondern eine der Billigkeit entsprechende Ausgleichung vornehmen.

Der zuerst sich darbietende Vorschlag wäre offenbar: Man gleiche so aus, daß die absolute Summe der übrig bleibenden Fehler möglichst klein wird. Siehe das erste Beispiel. Dieser Vorschlag ist wirklich gemacht und auch früher wiederholt befolgt worden. Jetzt aber wird er ganz allgemein verworfen zugunsten des von Legendre und Gauß gemachten Vorschlages. Man gleiche so aus, daß die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler möglichst klein wird. Siehe das zweite Beispiel.

Weshalb an und für sich der zweite Vorschlag vor dem ersten vorzuziehen ist, das gehört in ein Lehrbuch über die „Methode der kleinsten Quadrate". Auf alle Fälle spricht eine Tatsache für ihn. Wie nämlich die beiden Beispiele zeigen, und wie auch in allen anderen Fällen sich gezeigt hat, führt die Methode der kleinsten Quadrate stets zu den einfachsten Rechnungen, während die Methode der absoluten Summe der Fehler selbst erheblich mehr Arbeit macht und auch sonst große Unzuträglichkeiten mit sich bringt, wie das erste Beispiel gezeigt hat.

178. Bedingte Maxima und Minima. Man versteht hierunter größte oder kleinste Werte einer Größe, welche von beliebig vielen anderen Veränderlichen abhängt, die aber selbst durch eine oder mehrere Bedingungen aneinander geknüpft sind. Der einfachste Fall wäre, eine Funktion:

$$z = F(x, y) \tag{1}$$

zu einem Maximum oder Minimum werden zu lassen, aber in der bedingten Art, daß zwischen x und y eine Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{2}$$

stattfinden soll.

Man könnte aus (2) y durch x ausdrücken und in (1) einsetzen, worauf z nur noch von x abhängen und der allererste Fall [174] entstehen würde. Wenn aber diese Maßnahmen zu umständlich erscheinen, so differenziert man lieber implizite und verfährt wie folgt. Da z ein Maximum oder Minimum werden soll, so muß das erste totale Differentiale verschwinden:

$$dz = F_x' dx + F_y' dy = 0, \quad \text{also:} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'}{F_y'}. \tag{1a}$$

Andererseits folgt aus (2) entsprechend:

$$\varphi_x' dx + \varphi_y' dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'}, \tag{2a}$$

daher:

$$-\frac{F_x'}{F_y'} = -\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'}, \quad \text{oder:} \quad \boldsymbol{\varphi_y' \cdot F_x' - F_y' \cdot \varphi_x' = 0.} \tag{3}$$

In (2) und (3) hat man zwei Gleichungen zur Bestimmung von x und y. Sie sind gegebenenfalls aufzulösen. Man kann aber auch nach der Koeffizientenmethode von Lagrange verfahren, welche darin besteht, daß eine lineare Verbindung:

$$(F_x' + \lambda \varphi_x')\, dx + (F_y' + \lambda \varphi_y')\, dy = 0$$

hergestellt und nun λ so bestimmt wird, daß der Faktor von dx verschwindet. Da dann auch der Faktor von dy verschwinden muß, so folgt:

$$F_x' + \lambda \varphi_x' = 0, \quad F_y' + \lambda \varphi_y' = 0. \tag{4}$$

Die Elimination von λ führt auf (3) zurück. Oft aber, und darin besteht der Vorzug dieser Methode, behält man λ als „Parameter" bei, drückt aus (4) x und y durch λ aus und setzt in (2) ein.

Entsprechend kann man ganz allgemein bei bedingten größten und kleinsten Werten verfahren. Ist zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum oder ein Maximum-Minimum vorliegt, so bilde man, wie sonst, das zweite totale Differential der Funktion und sehe zu, ob es nur positiv oder nur negativ oder beides werden kann, wenn die zweiten totalen Differentiale der Bedingungsgleichungen verschwinden.

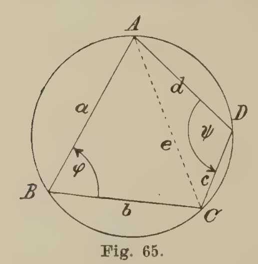


Fig. 65.

Beispiel. (Fig. 65.) Unter allen Vierecken mit vier gegebenen Seiten a, b, c, d dasjenige zu bestimmen, welches den größten Inhalt hat. Man führe φ und ψ als Veränderliche ein, dann ist der Inhalt:

$$F = \frac{ab}{2} \sin \varphi + \frac{cd}{2} \sin \psi. \tag{5}$$

Die Winkel φ und ψ sind aber nicht ganz willkürlich, sondern durch eine Bedingung aneinander geknüpft. Man drücke e^2 durch a, b und φ, dann durch c, d und ψ aus und setze beide Ausdrücke einander gleich, so folgt:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = c^2 + d^2 - 2cd \cos \psi. \tag{6}$$

Daher nach (1 a) und (2 a):

$$0 = \frac{ab}{2} \cos \varphi\, d\varphi + \frac{cd}{2} \cos \psi\, d\psi$$

und:

$$0 = 2ab \sin \varphi\, d\varphi - 2cd \sin \psi\, d\psi,$$

oder nach Elimination von $d\varphi$ und $d\psi$ sehr einfach:

$$\sin(\varphi + \psi) = 0.$$

Da φ und ψ hier absolut und konkav vorausgesetzt werden, so folgt:

$$\varphi + \psi = 180^0, \quad \psi = 180^0 - \varphi, \tag{7}$$

d. h.: Unter allen Vierecken mit denselben vier Seiten hat das Kreisviereck den größten Flächeninhalt. Da aus (7) folgt: $\sin\psi = \sin\varphi$, $\cos\psi = -\cos\varphi$, so vereinfachen sich (5) und (6) in:

$$F = \frac{ab + cd}{2} \cdot \sin\varphi$$

und:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(cd + ab)\cos\varphi .$$

Berechnet man aus der zweiten Gleichung $\cos\varphi$, geht dann zu $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$ über und führt die angezeigten Rechnungen bis zum letzten Ende aus, so ergibt sich die Formel für den Inhalt eines Kreisvierecks:

$$F_{\max} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist: $a + b + c + d = 2s$.

Um festzustellen, daß F auch wirklich ein Maximum ist, bilde man aus (5) das zweite totale Differential von F und setze zugleich das zweite totale Differential von (6) $= 0$. Man erhält:

$$d^2F = \frac{ab}{2}\cos\varphi\, d^2\varphi + \frac{cd}{2}\cos\psi\, d^2\psi - \frac{ab}{2}\sin\varphi (d\varphi)^2 - \frac{cd}{2}\sin\psi (d\psi)^2,$$

$$0 = 2ab\sin\varphi\, d^2\varphi - 2cd\sin\psi\, d^2\psi + 2ab\cos\varphi (d\varphi)^2 - 2cd\cos\psi (d\psi)^2,$$

oder nach (7):

$$d^2F = \tfrac{1}{2}\cos\varphi (ab\,d^2\varphi - cd\,d^2\psi) - \tfrac{1}{2}\sin\varphi (ab(d\varphi)^2 + cd(d\psi)^2),$$

$$0 = \tfrac{1}{2}\sin\varphi (ab\,d^2\varphi - cd\,d^2\psi) + \tfrac{1}{2}\cos\varphi (ab(d\varphi)^2 + cd(d\psi)^2).$$

Man eliminiere $ab\,d^2\varphi - cd\,d^2\psi$. Es ergibt sich:

$$d^2F = -(ab(d\varphi)^2 + cd(d\psi)^2)\left(\sin\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\right) = -\frac{ab(d\varphi)^2 + cd(d\psi)^2}{\sin\varphi}.$$

d^2F ist also schlechterdings nur negativ, mithin ist F ein Maximum wie zu erwarten war. Übrigens ist noch eine zweite Lösung vorhanden, welche erst dann einen Sinn erhält, wenn man den Sinn der Aufgabe etwas ändert. Das Viereck könnte nämlich auch einspringende Ecken haben, ja zwei Seiten könnten sich möglicherweise schneiden, in welchem Fall man kein eigentliches Viereck, sondern zwei Dreiecke erhält. Wenn wie üblich der Inhalt eines solchen Vierecks als absolute Differenz der Inhalte dieser beiden Dreiecke erklärt wird, so ergibt sich statt (5):

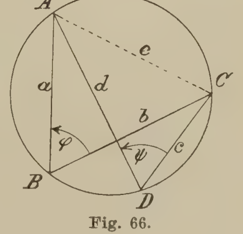


Fig. 66.

$$F = \frac{ab}{2}\sin\varphi - \frac{cd}{2}\sin\psi, \tag{5a}$$

während an (6) sich nichts ändert. Man erhält diesmal $\varphi = \psi$, also auch ein Kreisviereck —, sozusagen.

179. Noch ist eine letzte, die schönste, freilich aber auch die schwierigste Erweiterung der Theorie der Maxima und Minima zu erwähnen, diejenige nämlich, welche den Anstoß zur Variationsrechnung gegeben hat, vgl. [173]. Es handelt sich dann nicht darum, daß eine gegebene Funktion beliebig vieler Veränderlicher ein Maximum oder Minimum werden soll, sondern darum, daß eine nicht gegebene Funktion erst so zu bestimmen ist, daß eine mit ihr verknüpfte Größe z möglichst groß oder möglichst klein wird.

Der Ansatz entspricht völlig den früheren Ansätzen. Man sucht die Funktion so zu bestimmen, daß die erste Variation [173] δz verschwindet und hält sich zur weiteren Entscheidung an das Vorzeichen der zweiten Variation $\delta^2 z$. Die Ausführung aber gehört in ein Lehrbuch der Variationsrechnung. Doch kann in recht einfachen Fällen, aber auch nur dann, ein naheliegender Grenzprozeß auch zum Ziele führen.

Beispiel. Gegeben eine in sich geschlossene Kurve (Schnur) von gegebener Länge. Sie soll so in eine Ebene gelegt werden, daß eine möglichst große Fläche umschlossen wird.

Zunächst folgt aus der in [178] behandelten Aufgabe ohne weitere analytische Entwicklungen, daß allgemein von allen Polygonen mit n gegebenen Seiten das einem Kreise einbeschriebene Polygon den größten Inhalt einschließt, wie groß auch n ist. Es handele sich z. B. um ein Fünfeck. (Fig. 67.) Man ziehe eine Diagonale f und denke sich E, D und C bereits festgelegt. Dann muß das Viereck A, B, C, E mit den vier gegebenen Seiten a, b, c, f noch möglichst groß, also ein Kreisviereck sein. Ganz ebenso zeigt man, daß z. B. auch $ABCD$ auf einem Kreise liegen müssen. Mit anderen Worten: Das Fünfeck muß ein Kreisfünfeck sein. Von einem Fünfeck schließt man ebenso auf das Sechseck, von einem Sechseck auf ein Siebeneck usw.

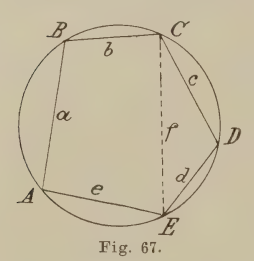


Fig. 67.

Nun nehme man die Seiten kleiner und kleiner an, während ihre Anzahl mehr und mehr wächst. Immer müssen die Ecken auf einem Kreise liegen. Also müssen zuletzt alle Punkte des Umfanges auf einem Kreise liegen, da dieser die Grenzfigur aller ihm einbeschriebenen Vielecke bildet. Daher:

Unter allen ebenen Flächen, welche von gleichlangen Linien eingeschlossen werden, hat der Kreis den größten Inhalt.

(Übrigens kann an diesem Beispiel leicht der Begriff relativer oder gegenseitiger Maxima und Minima klar gemacht werden. Es folgt nämlich umgekehrt: Unter allen ebenen Flächen von gegebenem Inhalt hat der Kreis die kürzeste Umgrenzung.)

Allgemein kann wegen der Unzulänglichkeit der Bemerkungen über Variationen in [173] nur darauf hingewiesen werden, daß die Theorie der größten und kleinsten Werte von dem allereinfachsten Falle in [174], da es sich um eine Funktion einer Veränderlichen handelte, sich fortsetzen läßt bis in die höchsten Zweige der Mathematik und auch ihrer Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und Naturwissenschaften. Dies zeigt z. B. das Prinzip der kleinsten Wirkung, welches zuerst von Maupertius aufgestellt, dann von Euler in der Form erheblich verbessert und endlich von Hamilton und Jacobi zum Prinzip der variierenden Wirkung erhoben worden ist, dessen große Allgemeinheit viele Probleme der höheren Mechanik umfaßt.

Übungen zu § 20.

1. Einer Ellipse ein Rhombus von möglichst kleinem Umfange zu umschreiben. (Ecken auf den Verlängerungen der Achsen.)

2. Einer Kugel einen Kegel a) mit möglichst großem Rauminhalt b) mit möglichst großem Mantel einzubeschreiben.

3. Einer Kugel einen Kegel a) mit möglichst kleinem Rauminhalt b) mit möglichst kleinem Mantel zu umschreiben.

4. In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Inhalt J einen Punkt P so zu finden, daß die Lote x, y, z auf die Seiten die Bedingung erfüllen:

a) $x^2 + y^2 + z^2$ soll ein Minimum sein,

b) $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$ soll ein Minimum sein,

c) xyz soll ein Maximum sein,

d) $ax^2 + by^2 + cz^2$ soll ein Minimum sein.

5. Ein Glasfabrikant soll zylindrische Gläser von gegebenem Innenvolumen $= V$ herstellen. Gegeben ist ferner die Dicke der Wandung $= e$ und die Dicke des Bodens $= 2e$. Wie müssen sich Höhe zu Durchmesser verhalten, damit er möglichst wenig Glas verbraucht?

6. Ein Lenkballon fährt in gerader Linie 200 km von A nach B, macht in B kehrt, fährt zurück aber nicht bis A sondern nur bis zu einem Punkte C, der von B 50 km entfernt ist. Die Eigengeschwindigkeit des Ballons beträgt 40 km in der Stunde. Während der ganzen Fahrt weht ein Wind gleichmäßig von A nach B. Welche Stärke muß er haben, damit die Fahrt in der kürzesten Zeit zurückgelegt wird?

7. Herr Schlau erfährt auf der Rennbahn im letzten Augenblick, daß ein Pferd X, ein sog. Outsider aus irgendwelchen Gründen gewinnen wird. Er erfährt ferner, daß auf X nur 2000 Mk., auf alle anderen Pferde zusammen aber 300 000 Mk. gesetzt sind. Welche

Summe muß er auf X setzen, um einen möglichst großen Reingewinn zu erzielen, wenn der Totalisator $16\frac{2}{3}\%$ für sich von der Gesamtsumme einbehält.

§ 21. Theorie der Krümmung.

180. Die ersten Vorbereitungen zu dieser Theorie befinden sich in § 16. Ihnen sind dann in § 18 Betrachtungen über Berührungen höherer Ordnung gefolgt. Beides vereint führt nunmehr schnell und sicher zum Ziele. Voranzustellen ist die:

Definition des Krümmungskreises. Der einer (ebenen) Kurve für einen beliebigen Punkt P auf ihr zugehörige Krümmungskreis ist derjenige Kreis, welcher in P mit der Kurve eine Berührung von (mindestens) zweiter Ordnung eingeht. Sein Radius heißt Krümmungsradius und sein Mittelpunkt heißt Krümmungsmittelpunkt. Ersterer werde mit ϱ, letzterer mit M und seine Koordinaten mit ξ und η bezeichnet.

Erste Ableitung des Krümmungskreises. Nach [160] darf man sagen, der Krümmungskreis gehe durch drei benachbarte Punkte der Kurve. Daher wende man die (eigens hierzu abgeleitete) Formel [30 9]:

$$r = \pm \frac{1}{B \cos\varphi \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}$$

an. Nach [141 2] ist $\lim B = y'' = f''(x)$. Ferner folgt:

$$\lim\varphi = \lim\varphi_1 = \lim\varphi_2 = \tau,$$

also auch:

$$\lim\cos\varphi = \lim\cos\varphi_1 = \lim\cos\varphi_2 = \cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\tau}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Also:

$$\varrho = \frac{\pm\sqrt{1+(y')^2}^3}{y''}. \tag{1}$$

Um ξ und η zu berechnen, bezeichne man die drei benachbarten Punkte mit P, P_1, P_2. Dann soll sein $\varrho^2 = MP^2 = MP_1^2 = MP_2^2$, d. h. das erste und zweite Differential von ϱ^2, nämlich $d(\varrho^2)$ und $d^2(\varrho^2)$ müssen verschwinden, wenn man ξ und η konstant läßt, aber x und y verändert, jedoch so verändert, daß der Punkt auf der Kurve bleibt. Es ist daher:

$$\varrho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$$
$$d(\varrho^2) = 0 = -2(\xi - x)\,dx - 2(\eta - y)\,dy \tag{2}$$
$$d^2(\varrho^2) = 0 = -2(\xi - x)\,d^2x - 2(\eta - y)\,d^2y + 2(dx)^2 + 2(dy)^2$$

und aus den beiden letzten Gleichungen durch Auflösung nach ξ und η:

$$\xi = x - \frac{((dx)^2 + (dy)^2)\,dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}; \quad \eta = y + \frac{((dx)^2 + (dy)^2)\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}..$$

Hier setze man $dy = y'dx$; $dx d^2y - dy d^2x = y''(dx)^3$ ([141 3]). Es wird:

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}; \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \tag{3}$$

Die Formeln sind gefunden. Zur Probe setze man (3) in (2) ein und ziehe die Wurzel. Man erhält wieder (1), wie es sein muß.

Zweite Ableitung des Krümmungskreises. Man stelle die Gleichung der Kurve:

$$y = f(x) \tag{4}$$

zusammen mit der Gleichung des Krümmungskreises in expliziter Form:

$$Y = \eta \pm \sqrt{\varrho^2 - (X - \xi)^2}, \tag{5}$$

wobei zum Unterschied die laufenden Koordinaten für den Kreis mit großen Buchstaben geschrieben worden sind. Aus (4) ergibt sich durch zweimaliges Differenzieren:

$$y' = f'(x); \quad y'' = f''(x)$$

und aus (5) gleichfalls durch zweimaliges Differenzieren nach X:

$$Y' = -\frac{X - \xi}{\pm\sqrt{\varrho^2 - (X - \xi)^2}}, \quad Y'' = \frac{-\varrho^2}{\pm\sqrt{\varrho^2 - (X - \xi)^2}^3},$$

oder, wenn aus (5) für die Wurzel der Wert $Y - \eta$ zurückgesetzt wird:

$$Y' = -\frac{X - \xi}{Y - \eta}, \quad Y'' = -\frac{\varrho^2}{(Y - \eta)^3}. \tag{6}$$

Für den gemeinsamen Berührungspunkt von Kurve und Kreis ist nun nicht allein $X = x$ und $Y = y$, sondern auch nach [159], da der Kreis ein Krümmungskreis sein soll: $Y' = y'$, $Y'' = y''$. Daher durch Einsetzen in (5) und (6):

$$y = \eta \pm \sqrt{\varrho^2 - (x - \xi)^2}, \tag{5 a}$$

$$y' = -\frac{x - \xi}{y - \eta}, \quad y'' = -\frac{\varrho^2}{(y - \eta)^3}. \tag{6 a}$$

Die Auflösung dieser drei Formeln nach ξ, η und ϱ führt gleichfalls zu (1) und (3).

Dritte Ableitung des Krümmungskreises. Ihr liegt eine etwas andere Erklärung des Krümmungsmittelpunktes zugrunde, von der ohne Mühe durch eine Grenzbetrachtung dargetan werden könnte, daß sie im wesentlichen mit der vorigen übereinstimmt. Sie lautet:

Der Krümmungsmittelpunkt ist der Durchschnittspunkt zweier benachbarter Normalen.

Welchen Sinn das Wort „benachbart“ in der höheren Mathematik haben soll, ist in [86] ein für allemal festgelegt worden. Auch die soeben erwähnte Grenzbetrachtung ist wohl überflüssig, denn dieser

Durchschnittspunkt ist ja schon in [147] bestimmt worden und die Formeln sind völlig identisch mit (3).

Vierte Ableitung des Krümmungskreises. Sie geht von der Formel für einen Kreisbogen s, ausgedrückt durch Radius r und durch Zentriwinkel φ:

$$s = r\varphi; \quad r = \frac{s}{\varphi} \tag{7}$$

aus, von der mittelst einer Grenzbetrachtung ohne Mühe dargetan werden kann, daß sie auch für einen unendlich kleinen Bogen einer beliebigen Kurve gelten muß, wenn man statt r den Krümmungsradius ϱ, statt s das Bogenelement der Kurve ds und statt φ den Kontingenzwinkel $d\varphi = d\tau$ setzt. Daher:

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\text{Bogenelement}}{\text{Kontingenzwinkel}}. \tag{8}$$

Nach [144 1] und [146] ist:

$$ds = \pm \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \quad d\tau = \frac{y''}{1 + (y')^2}\, dx,$$

daher:

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{1 + (y')^2}^3}{y''},$$

womit ϱ zum viertenmal berechnet worden ist.

181. Zu der vorigen Nummer sei bemerkt: I. Die vier Ableitungen des Krümmungskreises können selbstverständlich aufeinander zurückgeführt werden. Aber sie zeigen doch verschiedene Gesichtspunkte an.

II. Je größer ϱ, desto kleiner ist die Krümmung, je kleiner ϱ, desto größer ist die Krümmung. Im Einklang hiermit bezeichnet man den reziproken Wert des Krümmungsradius als spezifische Krümmung der Kurve in dem betreffenden Punkte. Sie werde K genannt. Es ist dann:

$$K = \frac{1}{\varrho} = \pm \frac{y''}{\sqrt{1 + (y')^2}^3}. \tag{1}$$

III. Das Vorzeichen in der Formel [180 1] richtet sich nach dem Vorzeichen von y'', welches [149] die Seite bestimmt, nach welcher sich die Kurve von der Tangente wegkrümmt. Man will ϱ absolut haben und kann daher auch schreiben:

$$\varrho = \left| \frac{\sqrt{1 + (y')^2}^3}{y''} \right|. \tag{2}$$

IV. Wendepunkte (Fig. 68). Wenn

$$y'' = 0 \tag{3}$$

ist, so wird $\varrho = \pm \infty$, $K = 0$. Die Krümmung verschwindet in einem solchen Punkt. Der Krümmungsradius wird unendlich groß, der

Krümmungsmittelpunkt liegt unendlich fern, der Krümmungskreis artet aus in die Tangente. Wenn nicht zufällig y''' auch noch verschwindet, also wenn:

$$y'' = 0, \quad \text{aber} \quad y''' \neq 0 \tag{3a}$$

ist, so ist der betreffende Punkt der Kurve ein Wendepunkt. Es geht y'' von positiven zu negativen oder von negativen zu positiven Werten über, die Krümmung der Kurve wendet sich nach [159] von der einen Seite der Tangente zur anderen.

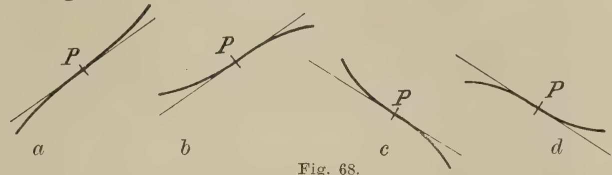


Fig. 68.

V. Spitzen. Wenn $y'' = \pm \infty$ (aber $y' \neq \pm \infty$) ist, so wird $\varrho = 0$, $K = \pm \infty$. Die Krümmung wird unendlich groß. Beispiele hierzu in § 23 als sogenannte Spitzen von Kurven.

VI. Scheitel. Im allgemeinen hat der Krümmungskreis mit der Kurve im Berührungspunkt nur eine Berührung zweiter Ordnung. Es fallen dort drei Schnittpunkte zusammen. Daher berührt der Krümmungskreis die Kurve und schneidet sie zugleich [159], indem er da nach innen in die konkave Seite der Kurve geht, wo die Krümmung schwächer und da nach außen in die konvexe Seite der Kurve geht, wo die Krümmung stärker wird (Fig. 69).

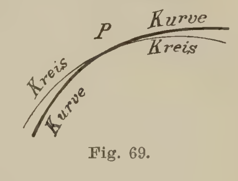


Fig. 69.

Im besonderen aber kann es auf der Kurve Punkte geben, in denen die Berührung mit dem Krümmungskreis von der dritten oder noch höheren Ordnung wird. Hat es bei der dritten Ordnung sein Bewenden, so fallen im Berührungspunkte vier Schnittpunkte zusammen und der Krümmungskreis tritt vom Berührungspunkt aus zu beiden Seiten in die konkave oder zu beiden Seiten in konvexe Seite der Kurve ein. Dies ereignet sich z. B. für die Parabel in ihrem Scheitel, vgl. [160], und für die Ellipse in jedem ihrer Scheitel. Überträgt man auf diese Weise den Begriff Scheitel auf alle Kurven, so folgt:

In einem Scheitel ist die Berührung zwischen Kurve und Krümmungskreis von der dritten Ordnung (oder der fünften, siebenten ...). Die Krümmung ist dort ein Maximum oder ein Minimum.

Doch ist letztere Behauptung noch zu beweisen. Wenn der Krümmungskreis mit der Gleichung:

$$\varphi(x, y) \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - \varrho^2 = 0$$

in P mit der Kurve eine Berührung dritter Ordnung haben soll, so muß das erste, zweite und dritte totale Differential dieser Gleichung, wenn man ξ, η und ϱ konstant setzt, verschwinden, selbst wenn die Differentiale von x und y statt für den Kreis für die Kurve genommen werden. Setzt man der Einfachheit wegen auch noch $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, so folgt nach dreimaligen Differenzieren:

$$0 = 3\,dy\,d^2y + (y - \eta)\,d^3y$$

und nach [180 3]:

$$y''' = \frac{d^3y}{(dx)^3} = -\frac{3y'y''}{y-\eta} = +\frac{3y'(y'')^2}{1+(y')^2}. \tag{4}$$

Diese Gleichung (4) muß also für einen Scheitel erfüllt sein. Andererseits ergibt Formel [180 1], wenn man total differenziert:

$$d\varrho = \frac{y''\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{1+y'^2}\,2y'dy' - \sqrt{1+y'^2}^3\cdot dy''}{(y'')^2}$$

oder, da:

$$dy' = y''dx, \qquad dy'' = y'''dx$$

zu setzen ist:

$$d\varrho = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{(y'')^2}\left(3y'(y'')^2 - (1+(y')^2)y'''\right)\cdot dx,$$

d. h.

$$d\varrho = 0,$$

wenn für y''' der eben berechnete Wert (4) eingesetzt wird. Also ist ϱ für einen Scheitel wirklich ein Maximum oder ein Minimum.

VII. Ist die Kurve nicht explizite gegeben durch ihre Gleichung, sondern durch eine Parameterdarstellung:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \tag{5}$$

so schreibe man statt y' und y'' ihre Werte zurück, nämlich [141 3]:

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx)^3}.$$

Es wird in für x und y symmetrischer Gestalt aus [180 1]:

$$\varrho = \pm\frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}. \tag{6}$$

Andererseits folgt aus (5) durch zweimaliges Differenzieren (wenn $d^2t = 0$ gesetzt wird):

$$dx = \varphi'(t)dt \qquad dy = \psi'(t)dt,$$
$$d^2x = \varphi''(t)(dt)^2, \quad d^2y = \psi''(t)(dt)^2,$$

also, nachdem im Zähler und Nenner $(dt)^3$ gehoben worden sind:

$$\varrho = \pm\frac{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}^3}{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}. \tag{7}$$

Man hätte auch unmittelbar [125 3] und [127 2] einsetzen können in [180 1].

VIII. Ist dagegen die Gleichung der Kurve in impliziter Form gegeben:

$$F(x, y) = 0,$$

so berechne man nach [126 2] und [127 3a]:

$$y' = -\frac{p}{q}, \quad y'' = -\frac{rq^2 - 2spq + tp^2}{q^3}$$

und setze ein in [180 1]. Es ergibt sich nach gehöriger Vereinfachung:

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{p^2 + q^2}^3}{rq^2 - 2spq + tp^2}. \tag{8}$$

IX. Für Polarkoordinaten r und φ transformiere man die Differentiale, wie es in [170] allgemein gelehrt und für diesen Fall im besondern ausgeführt worden ist. Man erhält nach [170 Ia] und [170 IV] durch Einsetzen in (6):

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2}^3}{r^2(d\varphi)^3 + 2\,d\varphi(dr)^2 - r\,d\varphi\,d^2r + r\,dr\,d^2\varphi} \tag{9}$$

oder nach Division durch $(d\varphi)^3$, wenn man r explizite durch φ gegeben annimmt, also:

$$r = f(\varphi)$$

setzt, worauf (für $d^2\varphi = 0$):

$$r' = \frac{dr}{d\varphi}; \quad r'' = \frac{d^2r}{(d\varphi)^2}$$

zu setzen ist:

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{r^2 + (r')^2}^3}{r^2 + 2r'^2 - rr''}. \tag{10}$$

X. Evolute und Evolvente. Den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve nennt man ihre Evolute. Die Kurve selbst bezeichnet man als Evolvente der Evolute. Weitere geometrische Beziehungen zwischen Evolute und Evolvente in § 24.

XI. Ehe man an die Untersuchung der Krümmungsverhältnisse für irgendeine Kurve herangeht, soll zweckmäßiger Weise das viel einfachere Problem der Tangente und Normale für sie schon erledigt sein (vgl. [142]).

182. Erstes Beispiel. Die Gerade:

$$y = a + bx, \quad y' = b, \quad y'' = 0.$$

Man erhält:

$$\varrho = \infty, \quad \xi = \infty, \quad \eta = \infty.$$

Krümmung ist überhaupt nicht vorhanden, also muß ϱ unendlich groß werden.

Zweites Beispiel. Die Parabel (Fig. 33):

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad y' = \frac{x}{p}, \quad y'' = \frac{1}{p},$$

also nach [180 1]:

$$\varrho = p \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2}^3.$$

Die stärkste Krümmung ist im Scheitel. Man erhält für $x = 0$ (vgl. [159] erstes Beispiel):

$$\varrho_{\min} = p.$$

Der betreffende Krümmungsmittelpunkt liegt auf der Hauptachse, vom Scheitel doppelt soweit entfernt wie der Brennpunkt. Vom Scheitel ab wird die Krümmung nach beiden Seiten sehr rasch schwächer. Man setze z. B.:

$$x = p, \quad y = \frac{p}{2}, \quad y' = 1, \quad y'' = \frac{1}{p},$$

so folgt (vgl. [159] zweites Beispiel):

$$\varrho = p(\sqrt{2})^3 = 2p\sqrt{2} = 2{,}828\ldots p = 2{,}828\ldots \varrho_{\min}.$$

Der Krümmungsradius ist beinahe schon dreimal so groß geworden. Die Formeln [180 3] ergeben für die Parabel:

$$\xi = x - \frac{x}{p}\left(1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2\right) \cdot p = -\frac{x^3}{p^2},$$

$$\eta = y + \left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) \cdot p = y + p + \frac{x^2}{p} = p + 3y.$$

Der Ausdruck für η führt in Verbindung mit [143] zu folgender einfacher Konstruktion. Man verlängere $US = y$ um p bis T, so ist PT die Normale. Dann verlängere man noch weiter über T um $2y$, so schneidet die Parallele MK zur Scheiteltangente die Normale im Krümmungsmittelpunkt M. Es lassen sich aber noch andere elegante Konstruktionen finden. So ist $p = N \cos \tau$ und $N = \sqrt{x^2 + p^2}$, daher:

$$\varrho = \frac{N^3}{p^2} = \frac{N}{\cos^2 \tau} = \frac{p}{\cos^3 \tau},$$

also zweite Konstruktion: Man errichte in T das Lot auf N, welches die verlängerte Ordinate in K schneidet und ziehe durch K die Parallele zur Scheiteltangente; sie schneidet die Normale in M.

Die Elimination von x und y aus den Formeln für ξ und η ergibt die Gleichung der Evolute:

$$\eta = p + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{\xi^2 p}.$$

Semikubische oder Neillsche Parabel. Sie hat in A eine Spitze.

Drittes Beispiel. Die Ellipse (Fig. 34.):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad y'' = -\frac{ab}{\sqrt{a^2 - x^2}^3},$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)} = \frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

also:

$$\varrho = \sqrt{\frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}^3 : \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)}^3},$$

oder:

$$\varrho = \frac{\sqrt{a^4 - e^2 x^2}^3}{a^4 b}.$$

Zur Probe setze man $a = b$, $e = 0$, so folgt $\varrho = a$, wie es sein muß, da alsdann die Ellipse zu einem Kreis mit dem Radius a wird, der sein eigener Krümmungskreis ist.

Man hätte auch von der impliziten Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ausgehen und nach [181 8] verfahren können. Es ergibt sich:

$$p = \frac{2x}{a^2}, \quad q = \frac{2y}{b^2}, \quad r = \frac{2}{a^2}, \quad s = 0, \quad t = \frac{2}{b^2},$$

$$rq^2 - 2sqp + tp^2 = 8\left(\frac{y^2}{a^2 b^4} + \frac{x^2}{b^2 a^4}\right) = \frac{8}{a^2 b^2},$$

daher:

$$\varrho = a^2 b^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}^3.$$

Eliminiert man hier y, so entsteht wieder für ϱ der vorige Ausdruck. Doch hat der jetzige den Vorzug der Symmetrie.

Die stärkste Krümmung ist in den Scheiteln der großen Achse. Man erhält für $x = a$, $y = 0$:

$$\varrho_{\min} = \frac{a^2 b^2}{a^3} = \frac{b^2}{a}$$

d. h. $\varrho = p$ (wie bei der Parabel). Die schwächste Krümmung ist in den Scheiteln der kleinen Achse. Man erhält für $x = 0$, $y = b$:

$$\varrho_{\max} = \frac{a^2 b^2}{b^3} = \frac{a^2}{b},$$

daher:

$$\varrho_{\max} : \varrho_{\min} = a^3 : b^3,$$

d. h. die Krümmungsradien für die Scheitel sind den dritten Potenzen der Hauptachsen proportional. Die Krümmung ist also von S zu T in viel größerem Maße veränderlich, als man nach dem Achsenverhältnis erwarten sollte. Ist letzteres z. B. $1 : 2$, so ist das Verhältnis der schwächsten zur stärksten Krümmung gleich $1 : 8$.

Für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes erhält man nach [180 3], wenn y' und y'' eingesetzt werden nach möglichster Vereinfachung:

$$\xi = + \frac{e^2 x^3}{a^4}, \quad \eta = - \frac{e^2 y^3}{b^4}.$$

Für $a = b$, $e = 0$ wird $\xi = \eta = 0$, wie es sein muß, da dann M mit 0 zusammenfällt. Allgemein liegt M zwischen R_1 und U_1, wie aus den Vorzeichen von ξ und η folgt.

Die Umkehrung der Formeln für ξ und η ergibt:

$$x = a\sqrt[3]{\frac{a\xi}{e^2}}, \quad y = b\sqrt[3]{-\frac{b\eta}{e^2}}.$$

Wenn in die Gleichung der Ellipse eingesetzt wird, so entsteht die Gleichung ihrer Evolute:

$$\sqrt[3]{a^2\xi^2} + \sqrt[3]{b^2\eta^2} - \sqrt[3]{e^4} = 0,$$

aber allerdings in irrationaler Form, in der Form:

$$\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{w}.$$

Man erhebe zunächst beide Seiten zum Kubus:

$$u + v + 3\sqrt[3]{u^2 v} + 3\sqrt[3]{u v^2} = w,$$

oder:

$$w - v - u = 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}),$$

oder:

$$w - v - u = 3\sqrt[3]{uvw},$$

also nach nochmaligem Erheben zum Kubus:

$$(w - u - v)^3 = 27\,uvw.$$

Hier ist $u = a^2\xi^2$, $v = b^2\eta^2$, $w = e^4$ zu setzen. Daher die Gleichung der Evolute in rationaler Form:

$$(e^4 - a^2\xi^2 - b^2\eta^2)^3 - 27\,a^2b^2e^4\xi^2\eta^2 = 0.$$

Die Evolute ist also eine Kurve sechster Ordnung. Sie hat vier Spitzen, welche mit den Krümmungsmittelpunkten für die Scheitel zusammenfallen.

Viertes Beispiel. Die gemeine Zykloide. Ihre Parameterdarstellung lautet [60]:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi),$$

$$dx = r(1 - \cos\varphi)\,d\varphi; \quad dy = r\sin\varphi\,d\varphi,$$

$$d^2x = r\sin\varphi(d\varphi)^2; \quad d^2y = r\cos\varphi(d\varphi)^2 \qquad (d^2\varphi = 0),$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}, \quad 1 + (y')^2 = \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

$$y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx)^3} = \frac{(1 - \cos\varphi)\cos\varphi - \sin\varphi\sin\varphi}{r(1 - \cos\varphi)^3}$$

$$= -\frac{1 - \cos\varphi}{r(1 - \cos\varphi)^3} = -\frac{1}{4r\sin^4\frac{\varphi}{2}},$$

daher nach [180 1]:

$$\varrho = \frac{1}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}} : \frac{1}{4r \sin^4 \frac{\varphi}{2}} = 4r \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Die Normale geht nach [143] durch Q ([60] Fig. 21). Ihre Länge ist:

$$PQ = 2r \sin \frac{\varphi}{2};$$

also:

$$\varrho = 2PQ.$$

Konstruktion: Man verlängere die Normale PQ über Q hinaus um sich selbst bis M, so ist M der Krümmungsmittelpunkt.

Die schwächste Krümmung ist im Scheitel S. Man erhält $\varrho_{\max} = 4r$. Die stärkste Krümmung ist in O (oder A). Sie ist dort sogar unendlich, denn es wird $\varrho_{\min} = 0$. Die Punkte $O, A \ldots$ sind nämlich Spitzen der Kurve.

Für den Krümmungsmittelpunkt M erhält man nach leichten Umformungen sehr einfach:

$$\xi = r(\varphi + \sin \varphi), \qquad \eta = -r(1 - \cos \varphi).$$

Die große Ähnlichkeit mit den ursprünglichen Formeln für x und y ist unverkennbar. Sie wird noch auffallender durch folgende einfache Transformation:

$$\xi = \xi_1 + r\pi, \qquad \varphi = \varphi_1 + \pi, \qquad \eta = \eta_1 - 2r;$$

da dann $\sin \varphi = -\sin \varphi_1$, $\cos \varphi = -\cos \varphi_1$ wird, so folgt:

$$\xi_1 = r(\varphi_1 - \sin \varphi_1), \qquad \eta_1 = r(1 - \cos \varphi_1),$$

d. h. sogar völlige Übereinstimmung, nur daß φ durch φ_1, x und y durch ξ_1 und η_1 ersetzt sind. Daher:

Die Evolute einer gemeinen Zykloide ist eine zu dieser kongruente und aus ihr durch Verschiebung um $r\pi$ in der Richtung der x-Achse und durch Verschiebung um $-2r$ in der Richtung der y-Achse entstehende Zykloide. Man beachte, daß den Scheiteln der Evolvente die Spitzen der Evolute und den Spitzen der Evolvente die Scheitel der Evolute entsprechen.

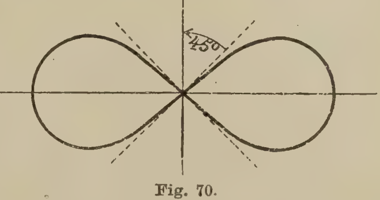


Fig. 70.

Fünftes Beispiel. Die gemeine oder Bernoullische Lemniskate (Fig. 70 u. 71). Ihre Gleichung lautet in Polarkoordinaten:

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi};$$

also:

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

daher nach [170 IIa]:

$$\operatorname{tg} u = \frac{r}{r'} = -\operatorname{cotg} 2\varphi;$$

also:

$$u = 90^0 + 2\varphi.$$

Es ist u der Winkel, den die Tangente mit r bildet. Folglich bildet die Normale mit r den Winkel $u - 90^0 = 2\varphi$.

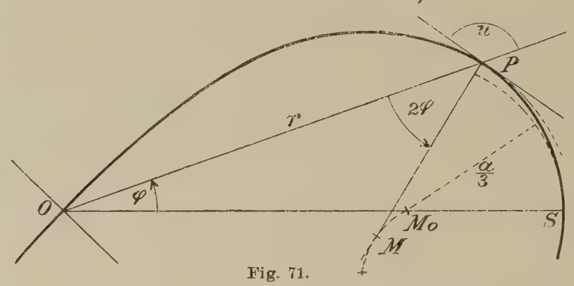


Fig. 71.

Konstruktion der Normalen. Man trage an $r = OP$ in P einen Winkel $= 2\varphi$ an. Der zweite Schenkel ist die Normale.

Um ϱ zu ermitteln, differenziere man noch einmal. Es wird nach möglichster Vereinfachung:

$$r'' = -a\frac{(2\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi)}{\sqrt{\cos^2\varphi}^3},$$

ferner, ebenfalls möglichst einfach:

$$r^2 + r'^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi} = \frac{a^4}{r^2},$$

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = \frac{3a^2}{\cos 2\varphi} = \frac{3a^4}{r^2},$$

daher nach [181 10] merkwürdig einfach:

$$\varrho = \frac{a^6}{r^3} : \frac{3a^4}{r^2} = \frac{a^2}{3r} = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Die stärkste Krümmung ist in den Scheiteln S und S_1. Man erhält für $r = a$:

$$\varrho_{\min} = \frac{a}{3}.$$

Die schwächste Krümmung ist in O. Durch diesen Punkt geht die Kurve zweimal hindurch. (Doppelpunkt § 23.) Man erhält für $r = 0$:

$$\varrho_{\max} = \infty,$$

d. h. O ist für jeden Zweig ein Wendepunkt. Die Tangenten in O (welche die Koordinatenwinkel halbieren) sind Wendetangenten.

Von der näheren Bestimmung der Lage von M sei Abstand genommen, zumal die Formeln [180 3] erst in Polarkoordinaten transformiert werden müßten.

Sechstes Beispiel. Die archimedische Spirale (Fig. 72). Ihre Gleichung:

$$r = a\varphi;$$

also:

$$r' = a, \qquad r'' = 0$$

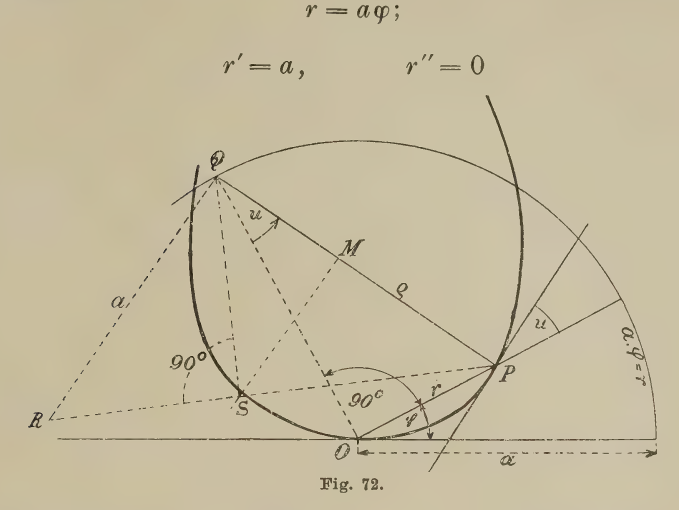


Fig. 72.

sagt aus, daß man den Radiusvektor so lang machen solle, wie der zugehörige Kreisbogen mit dem Radius a nach seiner Geradestreckung ist. Man erhält:

$$\operatorname{tg} u = \frac{r}{r'} = \frac{r}{a}$$

und hieraus folgende:

Konstruktion der Normalen. Man errichte auf OP in O das Lot im Sinne einer Positivdrehung um 90°. Es schneide den Kreis in Q, so ist QP die Normale.

Für den Krümmungsradius folgt:

$$\varrho = \frac{\sqrt{r^2 + a^2}^3}{r^2 + 2a^2} \quad \text{(Konstruktion siehe Figur).}$$

Die stärkste Krümmung ist in O selbst, im Scheitel der Spirale. Man erhält für $r = 0$:

$$\varrho_{\min} = \frac{a}{2},$$

von da an nimmt die Krümmung allmählich ab, bis $\lim \varrho = \infty$ wird.

183. Krümmung von Flächen. Nach [149] ist die eben beginnende Abweichung einer Kurve von der Tangente unendlich klein von der zweiten Ordnung und (in der Richtung der y-Achse gemessen) halb so groß, wie das zweite Differentiale von y, also, wenn $d^2x = 0$ gesetzt wird:

$$= \tfrac{1}{2}\, d^2y = \tfrac{1}{2}\, y''(dx)^2. \tag{1}$$

Ganz ebenso folgt die eben beginnende Abweichung einer Fläche von

der Tangentialebene als unendlich klein von der zweiten Ordnung und (in der Richtung der z-Achse gemessen) halb so groß, wie das zweite totale Differential von z, also, wenn $d^2x = d^2y = 0$ gesetzt wird, nach [168 5a]:

$$= \frac{1}{2} d^2 z = \frac{r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2}{2}. \tag{2}$$

Von diesem Ausdruck wird also hauptsächlich die Art und Weise abhängen, wie sich die Fläche in dem betreffenden Punkte krümmt, wobei berücksichtigt werden muß, daß zwar dx und dy beide unendlich klein, sonst aber beliebig, keineswegs aber in irgendeinem Verhältnis der Abhängigkeit vorausgesetzt werden. Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall: $rt - s^2 > 0$. Die Fläche beginnt von der Tangentialebene nach allen durch das beliebige Verhältnis $dy : dx$ bestimmten Richtungen nach derselben Seite abzuweichen, da d^2z nach [73] sein Vorzeichen nicht wechseln kann. Sie ist in dem betreffenden Punkte positiv gekrümmt, wie Gauß sagt.

Beispiel. Das dreiachsige Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Die Differentiation ergibt:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = c\,\frac{-2\frac{x}{a^2}}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}, \qquad q = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z},$$

$$r = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{c^2}{a^2 z} + \frac{c^2 p x}{a^2 z^2} = -\frac{c^4}{a^2 z^3}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3},$$

$$t = \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{c^4}{b^2 z^3}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$rt - s^2 = +\frac{c^8}{a^2 b^2 z^6}\left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right]$$

$$= \frac{c^6}{a^2 b^2 z^4}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = +\frac{c^6}{a^2 b^2 z^4}.$$

Der Ausdruck $rt - s^2$ ist also für jeden Punkt des Ellipsoids positiv. In der Tat befindet sich ja die ganze Fläche immer nur auf einer Seite der Tangentialebene.

Zweiter Fall: $rt - s^2 < 0$. Die Fläche kann je nach dem Wert des Verhältnisses $dy : dx$ nach der einen und nach der andern Seite von der Tangentialebene abweichen. Sie ist in dem betreffenden

Punkte nach Gauß negativ, oder auch, wie man sagt, sattelförmig oder hyperbolisch gekrümmt. Im besondern hat die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\,d^2z = \frac{r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2}{2} = 0$$

zwei Wurzeln für das Verhältnis $dy : dx$, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-s \pm \sqrt{-(rt - s^2)}}{t}.$$

Sie bestimmen die beiden Richtungen der Tangentialebene, in denen der Übergang der Fläche von einer Seite zur andern erfolgt. (Sogenannte asymptotische Richtungen.)

Beispiel. Das einschalige Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Die Rechnungen entsprechen vollkommen denjenigen im vorigen Beispiel. Man erhält:

$$rt - s^2 = -\frac{c^6}{a^2b^2z^4}.$$

Der Ausdruck $rt - s^2$ ist also für jeden Punkt der Fläche negativ. Sie ist ja auch augenscheinlich überall wie ein Sattel gekrümmt. (Zur Erleichterung der Anschauung nehme man etwa $a = b$ an, so daß die Fläche durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre imaginäre Achse entstehen würde.)

Dritter Fall: $rt - s^2 = 0$. Die Fläche kann zwar nur nach einer Seite von der Tangentialebene abweichen, aber bleibt längs einer Richtung an ihr haften (soweit die Glieder zweiter Ordnung in Betracht kommen). Die beiden asymptotischen Richtungen fallen zusammen. Das Krümmungsmaß von Gauß verschwindet.

Beispiel. Der elliptische Kegel:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Die Rechnungen genau wie vorhin. Man erhält für jeden Wert von x und y:

$$rt - s^2 = 0.$$

In der Tat berührt jede Tangentialebene den Kegel nicht nur in einem Punkt, sondern längs einer ganzen Kegelkante.

Selbstverständlich kann bei einer Fläche auch die Krümmungsart wechseln, in welchem Falle die Gebiete mit positiver Krümmung von den Gebieten mit negativer Krümmung im allgemeinen durch Linien getrennt sein werden, in denen das Krümmungsmaß von Gauß verschwindet. Man nehme z. B. an, der Kreis $ABCD$ drehe sich um die Achse ll. Dann ist der innere durch Drehung des Halbkreises

ABC entstehende Teil des Ringes augenscheinlich sattelförmig oder negativ gekrümmt. Der äußere Teil des Ringes aber hat positive Krümmung. Dazwischen befinden sich die beiden Grenzkreise, welche von den Punkten A und C beschrieben werden. In jedem Punkt dieser Grenzkreise verschwindet das Krümmungsmaß von Gauß.

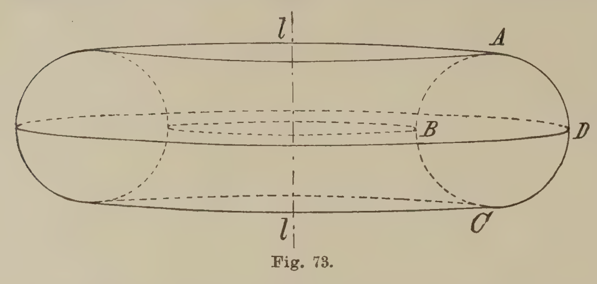


Fig. 73.

184. Was eben über die Krümmung der Flächen vorgebracht worden ist, soll nur eine allererste Einleitung sein, der nun die eigentliche ausführliche Theorie folgen müßte und auch folgen würde, wenn dieses Buch ein Lehrbuch über krumme Oberflächen wäre. Es seien nur einige Hauptgesichtspunkte angeführt.

Sehr erfolgreich hat sich die Verbindung der Theorie der Krümmung der Flächen mit der Theorie der Krümmung ebener Kurven erwiesen, welche auf der Stelle gegeben ist, wenn man die Fläche durch Ebenen beliebig geschnitten denkt. Im besondern kann man sich alle durch einen und denselben Punkt P der Fläche gehenden ebenen Schnitte denken und die Stärke ihrer Krümmung untersuchen.

Zunächst werde angenommen, daß die Ebene durch die Normale der Fläche P gehe, also senkrecht zur Tangentialebene stehe (Normalschnitt). Sie kann sich dann noch beliebig um die Normale drehen, sie kann, geodätisch gesprochen, die Tangentialebene in den verschiedensten Azimutrichtungen schneiden und so entsteht als erste Aufgabe die Untersuchung der Krümmung zunächst dieser Normalschnitte.

Bei einer Kugel ist die Sachlage äußerst einfach. Hier haben alle Normalschnitte in allen Punkten und für jeden Punkt in allen Azimuten dieselbe Krümmung, denn sie sind die größten Kreise der Kugel. Bei einer beliebigen, stetig gekrümmten Fläche aber sind sogar die Krümmungsradien der Normalschnitte für denselben Punkt in verschiedenen Azimuten sehr verschieden. Die Theorie von Euler weist zwei zueinander senkrechte Hauptnormalschnitte nach, für welche die Krümmungsradien die größten bzw. kleinsten Werte erhalten, aus denen auf sehr einfache Weise die Krümmungsradien aller andern Normalschnitte folgen.

Die Krümmung eines schiefen Schnittes, d. h. eines Schnittes, dessen Ebene nicht durch die Normale geht oder zur Tangentialebene schief steht, wird auf die Krümmung des die Tangentialebene in der-

selben Geraden schneidenden Normalschnittes zurückgeführt durch den Satz von Meunier, der für die Kugel sofort einleuchtet, daß nämlich der Krümmungsradius des schiefen Schnittes mit der Projektion des Krümmungsradius des Normalschnittes übereinstimmt.

Ganz anders als durch diese Untersuchung der ebenen Schnitte ist Gauß zu seinem in der vorigen Nummer angedeuteten Krümmungsmaß gelangt, nämlich durch seine Projektion der Fläche auf die Kugel mit der Einheit als Radius, welche Projektion die Eigenschaft besitzt, daß einer Normalen der Fläche der parallele Radius der Kugel, also die parallele Normale der Kugel entspricht. Das Verhältnis eines Oberflächendifferentials der Fläche zu seiner Projektion bestimmt das Krümmungsmaß.

An diese Theorie knüpfen sich außerordentlich viele andere an, so die Lehre von den Krümmungslinien, von den geodätischen (kürzesten) Linien, von den asymptotischen Linien auf einer Fläche, die Lehre von der Deformation einer Fläche mit und ohne Verzerrung der kleinsten Teile (im letzteren Falle auch Abwicklung genannt, wie sich z. B. eine Zylinderfläche aber nicht eine Kugelfläche auf einer Ebene abrollen läßt). Die höhere und höchste Geodäsie, welche die Erde durch ein „Geoid“ ersetzt, macht von diesen wunderschönen Untersuchungen ausgiebigsten Gebrauch, desgleichen die heute so vorzüglich entwickelte Lehre von der Abbildung.

Zur allgemeinen Theorie der Krümmung gehört auch noch die Untersuchung doppelt gekrümmter Kurven oder der eigentlichen Raumkurven, worunter Kurven verstanden werden, die nicht in einer Ebene liegen. Als naheliegendes Beispiel diene die Schraubenlinie, welche in der Tat in zweifacher Weise als krumme bezeichnet werden könnte, insofern sie sich nicht allein krümmt, wie eine ebene Kurve, sondern auch noch sich windet, wenn man dies als eine hinzutretende Art von Krümmung ansehen will. Man hat auch diese Verhältnisse genau untersucht und in ein für allemal abgeleiteten Differentialformeln ausgedrückt.

So geht der Analytiker, versehen mit Zahl und Formel in seiner Weise fest und sicher durch die unendliche Mannigfaltigkeit der Formen und Gestalten der Körperwelt. Aber noch mehr. Sogar Raumformen, die der Wirklichkeit nicht entsprechen (d. h. erstens mehrdimensionale oder zweitens sog. „nichteuklidische“ Raumformen) unterwirft er seinem abstrakten Krümmungsmaß, das ihm die Differentialrechnung an die Hand gibt.

Übungen zu § 21.

1. Die Formeln für den Krümmungskreis sind für das folium Cartesianum zu ermitteln:

a) Durch die Gleichung $x^3 + y^3 - axy = 0$.

b) Nach Einführung von Polarkoordinaten.

Probe für den Scheitel $S\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

2. Krümmung der Kettenlinie mit der Gleichung:

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = h \operatorname{Cof} \frac{x}{h}$$

ist zu untersuchen.

3. Die Parabel $y = a + bx + cx^2$ ist so zu bestimmen, daß sie durch $P(+1, -3)$ geht, daß in diesem Punkte der Richtungswinkel der Tangente $= +45^0$ und der Krümmungsradius $= 6\sqrt{2}$ (Krümmung nach oben $(+y)$). Welche Werte haben a, b, c?

4. Wo liegt oder wo liegen die Wendepunkte der Kurve mit der Gleichung:

$$y^2 - x^3 = 1?$$

§ 22. Die Regula falsi. Die Newtonsche Näherungsmethode. Limes-Rechnungen, an unbestimmte Formen anknüpfend. Der Taylorsche Satz für mehrere ursprüngliche Veränderliche.

185. Dieser Paragraph soll zu den früheren Anwendungen des Taylorschen Satzes noch einige andere bringen, die auch von großer Wichtigkeit sind, wenn gleich die wichtigsten auf § 25 aufgespart sind. Es sei:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

eine zur Lösung vorgelegte Gleichung. Man setze allgemein:

$$y = f(x), \tag{2}$$

so hängen die Wurzeln von dem Verlauf der Funktion $f(x)$ ab. Explizite Ausdrücke existieren nur in besonders einfachen Fällen, z. B. wenn $f(x)$ eine ganze Funktion ersten, zweiten, dritten oder vierten Grades von x ist. Es soll auch hier gar nicht nach ihnen, sondern nach Annäherungen gefragt werden, die man beliebig weit treiben kann.

Zunächst wird man versuchen, einen Spielraum zu ermitteln, in dem alle (reellen) Wurzeln der Gleichung (1) liegen. Oft wird er leicht genug gefunden; er sei bekannt. Alsdann sind die Wurzeln, falls deren mehrere vorhanden sind, zu „trennen“, etwa unter Anwendung der folgenden beiden Kriterien:

I. Haben für $x = a$ und $x = b$ die beiden Werte $y_a = f(a)$ und $y_b = f(b)$ gleiche Vorzeichen und ist zwischen $x = a$ und $x = b$ die Ableitung $y' = f'(x)$ entweder nur positiv oder nur negativ, so kann zwischen a und b keine Wurzel der Gleichung liegen. Denn liegt x zwischen a und b, so kann nach der zweiten Voraussetzung $f(x)$ nur zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegen. Und da diese beiden nach der ersten Voraussetzung gleiche Vorzeichen haben, so kann also $f(x)$ nicht verschwinden.

II. Haben für $x = a$ und $x = b$ die beiden Werte $y_a = f(a)$ und $y_b = f(b)$ entgegengesetzte Vorzeichen und ist zwischen $x = a$ und $x = b$ die Ableitung $y' = f'(x)$ nur positiv oder nur negativ, so liegt zwischen a und b eine, aber auch nur eine Wurzel. Denn aus der zweiten Voraussetzung folgt, daß $y = f(x)$ in dem Spielraum von a bis b nur wachsen oder nur abnehmen, d. h. jeden Wert zwischen y_a und y_b also auch den Wert 0 einmal und nur einmal annehmen kann.

Ist es gelungen, mit Hilfe dieser beiden Kriterien (oder anderer, die ebenso einfach beweisbar sind), den vorigen Gesamtspielraum in Spielräume zu zerlegen, in deren jedem entweder nur eine oder gar keine Wurzel liegt, so sind die Wurzeln getrennt. Ob diese Vorarbeit leicht oder schwer sei, hängt ganz von der Funktion $f(x)$ ab; möglich ist sie immer, es sei denn, daß mehrfache Wurzeln existieren, die freilich nicht mehr getrennt werden können. Von diesem Ausnahmefall sei daher zunächst abgesehen.

Nach vollbrachter Trennung ist also für jede Wurzel ein Spielraum etwa von $x = a$ bis $x = b$ bekannt, in dem sie liegt und in dem y' sein Vorzeichen nicht mehr wechselt. Man kann ihn durch gewöhnliches Probieren beliebig verkleinern. Es werde etwa das arithmetische Mittel c von a und b in (2) eingesetzt. Ist $y_c = f(c) = 0$, um so besser. Denn dann ist c die gesuchte Wurzel. Anderenfalls hat y_c entweder dasselbe Vorzeichen wie y_a oder wie y_b. Dann liegt die Wurzel entweder zwischen c und b oder zwischen c und a. In beiden Fällen ist der Spielraum halbiert und durch beliebige Fortsetzung kann er beliebig verkleinert, d. h. die Wurzel auf eine gegebene Anzahl von Dezimalen bestimmt werden.

Doch gibt es mancherlei Methoden, eine solche Annäherung sehr erheblich abzukürzen. Die gebräuchlichsten sind die Regula falsi und die Newtonsche Näherungsmethode.

Regula falsi. Es liege, wie vorausgesetzt, nur eine Wurzel x zwischen a und b und $y' = f'(x)$ wechsele zwischen a und b sein Vorzeichen nicht. Nach Taylor ist bei der Beschränkung auf zwei Glieder

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a + \lambda(x-a))$$

und:

$$f(x) = f(b) + (x-b)f'(b + \lambda_1(x-b)),$$

also, wenn x die Wurzel sein soll:

$$0 = y_a + (x-a)f'(a+\lambda(x-a)); \quad 0 = y_b + (x-b)f'(b+\lambda_1(x-b)) \tag{3}$$

und hieraus:

$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{y_a}{y_b} \cdot \frac{f'(b+\lambda_1(x-b))}{f'(a+\lambda(x-a))}. \tag{4}$$

Es sei der Spielraum schon so klein, daß $f'(x)$ in seinen Grenzen sich nur noch wenig ändert, so daß der zweite Bruch rechts ungefähr $= 1$ ist. Setzt man ihn $= 1$ und bezeichnet den entsprechenden Annäherungswert von x mit x', so folgt:

$$\frac{x'-a}{x'-b} = \frac{y_a}{y_b}. \tag{5}$$

Diese Formel drückt die Regula falsi aus. Man wähle x' zwischen a und b so, daß die (absoluten) Unterschiede von a und b sich verhalten wie die „Fehler" y_a und y_b. Aus (5) folgt:

$$c = a + (a-b) \cdot \frac{y_a}{y_b - y_a} = b + (a-b) \cdot \frac{y_b}{y_b - y_a}. \tag{6}$$

Ist x' noch nicht genau genug, so bilde man aus x' und b oder x' und a in derselben Weise einen zweiten, dann einen dritten usw. Annäherungswert. Offenbar kommt die Regula falsi geometrisch darauf hinaus, das Kurvenstück $P_a P_b$ durch die Sehne $P_a P_b$ zu ersetzen (Fig. 74). Auch sei bemerkt, daß sie zuweilen auch dann gut verwendbar ist, wenn y_a und y_b gleiche Vorzeichen haben. Selbstverständlich liegt dann x' nicht zwischen a und b.

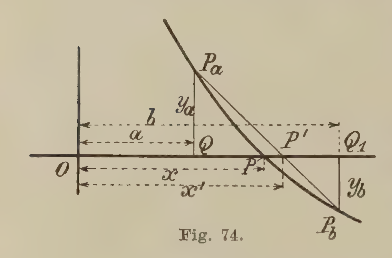


Fig. 74.

186. Die Newtonsche Näherungsmethode setzt im Gegensatz zur Regula falsi nur einen Annäherungswert a voraus. Man nimmt dann nur die erste Gleichung [185 3] und berechnet:

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a+\lambda(x-a))}.$$

Der Nenner ist nicht genau bekannt. Wenn aber $f'(x)$ zwischen a und x sich nur noch wenig ändert, so ist der Fehler nicht groß, wenn $\lambda = 0$ gesetzt wird. So entsteht die Newtonsche Korrektion von a, nämlich:

$$\boldsymbol{h = -\frac{f(a)}{f'(a)} = -\frac{y_a}{y_a'}}, \tag{1}$$

welche einen zweiten (und besseren) Annäherungswert $a_1 = a + h$ ergibt. Hierzu sei bemerkt:

I. Geometrisch kann diese Newtonsche Korrektion auf die Be-

stimmung des Schnittpunktes der Tangente in P_a (statt der Kurve) mit der x-Achse zurückgeführt werden (Fig. 75). Denn man erhält:

$$QQ_1 = QP_a \operatorname{cotg}(180^0 - \tau) = -\frac{y_a}{\operatorname{tg}\tau} = -\frac{y_a}{y'_a}.$$

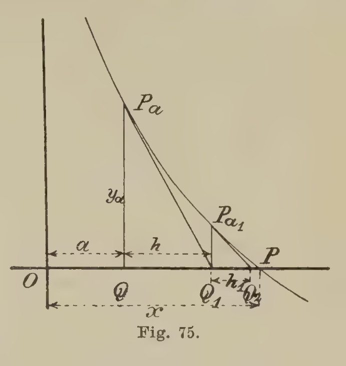


Fig. 75.

II. Um die Genauigkeit von h abzuschätzen, berechne man $f(a_1) = f(a+h)$ nach Taylor, gehe aber ein Glied weiter, also:

$$f(a_1) = f(a+h)$$
$$= f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a + \lambda h),$$

oder nach (1) vereinfacht:

$$f(a+h) = \frac{h^2}{2!}f''(a+\lambda h). \qquad (2)$$

Es sei x der mathematisch genaue Wert der Wurzel. Man setze $x = (a+h) + l$, also nach Taylor, aber wieder in der ursprünglichen Form:

$$0 = f(x) = f(a+h+l) = f(a+h) + \frac{l}{1!}f'(a+h+\lambda_1 l),$$

also da $f(x) = 0$ ist:

$$l = -\frac{f(a+h)}{f'(a+h+\lambda_1 l)} = -\frac{h^2}{2!}\cdot\frac{f''(a+\lambda h)}{f'(a+h+\lambda_1 l)}, \qquad (3)$$

oder, wenn auch die zweite Ableitung sich in dem fraglichen Spielraum nur noch wenig ändert, mit hinreichender Genauigkeit:

$$l = -\frac{h^2}{2!}\frac{f''(a)}{f'(a)}. \qquad (3a)$$

III. Man wird diese Formel (3a) meist nur benutzen, um zu überschlagen, bis auf die wievielte Dezimale (1) richtig sein wird, was aber auch natürlich anders möglich ist, wie das folgende Ziffernbeispiel zeigt. Sollte die erzielte Genauigkeit noch nicht ausreichen, so berechne man zu $a_1 = a + h$ abermals die Newtonsche Korrektion nach (1), also $h_1 = -f(a_1) : f'(a_1)$ und bestimme so die dritte Annäherung $a_2 = a_1 + h_1$. So fahre man fort, so weit man will, bzw. bis x auf die vorgeschriebene Anzahl von Dezimalen richtig ist.

IV. Wie schnell das Newtonsche Verfahren konvergiert, zeigt die Figur 75 anschaulich und Formel (2) bis (3a) analytisch. Es kommt darauf an, ob a dem wahren Wurzelwert schon nahe genug ist, also zunächst nach (1), auf die Kleinheit des „Fehlers" y_a. Sodann aber auch auf den Wert der ersten und zweiten Ableitung sowohl an der Stelle a selbst, als auch nach (2) in dem ganzen noch möglichen Spielraum für die nächstfolgenden Annäherungen. Es sei A der absolut größte Wert von y'', B der absolut kleinste Wert von y' in diesem

Spielraum, so ergibt (3), wenn $A:B = C$ und $h \cdot C:2 = D$ gesetzt wird:

$$|l| < |hD|.$$

Für die nächste Korrektion h_1 und ihren Fehler l_1 folgt nach (1):

$$h_1 = -\frac{y_{a_1}}{y'_{a_1}},$$

und nach (2) $|h_1| < |hD|$, und nach (3)

$$|l_1| < \frac{h_1^2}{2} \cdot C < \frac{h^2 D^2 C}{2} < |hD^3| \quad \text{oder} \quad l_1 < h_1 D^2,$$

d. h. D kann durch D^2, darauf durch D^4, darauf durch D^8 usw. ersetzt werden. Ist also D ein echter Bruch, so konvergiert das Newtonsche Verfahren ganz sicher und äußerst schnell, womit übrigens ein sehr gutes Kriterium gewonnen ist, ob der Anfangswert a der Wurzel nahe genug liegt, um als erster Annäherungswert brauchbar zu sein.

V. Wenn die betreffende Wurzel eine mehrfache Wurzel ist, also zugleich $y = 0$ und $y' = 0$ wird, oder geometrisch ausgedrückt, wenn die Kurve die x-Achse berührt, dann allerdings könnte die Newtonsche Korrektion möglicherweise versagen, weil alsdann sowohl der Zähler y_a, als auch der Nenner y_a' sich der 0 unbegrenzt annähert. Wie ein genaueres Eingehen zeigen würde, bleibt das Newtonsche Verfahren aber selbst in diesem Falle konvergent, aber immerhin wird die Konvergenz erheblich langsamer. Es ist daher angezeigt, mehrfache Wurzeln anders zu behandeln, etwa so wie in [161] an algebraischen Gleichungen erläutert worden war.

VI. Überhaupt ist bei algebraischen Gleichungen die Kunst der Trennung ihrer Wurzeln und deren Berechnung durch Annäherungsverfahren zu hoher Vollendung gebracht worden, wie die Lehrbücher der Algebra zeigen. Doch auch bei ihnen führt wie bei transzendenten Gleichungen das Newtonsche Verfahren meist am schnellsten zum Ziele, selbst dann, wenn die Gleichung nur vom dritten oder vierten Grade ist, also ihre Auflösung durch geschlossene Wurzelausdrücke erfolgen könnte.

187. Beispiel zur Newtonschen Korrektion.[1])

$$f(x) \equiv x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Da die Gleichung vom dritten Grade ist, kann sie höchstens drei reelle Wurzeln haben. Die erste Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 2$ verschwindet zweimal, nämlich für $x_0 = +\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, bleibt positiv zwischen $+\infty$ und x_0, bleibt negativ zwischen x_0 und x_1, und

1) Aus Serret, Algèbre supérieur.

bleibt positiv zwischen x_1 und $-\infty$. Also könnte in jedem dieser drei Spielräume eine, aber auch nur eine Wurzel liegen. Betrachtet man aber die Werte:

$$f(+\infty) = +\infty, \quad f(x_0) = -\tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}} - 5, \quad f(x_1) = +\tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}} - 5,$$
$$f(-\infty) = -\infty,$$

von denen der erste positiv, die andern alle negativ sind, so bleibt nur die erste Möglichkeit. Also: Die Gleichung hat nur eine einzige reelle Wurzel. Sie ist positiv und $> \sqrt{\tfrac{2}{3}}$. Man probiere also zunächst mit ganzen Zahlen 0, + 1, + 2, + 3, ...

$$f(0) = -5, \quad f(1) = -6, \quad f(2) = -1, \quad f(3) = +16, \ldots$$

Weiter mit ganzen Zahlen zu probieren wäre überflüssig, denn $f(2)$ ist negativ und $f(3)$ ist positiv, d. h. die gesuchte Wurzel liegt zwischen + 2 und + 3, und zwar nach der Regula falsi wahrscheinlich sehr viel näher an + 2. Also probiere man mit + 2,0; + 2,1; + 2,2; ... Es folgt:

$$f(2{,}0) = -1, \quad f(2{,}1) = +0{,}061; \ldots$$

Da die beiden Werte entgegengesetzte Vorzeichen haben, liegt x zwischen 2,0 und 2,1. Da $f(2{,}1)$ schon recht klein ist, darf 2,1 wohl als erster Annäherungswert von x genommen werden für die Newtonsche Methode. Man erhält:

$$h = -\frac{f(2{,}1)}{f'(2{,}1)} = -\frac{0{,}061}{11{,}23} = -0{,}0054\ldots$$

Um zu beurteilen, bis auf wieviel Dezimalen h etwa richtig sein könnte, beachte man, daß $f'(x)$ in dem Spielraum von $x = 2$ bis $x = 2{,}1$ nur wächst. Der richtige Nenner liegt also unzweifelhaft zwischen $f'(2{,}1) = 11{,}23$ und $f'(2{,}0) = 10{,}00$, da letzterem der Wert $-0{,}0061$ entsprechen würde, so setze man, um ganz sicher zu gehen, $h = -0{,}005$, was den zweiten Annäherungswert $2{,}1 - 0{,}005 = 2{,}095$ ergibt. Man berechne nun abermals die Newtonsche Korrektion:

$$h_1 = -\frac{f(2{,}095)}{f'(2{,}095)} = -\frac{0{,}005007375}{11{,}167075} = -0{,}00448\ldots$$

Die letzte Stelle ist unsicher, wie auf die eben beschriebene Weise erkannt werden kann. Es sei daher $h_1 = -0{,}0044$, also der dritte Annäherungswert $2{,}095 - 0{,}0044 = 2{,}09456$. Dies gibt zum drittenmal:

$$h_2 = -\frac{f(2{,}09456)}{f'(2{,}09456)} = -\frac{0{,}0001150687\ldots}{11{,}161545\ldots} = -0{,}000008519.$$

Die angegebenen Stellen sind sämtlich richtig, daher bis auf neun Stellen hinter dem Komma genau (ohne Logarithmen gerechnet)

$$\boldsymbol{x = 2{,}094\,551\,481.}$$

188. Über Limes-Rechnungen mittels des Taylorschen Satzes. In welcher Weise unbestimmte Formen die Berechnung eines limes erschweren können, ist in § 10 an einfachen Beispielen aufgezeigt worden. Aber noch mehr. Jeder Differentialquotient $dy : dx$ würde die unbestimmte Form $0 : 0$ annehmen, wenn man für Zähler und Nenner unmittelbar ihre Grenzwerte einsetzte. Genug, unbestimmte Formen, welche den Weg zum limes versperren, müssen entfernt, umgangen oder sonst wie unschädlich gemacht werden.

Gesetzt eine Funktion $f(x)$ sei als Quotient zweier Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \tag{1}$$

gegeben und es zeige sich, daß $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ beide für einen und denselben Wert von x, etwa für $x = a$ verschwinden:

$$\varphi(a) = 0, \quad \psi(a) = 0, \tag{2}$$

so wird:

$$f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{0}{0}, \tag{3}$$

also völlig unbestimmt. Nichts destoweniger kann:

$$\lim_{(x=a)} f(x) \tag{4}$$

durchaus bestimmt sein und es sei die Aufgabe gestellt, seinen Wert zu ermitteln. Man setze zunächst:

$$x = a + h, \quad \text{also} \quad f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}$$

in der Absicht h unendlich klein werden zu lassen und wende auf Zähler und Nenner den Taylorschen Satz an, zunächst in seiner allereinfachsten Form. Es folgt nach (2), wie klein auch h sein mag, wenn nur nicht unmittelbar $h = 0$ gesetzt wird:

$$f(x) = \frac{h \cdot \varphi'(a + \lambda h)}{h \cdot \psi'(a + \lambda_1 h)} = \frac{\varphi'(a + \lambda h)}{\psi'(a + \lambda_1 h)}. \tag{5}$$

Die Bedingung $\lim x = a$ hat zur Folge $\lim h = 0$, also da $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ stetige Funktionen sind:

$$\lim_{(x=a)} f(x) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}_{(x=a)},$$

womit die limes-Rechnung erledigt ist.

Erstes Beispiel (vgl. [88 3]):

$$\lim_{(x=0)} \frac{\sin x}{x} \left(= \frac{0}{0}\right) = \frac{\cos x}{1}_{(x=0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Zweites Beispiel:

$$\lim_{(x=1)} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\left(=\frac{0}{0}\right)=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}_{(x=1)}=-\frac{1}{2}.$$

Drittes Beispiel. Die Oberfläche des abgeplatteten Umdrehungsellipsoids ist:

$$O=2\pi a^2\left(1+(1-\varepsilon^2)\frac{\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}{2\varepsilon}\right).$$

Sie soll für den einfachsten Fall geprüft werden, nämlich für die Kugel. Man setze also $\varepsilon=0$ und erhält:

$$O=2\pi a^2\left(1+1\frac{\ln 1}{0}\right)=2\pi a^2\left(1+\frac{0}{0}\right),$$

also (vorläufig) unbestimmt. Man wende daher auf den Bruch die Formel (5) an, so folgt:

$$\lim_{(\varepsilon=0)}\frac{\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}{2\varepsilon}=\lim_{(\varepsilon=0)}\frac{\frac{2}{1-\varepsilon^2}}{2}=1,$$

folglich

$$O=2\pi a^2(1+1\cdot 1)=4\pi a^2,$$

was bekanntlich seine Richtigkeit hat.

Übrigens kommt es öfter vor, daß man bei der Prüfung einer allgemeineren Formel an einem besonderen und anderweitig bekannten Fall auf unbestimmte Formen stößt. Siehe Beispiel (3) in [189].

189. Sollte aber nicht allein

$$\varphi(a)=0,\qquad \psi(a)=0, \tag{1}$$

sondern auch

$$\varphi'(a)=0,\qquad \psi'(a)=0 \tag{2}$$

sein, so gehe man im Taylorschen Lehrsatz um ein Glied weiter und schreibe:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi(a)+\frac{h}{1!}\varphi'(a)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(a+\lambda h)}{\psi(a)+\frac{h}{1!}\psi'(a)+\frac{h^2}{2!}\psi''(a+\lambda_1 h)},$$

also:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi''(a+\lambda h)}{\psi''(a+\lambda_1 h)},$$

daher:

$$\lim_{(x=a)} f(x)=\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}=\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}_{(x=a)}. \tag{3}$$

Sollte abermals $\varphi''(a) = 0$, $\psi''(a) = 0$ werden, so gehe man noch um ein Glied weiter. Man erhält dann:

$$\lim_{(x=a)} f(x) = \frac{\varphi'''(a)}{\psi'''(a)} = \frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)}_{(x=a)}$$

usw. usw. So fahre man fort, bis die unbestimmte Form $0:0$ aus dem Weg geräumt ist, was ja im allgemeinen nach einer endlichen Anzahl von Differentiationen der Fall sein wird.

Erstes Beispiel (vgl. [88 4]):

$$\lim_{(x=0)} \frac{1-\cos x}{x^2} \left(= \frac{0}{0}\right) = \frac{\sin x}{2x}_{(x=0)} \left(= \frac{0}{0}\right) = \frac{\cos x}{2}_{(x=0)} = \frac{1}{2}.$$

Zweites Beispiel:

$$\lim_{(x=0)} \frac{\sin^3 x}{2x - \sin 2x} \left(= \frac{0}{0}\right) = \frac{3 \sin^2 x \cos x}{2 - 2\cos 2x}_{(x=0)} \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \frac{-3\sin^3 x + 6 \sin x \cos^2 x}{4 \sin 2x}_{(x=0)} \left(= \frac{0}{0}\right) = \frac{-21 \sin^2 x \cos x + 6 \cos^3 x}{8 \cos 2x}_{(x=0)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Drittes Beispiel. Unter Annahme des Newtonschen Luftwiderstandsgesetzes:

$$w = kv^2$$

lautet die Formel für die Falltiefe (ohne Anfangsgeschwindigkeit), wenn zur Vereinfachung $k = g\lambda^2$ gesetzt wird:

$$s = \frac{\ln \dfrac{e^{tg\lambda} + e^{-tg\lambda}}{2}}{g\lambda^2} = \frac{\ln (\mathfrak{Cof}\,(\lambda g t))}{g\lambda^2}.$$

Sie soll auf ihre Richtigkeit erprobt werden durch Umwandlung in die Formel für den freien Fall ohne Luftwiderstand. Man setze also $\lambda = 0$ und erhält (λ ist hier das x von vorhin!):

$$s = \frac{\ln (\mathfrak{Cof}\,0)}{0^2} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\dfrac{\mathfrak{Sin}\,(\lambda g t)}{\mathfrak{Cof}\,(\lambda g t)} \cdot gt}{2g\lambda} = \frac{\mathfrak{Tang}\,(\lambda g t)\, t}{2\lambda}_{(\lambda=0)}$$

$$\left(= \frac{0}{0}\right) = \frac{\dfrac{1}{\mathfrak{Cof}^2\,(\lambda g t)} \cdot g t^2}{2}_{(\lambda=0)} = \frac{g t^2}{2}.$$

Die Probe stimmt, denn sie hat die allbekannte Fallformel von Galilei ergeben.

190. Sollten andere unbestimmte Formen die Limesrechnung erschweren, etwa:

$$0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0,$$

so führe man sie erst auf die unbestimmte Form $0:0$ zurück und verfahre dann wie vorhin:

Erstes Beispiel:

$$\lim_{(n=\infty)} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) (= \infty\,(1-1) = \infty \cdot 0).$$

Man setze $n = 1:\delta$, also $\lim \delta = 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = x^{\delta}$, so wird:

$$\lim_{(n=\infty)} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) = \lim_{(\delta=0)} \frac{x^{\delta}-1}{\delta} = \left(\frac{x^0-1}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

$$= \frac{x^{\delta}\ln x}{1}_{(\delta=0)} = \ln x, \quad \text{vgl. [111].}$$

Zweites Beispiel:

$$\lim_{(x=0)} \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{(x=0)} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}\left(=\frac{0}{0}\right) = \frac{\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2}{\frac{1}{\cos^2 x}}_{(x=0)} = 2.$$

Drittes Beispiel:

$$\lim_{(x=\infty)} \left(x - \sqrt{x^2+3x-7}\right) (= \infty - \infty).$$

Man setze $x = \frac{1}{z}$, so wird:

$$\lim_{(x=\infty)} \left(x - \sqrt{x^2+3x-7}\right) = \lim_{(z=0)} \left(\frac{1}{z} - \sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z}-7}\right)$$

$$= \lim_{(z=0)} \frac{1-\sqrt{1+3z-7z^2}}{z}\left(=\frac{0}{0}\right) = \frac{-\frac{3-14z}{2\sqrt{1+3z-7z^2}}}{1}_{(z=0)} = -\frac{3}{2}.$$

Viertes Beispiel:

$$\lim_{(n=\infty)} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n (= 1^{\infty}).$$

Man nehme den Logarithmus und setze darauf $n = 1:\delta$, so wird, da der Logarithmus eine stetige Funktion ist:

$$\ln\left(\lim_{(n=\infty)}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = \lim_{(n=\infty)} \ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] = \lim_{(n=\infty)}\left[n\cdot\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right] (\infty\cdot 0)$$

$$= \lim_{(\delta=0)} \frac{\ln(1+x\delta)}{\delta}\left(=\frac{0}{0}\right) = \frac{\frac{x}{1+x\delta}}{1}_{(\delta=0)} = x.$$

Daher umgekehrt

$$\lim_{(n=\infty)} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (\text{vgl. § 12}).$$

191. Noch einige ergänzende Bemerkungen zu [189] und [190]:

Erstens. Zuweilen kann man das Verfahren erheblich abkürzen, wenn im Zähler und Nenner derselbe unendlich kleine Faktor ge-

hoben wird. So hätte im zweiten Beispiel [189] viel einfacher so gerechnet werden können:

$$\lim_{(x=0)} \frac{\sin^3 x}{2x - \sin 2x} = \frac{3\sin^2 x \cos x}{2 - 2\cos 2x} = \frac{3}{4}\,\frac{\sin^2 x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{3}{4} \underset{(x=0)}{\cos x} = \frac{3}{4}.$$

Zweitens. Daß die Limesrechnungen auch auf andere Weise ausführbar sind, zeigen einige Beispiele, welche schon in früheren Stellen erledigt worden sind. Es kommt ja nur darauf an, die unbestimmte Form aus dem Wege zu räumen; ob dies mit oder ohne den Taylorschen Lehrsatz geschieht, ist an sich gleichgültig. Man kann auch Reihenentwicklungen anwenden und dann heben, z. B. nach [209 2]:

$$\frac{(\sin x)^3}{2x - \sin 2x} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)^3}{2x - \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \frac{x^3\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^3}{x^3\left(\frac{2^3}{3!} - \frac{2^5 x^2}{5!} + \cdots\right)} \underset{(x=0)}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots}{\frac{2^3}{3!} - \frac{2^5 x^2}{5!} + \cdots} = \frac{3!}{2^3} = \frac{3}{4}.$$

Drittens. Zuweilen versagen die in [189] und [190] entwickelten Methoden, weil man durch sie die unbestimmte Form nie los wird. Der Limes muß dann anders bestimmt werden.

Erstes Beispiel:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Man setze $x = \frac{1}{z}$ und schreibe:

$$\lim_{x=\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{z=0} e^{\frac{1}{z}} \cdot z^n = \lim_{(z=0)} \frac{z^n}{e^{-\frac{1}{z}}} \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \frac{n \cdot z^{n-1}}{e^{-\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{z^2}} = \frac{n \cdot z^{n+1}}{e^{-\frac{1}{z}}} \left(= \frac{0}{0}\right) = \frac{n(n+1)z^n}{e^{-\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{z^2}} = \frac{n(n+1)z^{n+2}}{e^{-\frac{1}{z}}} \left(= \frac{0}{0}\right)$$

usw. Es ist klar, die Form $0 : 0$ wird man so nicht los!

So bleibt nur übrig, die Potenzreihe für e^x zu versuchen:

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots}{x^n}$$

$$= \left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{1!\,x^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!\,x}\right)$$

$$+ \frac{1}{n!} + \left(\frac{x}{(n+1)!} + \frac{x^2}{(n+2)!} + \cdots\right).$$

Die ersten n Glieder werden mit wachsendem x kleiner und kleiner. Das $n+1^{\text{te}}$ Glied ist konstant. Die dann folgenden Glieder enthalten x im Zähler und werden also mit wachsendem x größer und größer und zwar nicht allein absolut, sondern auch algebraisch. Daher:

$$\lim_{(x=\infty)} \frac{e^x}{x^n} = \infty. \tag{1}$$

Also: Die Exponentialfunktion wächst zuletzt rascher, als jede Potenz, mag deren Exponent n auch noch so groß sein. Die Exponentialfunktion wird von höherer Ordnung unendlich, als jede Größe, welche von endlicher Ordnung unendlich wird. Die Exponentialfunktion wird gleichsam unendlich groß von unendlich hoher Ordnung.

Aus (1) folgt, wenn man umkehrt und die Wurzel zieht:

$$\lim_{(x=\infty)} \frac{x}{\sqrt[n]{e^x}} = 0,$$

oder wenn $e^x = z$, $x = \ln z$ gesetzt und dann statt z wieder x geschrieben wird:

$$\lim_{(x=\infty)} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0, \tag{2}$$

d. h. der Logarithmus wird zwar mit dem Numerus zugleich unendlich, aber er wächst zuletzt doch langsamer, als jede Wurzel aus dem Numerus, mag der Wurzelexponent auch noch so groß sein. Es ist also ganz unmöglich, das Unendlichgroßwerden des Logarithmus mit dem Unendlichgroßwerden des Numerus zu vergleichen. „Logarithmisch" unendlich groß ist von niedrigerer Ordnung unendlich groß als jede endliche Ordnung.

Zweites Beispiel:

$$\lim y = \lim_{(x=0)} x^x = 0^0.$$

Man gehe zu den Logarithmen über:

$$\lim \ln y = \lim_{(x=0)} (x \ln x) = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot (-\infty).$$

Nach (2) ist für $n = 1$, wenn statt x gesetzt wird $1 : x$:

$$\lim_{(x=0)} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{(x=0)} (-(x \ln x)) = 0,$$

daher:

$$\lim \ln y = 0, \qquad \lim y = 1, \qquad \lim_{(x=0)} x^x = 1.$$

192. Der Taylorsche Lehrsatz für mehrere Veränderliche. Die Formeln [157] ergeben die Entwicklung von einer Funk-

tion einer Veränderlichen nach Potenzen von h unter dem Vorbehalt, daß man nur bis zu irgendeiner Potenz von h gehen und dann mit einem Restglied abbrechen will. Gleiches kann man unter Zugrundelegung einer Funktion von zwei Veränderlichen mit:

$$F(x+h, y+k) \tag{1}$$

versuchen. Wie lautet dann die Entwicklung nach Potenzen von h und k und wie der Rest?

(Selbstverständlich wird dabei vorausgesetzt, daß der Rest von höherer Ordnung unendlich klein werden soll, als die entwickelten Glieder im allgemeinen für unendlich kleine Werte von h und k sind. Denn sonst wäre ja die Entwicklung ganz beliebig, weil der Rest immer so gewählt werden könnte, daß beide Seiten der Gleichung übereinstimmen.) Es ist möglich, wie folgt, auf eine Funktion einer einzigen Veränderlichen zurückzukehren. Man setze etwa:

$$x_1 = x + \mu h, \qquad y_1 = y + \mu k$$

und betrachte $F(x+\mu h, y+\mu k)$ als eine Funktion der einen Veränderlichen μ, was durch die Gleichung:

$$f(\mu) \equiv F(x+\mu h, y+\mu k) \equiv F(x_1, y_1) \tag{2}$$

bezeichnet werden mag. Dann läßt sich auf $f(\mu)$ der Taylorsche Satz anwenden, indem man x durch 0 und h durch μ ersetzt, was ergibt:

$$f(\mu) = f(0+\mu) = f(0) + \frac{\mu}{1!} f'(0) + \frac{\mu^2}{2!} f''(0) + \cdots$$

$$+ \frac{\mu^p}{p!} f^p(0) + \frac{\mu^{p+1}}{(p+1)!} f^{p+1}(0+\lambda\mu). \tag{3}$$

Nun ist nach (2) $f_0 = F(x, y)$ und unter Anwendung der Formeln in [172]:

$$f'(\mu) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \mu} + \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial \mu} = h\frac{\partial F}{\partial x_1} + k\frac{\partial F}{\partial y_1},$$

da:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \mu} = \frac{\partial(x+\mu h)}{\partial \mu} = h; \quad \frac{\partial y_1}{\partial \mu} = \frac{\partial(y+\mu k)}{\partial \mu} = k$$

und für $\mu = 0$ nach (1) x_1 und y_1 mit x und y zusammenfallen:

$$f'(0) = h\frac{\partial F}{\partial x} + k\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Ferner unter abermaliger Anwendung von [172]:

$$f''(\mu) = \frac{\partial f'(\mu)}{\partial \mu} = h\frac{\partial \frac{\partial F}{\partial x_1}}{\partial \mu} + k\frac{\partial \frac{\partial F}{\partial y_1}}{\partial \mu}$$

$$= h\left(\frac{\partial^2 F}{(\partial x_1)^2} h + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} k\right) + k\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial x_1} h + \frac{\partial^2 F}{(\partial y_1)^2} k\right),$$

also für $\mu = 0$:

$$f''(0) = h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 F}{(\partial y)^2}$$

oder in der symbolischen Bezeichnung nach [168]:

$$f''(0) = \left(h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}\right)^2,$$

und ebenso:

$$f'''(0) = \left(h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}\right)^3,$$

usw. Diese Ausdrücke sind in (3) einzusetzen. Wird dann zuletzt noch $\mu = 1$ angenommen, so ergibt sich nach (2):

$$F(x+h, y+k) = F(x, y) + \frac{\left(h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}\right)}{1!} + \frac{\left(h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{2!} + \cdots$$

$$+ \frac{\left(h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}\right)^p}{p!} + R$$

mit der Maßgabe, daß nach der Ausrechnung der Potenzen von:

$$h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y} = h \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + k \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

mittelst des binomischen Lehrsatzes (wie in [168]) statt:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^\beta$$

zu setzen ist:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} F(x, y)}{(\partial x)^\alpha (\partial y)^\beta}.$$

Der Rest wird mit derselben Maßgabe in der Form von Lagrange:

$$R = \frac{\left(h \frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \xi} + k \frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right)^{p+1}}{(p+1)!},$$

wo nach der Differentiation statt ξ und η zu setzen sind:

$$\xi = x + \lambda h, \qquad \eta = y + \lambda k \qquad (1 > \lambda > 0).$$

Doch gibt es, genau wie in [157] auch noch andere Restformen, auf deren Herleitung aber hier verzichtet ist.

193. Zu dem erweiterten Taylorschen Lehrsatz gibt es natürlich entsprechend erweiterte Anwendungen. Wenn z. B. zwei Gleichungen:

$$F(x, y), \qquad \varphi(x, y) = 0 \qquad (1)$$

zur Lösung nach x und y vorgelegt sind und man bereits „erste“ Annäherungswerte kennt:

$$x = a, \qquad y = b,$$

so setze man, um das Newtonsche Verfahren auf den vorliegenden Fall zu erweitern:

$$x = a + h, \qquad y = b + k$$

und erhält nach Einsetzen in (1) und Entwicklung nach Taylor unter Beschränkung auf die Glieder erstes Grades:

$$0 = F(a, b) + hF'(a + \lambda h) + kF'(b + \lambda k),$$
$$0 = \varphi(a, b) + h\varphi'(a + \lambda' h) + k\varphi'(b + \lambda' k)$$

oder, wenn wie in [186] zunächst 0 statt λ und λ' gesetzt wird:

$$\begin{aligned} 0 &= F(a, b) + hF'(a) + kF'(b), \\ 0 &= \varphi(a, b) + h\varphi'(a) + k\varphi'(b). \end{aligned} \tag{2}$$

Diese beiden Gleichungen ersten Grades geben durch Auflösung die Newtonschen Werte für h und k. Sollten sich die verbesserten Werte von x und y noch nicht als genau genug herausstellen, so verbessere man in derselben Weise noch einmal usw.

Die übrigen Betrachtungen aus [186] lassen sich unschwer übertragen. Doch sei hierauf, wie auf ein Beispiel verzichtet.

Aufgaben zu § 22.

1. Die Gleichung $x = \operatorname{cotg} x$ hat unendlich viele Wurzeln. Eine liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, eine andere zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$. Diese beiden sollen nach Newtons Verfahren berechnet werden.

2. Nachzuweisen, daß der Ausdruck:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \ln k$$

einen limes hat, wenn k eine absolute ganze Zahl bedeutet, welche unbegrenzt groß werden soll.

3. $\lim\limits_{(x=0)} \dfrac{a \sin bx - b \sin ax}{\alpha \sin \beta x - \beta \sin \alpha x}$.

4. $\lim\limits_{(n=\infty)} \dfrac{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{c} - \sqrt[n]{e}}$.

5. $\lim\limits_{(x=a)} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$.

§ 23. Singularitäten ebener Kurven.

194. Das in der Überschrift gebrauchte Wort Singularität zeigt an, daß Ausnahmefälle erörtert werden sollen, Fälle, die nur vereinzelt auftreten und eine besondere Behandlung notwendig machen.

Doch da dies noch recht unbestimmt klingt, so sei für eine feste Grundlage der Untersuchung außerdem vorausgesetzt:

Gegeben sei die Gleichung der Kurve in der impliziten Form:

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

und es stelle F eine stetige und eindeutige Funktion von x und y vor, in der Umgebung eines Punktes $P(x, y)$ der Kurve. Desgleichen seien die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung:

$$p = F'_x, \quad q = F'_y, \quad r = F''_{xx}, \quad s = F''_{xy} = F''_{yx}, \quad t = F''_{yy},$$

desgleichen die der dritten Ordnung, die auch für die Folge gebraucht und deshalb kurz bezeichnet werden als:

$$\alpha = F'''_{xxx}, \quad \beta = F'''_{xxy}, \quad \gamma = F'''_{xyy}, \quad \delta = F'''_{yyy}$$

usw. endlich, eindeutig und stetig. Welche Singularitäten können dann möglicherweise für den Punkt P eintreten?

195. Doppelpunkte. Nach [165 9] wird die Tangente in P durch die Gleichung:

$$p\,dx + q\,dy = 0, \tag{1}$$

oder:

$$\alpha)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}, \text{ oder } \beta)\ \frac{dx}{dy} = -\frac{q}{p} \tag{2}$$

gegeben.

Je nachdem man daran denkt x oder y zur unabhängigen Veränderlichen zu machen, wird man (2) α) oder (2) β) nehmen. Im allgemeinen macht es nichts aus, worauf die Wahl fällt; nur wenn $q = 0$ ist, wird man lieber (2) β), wenn $p = 0$ ist wird man lieber (2) α) nehmen.

Wenn aber gleichzeitig:

$$p = 0 \qquad \text{und} \qquad q = 0 \tag{3}$$

ist? Dann wird:

$$\operatorname{tg} \tau = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}, \tag{4}$$

also unbestimmt. Das erste totale Differential verschwindet identisch, versagt also zur Bestimmung von $dy : dx$ vollständig. Also versuche man es mit dem zweiten totalen Differential:

$$d^2F \equiv pd^2x + qd^2y + r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2 = 0, \tag{5}$$

oder nach (3):

$$r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2 = 0, \tag{6}$$

d. h.:

$$r + 2sy' + t(y')^2 = 0. \tag{7}$$

Während also sonst aus (2) die erste Ableitung y' und aus (5) die zweite Ableitung y'' berechnet wird (vgl. [169]), fällt jetzt (2)

ganz aus und (7) dient zur Bestimmung von y'. Da aber (7) eine Gleichung zweiten Grades ist, so ergeben sich zwei Werte von y'. Die Kurve geht zweimal durch P, P ist ein Doppelpunkt. Die Wurzeln sind:

$$\left.\begin{matrix} y_1' \\ y_2' \end{matrix}\right\} = \frac{-s \pm \sqrt{-(rt - s^2)}}{t}, \tag{8}$$

Fig. 76.

daher:

Erster Fall. $rt - s^2 < 0$. Die beiden Werte von y' werden reell und verschieden. Der Punkt ist ein wirklicher oder reeller Doppelpunkt (Fig. 76).

Beispiel (Figur nicht vorhanden):

$$F(x, y) \equiv 18x^3 + 9xy^2 + 8y^3 - 297x - 108y + 180 = 0,$$

$$p = 54x^2 + 9y^2 - 297; \quad q = 18xy + 24y^2 - 108,$$

$$r = 108x; \quad s = 18y; \quad t = 18x + 48y,$$

$$\alpha = 108; \quad \beta = 0; \quad \gamma = 18; \quad \delta = 48.$$

Man setze $x = +2$, $y = -3$. Es wird:

$$F(+2, -3) = +144 + 162 - 216 - 594 + 216 + 180 = 0,$$

d. h. $P(+2, -3)$ ist ein Punkt der Kurve. Ferner folgt:

$$p = +216 + 81 - 297 = 0, \quad q = -108 + 216 - 108 = 0,$$

d. h. $P(+2, -3)$ ist ein Doppelpunkt. Endlich ergibt sich:

$$r = +216, \quad s = -54, \quad t = -108.$$

Aus (7) wird daher nach Division durch 108:

$$2 - y' - y'^2 = 0,$$

also:

$$y_1' = \operatorname{tg} \tau_1 = +1, \; y_2' = \operatorname{tg} \tau_2 = -2; \quad \tau_1 = 45^0, \; \tau_2 = 116^0 33{,}9'. \tag{9}$$

Die Kurve geht in den beiden angegebenen Richtungen durch P hindurch. Will man noch die zweite Ableitung y'' haben, so wird für einen Doppelpunkt das dritte totale Differential herhalten müssen, welches ergibt:

$$0 = d^3F = pd^3x + qd^3y + 3(rdx + sdy)d^2x + 3(sdx + tdy)d^2y$$
$$+ [\alpha(dx)^3 + 3\beta(dx)^2dy + 3\gamma dx(dy)^2 + \delta(dy)^3].$$

Für einen Doppelpunkt verschwinden nach (3) die beiden ersten Glieder. Sodann setzt man wie üblich $d^2x = 0$, $d^2y = y''(dx)^2$, so folgt:

$$y'' = -\frac{\alpha + 3\beta y' + 3\gamma y'^2 + \delta y'^3}{3(s + ty')}, \tag{10}$$

also im vorliegenden Falle:

$$y'' = \frac{108 + 54y'^2 + 48y'^3}{162 + 324y'} = \frac{18 + 9y'^2 + 8y'^3}{27 + 54y'},$$

daher nach (9):

$$y_1'' = +\frac{35}{81}, \qquad y_2'' = +\frac{10}{81}$$

und nach [180 ı]:

$$\varrho_1 = \frac{162\sqrt{2}}{35}; \qquad \varrho_2 = \frac{81\sqrt{5}}{2}.$$

Die beiden Zweige der Kurve in P haben also verschiedene Krümmungen. (In gleicher Weise könnte man die dritte, die vierte Ableitung usw. bilden, wobei allerdings die Rechnungen immer mühsamer werden würden. Soviel ist aber klar, daß die Werte für beide Zweige verschieden ausfallen müssen.)

Zweiter Fall. $rt - s^2 > 0$. Die beiden Werte für y_1' und y_2' werden nicht reell, sondern komplex. Es gibt zu dem Punkte P überhaupt keine (reelle) Fortsetzung. Man nennt einen solchen Punkt einen imaginären Doppelpunkt oder isolierten Punkt oder Einsiedler.

Beispiel (Figur nicht vorhanden):

$$F(x, y) \equiv x^3 + y^3 + x^2 + xy + y^2 = 0,$$
$$p = 3x^2 + 2x + y; \quad q = 3y^2 + x + 2y,$$
$$r = 6x + 2; \quad s = 1; \quad t = 6y + 2.$$

Man setze $x = 0$, $y = 0$. Die Gleichung wird erfüllt. Ferner ergibt sich $p = 0$, $q = 0$, d. h. der Punkt $P(0, 0)$ ist ein Doppelpunkt. Gleichung (7) wird:

$$2 + 2y' + 2y'^2 = 0,$$

$$\begin{matrix} y_1' \\ y_2' \end{matrix} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Der Punkt $P(0, 0)$ ist also ein Einsiedler (von den anderen reellen Punkten der Kurve, welche einen kontinuierlichen Kurvenzug bilden, ganz isoliert).

Dritter Fall. $rt - s^2 = 0$. Die beiden Werte von y_1' und y_2' fallen zusammen. Der Punkt $P(x, y)$ ist im allgemeinen eine Spitze. Die Kurve nähert sich von P_1 kommend dem Punkte P in der Richtung der Tangente, macht aber in P kehrt und läuft zurück, sich dabei von der Tangente nach der andern Seite (nach P_2) entfernend. P heißt deshalb auch ein Rückkehrpunkt (Fig. 77). Solche Spitzen oder Rückkehrpunkte hat z. B. die Evolute der Parabel, die Evolute der Ellipse und die gemeine Zykloide. (Vgl. Fig. 21, 33, 34 in [60], [143]).

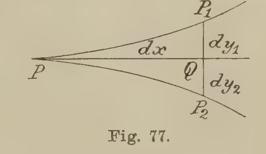


Fig. 77.

Zur Vereinfachung nehme man die x-Achse parallel zur Tangente. So wird $y_1' = 0$ und $y_2' = 0$, also $r = 0$, $s = 0$. Der Taylorsche Satz für zwei Veränderliche gibt daher, wenn $h = dx$, $k = dy$ gesetzt wird, einschließlich der Glieder dritter Ordnung:

$$0 = \frac{t}{2!}(dy)^2 + \frac{\alpha(dx)^3 + 3\beta(dx)^2 dy + 3\gamma dx(dy)^2 + \delta(dy)^3}{3!}.$$

Also ist $(dy)^2$ mindestens von der 3ten Ordnung und dy mindestens von der $\frac{3}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich klein in bezug auf dx, woraus wieder folgt, daß die drei letzten Glieder von höherer als der dritten Ordnung unendlich klein sind. Daher bis auf Größen von der 3ten Ordnung genau:

$$0 = \frac{t}{2!}(dy)^2 + \frac{\alpha(dx)^3}{3!}; \quad dy = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{3t}(dx)^3}.$$

Es darf daher dx nur ein Vorzeichen haben, nämlich dasjenige von $-\alpha : t$, wenn dy reell sein soll. Dann aber hat dy zwei entgegengesetzt gleiche Werte von der Ordnung $3:2$, während für einen gewöhnlichen Punkt nach [149] die eben beginnende Abweichung von der Tangente von der zweiten Ordnung ist. Hiermit steht im Einklang die unendlich große Krümmung im Rückkehrpunkt, welche aus (10) hervorgeht. Aus $s = 0$, $y' = 0$ folgt nämlich:

$$y'' = -\frac{\alpha}{0} = \infty.$$

Diese Betrachtungen setzen α als von 0 verschieden voraus; andernfalls kann die Singularität des Punktes noch eine Abänderung erfahren.

196. Mehrfache Punkte. Ist nicht allein $p = 0$, $q = 0$, sondern auch noch:

$$r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0,$$

so wird der betreffende Punkt ein dreifacher Punkt und die Richtungen der drei Tangenten werden durch die Formel:

$$\alpha + 3\beta y' + 3\gamma y'^2 + \delta y'^3 = 0$$

bestimmt. Wäre ferner außerdem noch:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$$

so würde es sich um einen vierfachen Punkt handeln usw. Allgemein entsteht ein p-facher Punkt, wenn alle ersten, alle zweiten ... bis alle $(p-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen von $F(x, y)$ für ihn verschwinden. Die Gleichung zur Bestimmung von y' wird dann vom p^{ten} Grade und je nachdem sie nur reelle, oder auch komplexe oder auch mehrfache Wurzeln hat, entstehen Einteilungen für p-fache Punkte, bei welchen auch die Werte der noch höheren Ableitungen zum Teil maßgebend sind. In der Theorie der höheren algebraischen Kurven findet man eine eingehende Analyse aller so möglichen Singularitäten.

Sehr vereinfacht wird ihre Untersuchung, wenn der mehrfache Punkt mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt, was immer durch eine Parallelverschiebung erreichbar ist. Es sei zunächst ein

beliebiger Punkt $P(xy)$ der Kurve und ein zweiter Punkt $P_1(x_1, y_1)$ mit den Koordinaten

$$x_1 = x + h, \quad y_1 = y + k$$

vorausgesetzt, also daß:

$$F(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad F(x + h, y + k) = 0$$

sein muß. Die Anwendung des Taylorschen Satzes ergibt:

$$0 = F(x,y) + \frac{ph + qk}{1!} + \frac{rh^2 + 2shk + tk^2}{2!} + \frac{\alpha h^3 + 3\beta h^2 k + 3\gamma hk^2 + \delta k^3}{3!} + \cdots$$

Das erste Glied verschwindet. Schreibt man darauf, nachdem P zum Anfangspunkt gemacht worden ist, x statt h, y statt k, so wird:

$$0 = \frac{px + qy}{1!} + \frac{rx^2 + 2sxy + ty^2}{2!} + \frac{\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3}{3!} + \cdots$$

In nächster Umgebung des Anfangspunktes kommen zu allererst die Glieder ersten Grades. Man erhält daher, da im vorliegenden Falle $dx = x$, $dy = y$ gesetzt werden darf:

$$p dx + q dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = y' = -\frac{p}{q}.$$

Also ganz wie es nach [165 9] sein muß. Ist aber $p = 0$ und $q = 0$, d. h. sind die niedrigsten Glieder vom zweiten Grade, so ergibt sich ebenso:

$$r(dx)^2 + 2s dx dy + t(dy)^2 = 0; \quad r + 2sy' + ty'^2 = 0,$$

ganz wie vorhin [195 6].

Ist auch noch: $r = 0, s = 0, t = 0$, so kommen zuerst die Glieder dritten Grades. Sie ergeben:

$$\alpha + 3\beta y' + 3\gamma y'^2 + \delta y'^3 = 0$$

usw. Daher:

Macht man den zu untersuchenden Punkt P zum Anfangspunkt und entwickelt die Gleichung der Kurve nach steigenden Potenzen von x und y, so ergeben sich die Tangenten durch Beschränkung der Gleichung auf die Glieder niedrigsten Grades, wenn x und y durch dx und dy ersetzt werden, oder wenn $y : x$ durch $dy : dx = y'$ ersetzt wird. Sind Glieder ersten Grades vorhanden, so ist der Punkt ein gewöhnlicher Punkt. Fehlen sie und sind Glieder zweiten Grades vorhanden, so ist der Punkt ein Doppelpunkt. Fehlen auch Glieder zweiten Grades, sind aber solche dritten Grades vorhanden, so ist der Punkt ein dreifacher Punkt usw.

So lehrt der Anblick der Gleichung des Cartesischen Blattes [60]:

$$x^3 + y^3 - axy = 0$$

auf der Stelle, daß die Kurve durch den Anfangspunkt O geht, daß dieser Punkt ein Doppelpunkt ist und daß die beiden Tangenten in

O mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Desgleichen ersieht man aus der Gleichung der Bernoullischen Lemniskate:

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$$

ebenfalls, daß sie durch O geht, daß O ein Doppelpunkt ist und daß die beiden Tangenten in O die Koordinatenwinkel halbieren. Denn es ergibt sich:

$$(dx)^2-(dy)^2=0, \quad dy=\pm dx.$$

Selbstverständlich hat man die Theorie der Singularitäten auch auf Punkte von Flächen übertragen. Gesetzt die Gleichung der Fläche sei in impliziter Form:

$$F(x,y,z)=0$$

gegeben, so folgt durch totale Differentiation:

$$F_x'dx+F_y'dy+F_z'dz=0 \quad \text{oder} \quad dz=-\frac{F_x'}{F_z'}dx-\frac{F_y'}{F_z'}dy,$$

so daß nach [164 2]:

$$p=-\frac{F_x'}{F_z'}, \quad q=-\frac{F_y'}{F_z'}$$

gesetzt werden muß. Wenn aber zugleich:

$$F_x'=0 \quad \text{und} \quad F_y'=0 \quad \text{und} \quad F_z'=0$$

ist, so werden p und q vollständig unbestimmt. Das zweite totale Differentiale ergibt alsdann:

$$F_{xx}''(dx)^2+2F_{xy}''dx\,dy+F_{yy}''(dy)^2+2F_{xz}''dx\,dz+2F_{yz}''dy\,dz \\ +F_{zz}''(dz)^2=0,$$

also eine Gleichung, welche einen Kegel zweiten Grades bestimmt. Es gibt in dem betreffenden Punkt überhaupt keine Tangentialebene sondern einen Tangentialkegel usw. Doch erfordert eine eingehende Untersuchung solcher Singularitäten erheblich mehr Aufwand an Rechnung.

Der geometrischen Dualität oder Reziprozität zwischen Punkt und Gerade (oder im Raume zwischen Punkt und Ebene) zu Liebe hat man den Begriff der Singularität auch auf die Tangenten von Kurven bzw. die Tangentialebenen von Flächen übertragen. Eine Doppeltangente z. B. entspricht dem Doppelpunkt. Sie ist eine Gerade, welche die Kurve zweimal berührt. Doch können die Berührungspunkte auch imaginär sein, in welchem Falle die Doppeltangente zu einer isolierten Tangente wird. Fallen sie aber zusammen, so wird die Doppeltangente im allgemeinen zu einer Wendetangente und der Berührungspunkt zum Wendepunkt. Die Wendetangente ist also der Spitze dual entgegengesetzt. Wie dort der bewegliche Punkt nach [195] sich zur Spitze hin bewegt und alsdann scharf umkehrt, so

dreht sich hier die Tangente erst in einem Sinne und dann nach Überschreiten des Wendepunktes P im andern Sinne [181].

Besonders für algebraische Kurven (und Flächen) hat diese Gegenüberstellung singulärer Punkte und singulärer Tangenten (Tangentialebenen) tiefe und eingehende Prinzipien der Einteilung zur Folge gehabt, die hier aber nur ganz flüchtig erwähnt werden können. Sie gipfeln in dem Begriff des sog. Geschlechts.

197. Asymptoten. In einem engeren Sinne gehören auch die Asymptoten zu den Singularitäten von Kurven. Von ihrer Lage hängt ab, wie die Kurve sich in „unendlicher Ferne" verhält, in welcher Richtung die „unendlich fernen" Punkte liegen und wie die Kurve ihnen zustrebt. Denn sie sind sozusagen die Tangenten in den unendlich fernen Punkten.

Die Untersuchung sei von vornherein beschränkt auf algebraische Kurven, d. h. auf Kurven, deren Gleichung auf die Form gebracht werden kann:

$$F(x, y) = 0,$$

wo F eine ganze Funktion irgendeines, etwa n^{ten} Grades von x und y bedeuten soll. Man ordne im Gegensatz zu [196] die Glieder nach fallenden Potenzen, so sei also:

$$0 = F(x, y) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \cdots, \tag{1}$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$\varphi_n(x, y) = ax^n \quad + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + \cdots + kxy^{n-1} + ly^n, \tag{2}$$

$$\varphi_{n-1}(x, y) = a'x^{n-1} + b'x^{n-2}y + c'x^{n-3}y^2 + \cdots + k'y^{n-1} \tag{3}$$

. . . .

Der Punkt $P(x, y)$ soll sich unbegrenzt weit entfernen, d. h. es sollen x und y oder wenigstens eine dieser beiden Koordinaten unendlich groß werden. Daher darf man (nötigenfalls nach einer Drehung des Koordinatensystems):

$$\lim x = \infty \tag{4}$$

annehmen. Um aber trotzdem nicht mit unendlich großen Werten rechnen zu müssen, setze man nach [81]:

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = u \cdot x = \frac{u}{z}, \quad u = \frac{y}{x}. \tag{5}$$

Dann wird u (im allgemeinen) endlich bleiben, während:

$$\lim z = 0 \tag{6}$$

wird.

Nach Ausführung der Transformation (5) in (2) und (3) erhält man:

$$\varphi_n(x, y) = \varphi_n\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = \frac{a + bu + \cdots + ku^{n-1} + lu^n}{z^n} = \frac{\varphi_n(1, u)}{z^n}, \tag{7}$$

$$\varphi_{n-1}(x, y) = \varphi_{n-1}\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = \frac{a' + b'u + \cdots + k'u^{n-1}}{z^{n-1}} = \frac{\varphi_{n-1}(1, u)}{z^{n-1}} \quad (8)$$

usw. Gleichung (1) geht daher nach Multiplikation mit z^n über in:

$$0 = \varphi_n(1, u) + z\varphi_{n-1}(1, u) + z^2\varphi_{n-2}(1, u) \ldots \quad (9)$$

Man differenziere (9) total nach u und z. Es folgt:

$$0 = (\varphi_n'(1, u) + z \cdot \varphi_{n-1}'(1, u) + \cdots)du$$
$$+ (\varphi_{n-1}(1, u) + 2z\varphi_{n-2}(1, u) + \cdots)dz. \quad (10)$$

(9) und (10) vereinfachen sich für den besonderen Fall (6) in:

$$0 = \varphi_n(1, u) \quad \text{und} \quad \frac{du}{dz} = -\frac{\varphi_{n-1}(1, u)}{\varphi_n'(1, u)}. \quad (11)$$

Andererseits ist die Gleichung der Tangente in $P(x, y)$ nach [142]:

$$Y = y'X + (y - xy'), \quad (12)$$

also sind noch y' und $y - xy'$ nach (5) zu transformieren. Es folgt:

$$dx = -\frac{dz}{z^2}, \quad dy = \frac{z\,du - u\,dz}{z^2},$$

daher:

$$y' = \frac{dy}{dx} = u - z\frac{du}{dz}, \quad y - xy' = \frac{u}{z} - \frac{u}{z} + \frac{du}{dz} = \frac{du}{dz}.$$

Und für $z = 0$ nach (11): $y' = u$, $y - xy' = -\varphi_{n-1}(1, u) : \varphi_n(1, u)$.

Daher: Um eine Asymptote einer algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung zu erhalten, beschränke man sich zunächst auf die Glieder n^{ten} Grades $\varphi_n(x, y)$, setze $y = ux$ und bilde so die Gleichung n^{ten} Grades für u:

$$\varphi_n(1, u) = 0. \quad (13)$$

Nach Auflösung derselben wird die Gleichung der Asymptote:

$$\boldsymbol{Y = uX - \frac{\varphi_{n-1}(1, u)}{\varphi_n'(1, u)}}. \quad (14)$$

Da (13) vom n^{ten} Grade in bezug auf u ist, so folgt, daß eine Kurve n^{ter} Ordnung im allgemeinen n Asymptoten haben kann, (aber auch weniger, wenn (13) auch komplexe Wurzeln hat).

Erstes Beispiel:

$$0 = F(x,y) = x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 - 6x^2 + 2xy + 22y^2 - x - 66y - 6 = 0.$$

Gleichung (13) wird hier:

$$\varphi_3(1, u) = 1 + 2u - u^2 - 2u^3 = 0.$$

Die drei Wurzeln sind:

$$u_1 = +1, \quad u_2 = -1, \quad u_3 = -\tfrac{1}{2}.$$

Ferner ist:

$$\varphi_3'(1, u) = 2 - 2u - 6u^2, \quad \varphi_2(1, u) = -6 + 2u + 22u^2,$$

also für $u = +1, -1, -\frac{1}{2}$:

$$-\frac{\varphi_{n-1}(u)}{\varphi_n' u} = +3, +7, +1.$$

Die Gleichungen der drei Asymptoten sind daher, wenn statt X und Y wieder x und y geschrieben wird:

$$x - y + 3 = 0, \quad x + y - 7 = 0, \quad x + 2y - 2 = 0.$$

Zur Probe bilde man das Produkt der linken Seiten dieser Gleichungen (rechts steht nur 0). Es ergibt sich:

$$(x - y + 3)(x + y - 7)(x + 2y - 2) \equiv x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 - 6x^2 \\ + 2xy + 22y^2 - 13x - 62y + 42.$$

Der Unterschied zwischen den Gliedern der Form $F(x, y)$ fängt, wie man sieht, erst mit dem ersten Grade an. Man erhält:

$$F(x, y) \equiv (x - y + 3)(x + y - 7)(x + 2y - 2) + 4(3x - y - 12).$$

Zweites Beispiel. Das Folium cartesianum (Fig. 19):

$$x^3 + y^3 - axy = 0.$$

Gleichung (13) wird $1 + u^3 = 0$, es ist nur eine reelle Wurzel vorhanden, nämlich $u = -1$. Man erhält weiter:

$$-\frac{\varphi_{n-1}(1, u)}{\varphi_n'(1, u)} = +\frac{au}{3u^2} = -\frac{a}{3}.$$

Die Gleichung der Asymptote ist daher:

$$y + x + \frac{a}{3} = 0.$$

198. Zu der eben erklärten Theorie der Asymptoten seien noch einige Anmerkungen hinzugefügt.

Erste Anmerkung. Man kann auch auf folgendem Wege zu den Asymptoten gelangen. Es sei:

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer Kurve n^{ter} Ordnung und:

$$y = Ax + B \tag{2}$$

die Gleichung einer beliebigen Geraden. Setzt man (2) in (1) ein, so entsteht im allgemeinen eine Gleichung n^{ten} Grades für x, deren Wurzeln die Abszissen der Schnittpunkte der Geraden und der Kurve bestimmen. Soll indessen die Gerade zu einer Asymptote werden, so müssen zwei der Schnittpunkte unendlich fern liegen, d. h. die Gleichung muß sich [76] auf den $n - 2^{\text{ten}}$ Grad reduzieren. Die Koeffizienten von x^n und x^{n-1} sind also $= 0$ zu setzen.

Man kommt selbstverständlich bei Durchführung auch dieses Ansatzes auf [197] zurück. Ist die Kurve von der dritten Ordnung, so

wird also jede Asymptote im allgemeinen mit der Kurve noch einen wirklichen Schnittpunkt gemeinsam haben. Im ersten Beispiel zu [197] liegen diese drei Schnittpunkte offenbar auf der Geraden mit der Gleichung:

$$3x - y - 12 = 0.$$

Doch kann gelegentlich auch noch ein dritter Schnittpunkt unendlich fern liegen, wie im zweiten Beispiel. Setzt man in die Gleichung der Kurve ein:

$$y = -x - \frac{a}{3},$$

so wird die linke Seite:

$$x^3 + \left(-x - \frac{a}{3}\right)^3 - ax\left(-x - \frac{a}{3}\right) = x^3 - x^3 - ax^2 - \frac{a^2x}{3} - \frac{a^3}{27}$$
$$+ ax^2 + \frac{a^2x}{3} = -\frac{a^3}{27}.$$

Es fallen die Glieder mit x^3, mit x^2 und auch mit x heraus, und es bleibt nur eine Konstante. Der vorhin genannte Schnittpunkt liegt auch unendlich fern; die Asymptote ist sozusagen zugleich eine Wendetangente.

Zweite Anmerkung. Man denke sich in der Umgebung der Stelle $z = 0$ die Größe u mittels des Taylorschen Satzes durch Hinzufügung des Restgliedes nach Potenzen von z bis einschließlich 2ten Grads entwickelt in:

$$u = A + Bz + Cz^2$$

oder nach Wiedereinsetzen von x und y aus [197 5]:

$$y = Ax + B + \frac{C}{x},$$

$$y - Ax - B = \frac{C}{x},$$

d. h. die Abweichung des betreffenden Kurvenzweiges von der Asymptote wird mit absolut wachsendem x unbegrenzt klein. Sie wechselt aber ihr Vorzeichen zugleich mit x, also daß die asymptotische Annäherung im allgemeinen auf verschiedenen Seiten der Asymptote erfolgt, wenn man sich nach der einen und nach der andern Richtung unbegrenzt weit entfernt. Man betrachte z. B. die Hyperbel (Fig. 78). Bei A nähert sich die Kurve von schräg unten, bei B von schräg oben her der Asymptote AB.

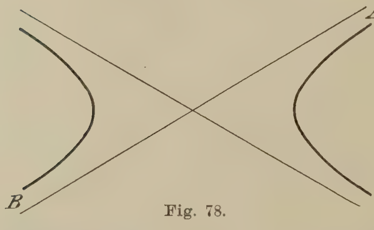


Fig. 78.

Doch sind Ausnahmen sehr wohl möglich. Eine solche bietet z. B. die Asymptote des Folium cartesianum (Fig. 19). Hier liegt die

ganze Kurve überhaupt nur auf einer Seite der Asymptote, also kann auch die Annäherung nur von einer Seite erfolgen. Dies hängt mit der in der ersten Anmerkung erwähnten anderen Ausnahme zusammen.

Dritte Anmerkung. Ist u eine mehrfache Wurzel von (13) in [197], so verschwindet $\varphi_n'(1, u)$ nach [161]. Also wird alsdann der Bruch in [197 14] in der Regel unendlich groß, d. h. es ist wohl die Richtung feststellbar, in welcher der Kurvenzweig in die Unendlichkeit sich erstreckt, aber die Asymptote selbst ist nicht vorhanden, weil auch sie unendlich fern ist. Als Beispiel sei an die gewöhnliche Parabel erinnert, welche zu beiden Seiten des Scheitels allmählich mehr und mehr die Richtung der Hauptachse einschlägt, aber ohne daß eine wirkliche Asymptote da wäre, der sie sich zuletzt unbegrenzt anschmiegen würde.

Vierte Anmerkung. Außer den in den vorigen Anmerkungen genannten Sonderfällen können noch manche andere durch Kombination entstehen. Es kann z. B. ein unendlich ferner reeller Doppelpunkt existieren. Dann hat die Kurve zwei reelle und parallele Asymptoten, wie es mit der Kurve dritter Ordnung

$$yx^2 - y - 1 = 0, \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

der Fall ist, von welcher zwei Asymptoten parallel zur y-Achse im Abstand $+1$ und -1 verlaufen, während die dritte mit der x-Achse übereinstimmt. Oder es kann eine unendlich ferne „Spitze" vorhanden sein. Dann ist die Annäherung nur in einer Richtung, in dieser aber von beiden Seiten. Die Kurve:

$$yx^2 - 1 = 0, \quad \text{oder } y = \frac{1}{x^2}$$

hat die y-Achse zu einer solchen (Doppel)Asymptote. Ob man x positiv oder negativ unendlich klein setzt, y ist beidemal positiv unendlich groß. Und andere Fälle mehr.

Fünfte Anmerkung. Selbstverständlich können auch transzendente Kurven Asymptoten haben. So hat z. B. die Exponentialkurve:

$$y = e^x$$

die x-Achse zur Asymptote, allerdings nur einseitig, nämlich in der negativen Richtung, denn in der positiven Richtung wird im Gegenteil y unendlich groß.

Sechste Anmerkung. Den asymptotischen Geraden von Kurven entsprechen asymptotische Ebenen von Flächen, Ebenen, welche als Grenzfälle von Berührungsebenen aufzufassen sind, wenn der Berührungspunkt sich unbegrenzt weit entfernt. Bei einem Hyperboloid z. B. umhüllen die asymptotischen Ebenen den sog. Asymptotenkegel.

Übungen zu § 23.

1. Die Asymptoten der Kurve zweiter Ordnung

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 5y - 7 = 0$$

sind zu ermitteln.

2. Gegeben die Kurve:

$$x^3 + ay^3 + bx^2 + cxy + ey^2 + fx + gy + h = 0\,.$$

Die Koeffizienten a, b, c, e, f, g, h sind so zu bestimmen, daß die Kurve durch $P(+2, -3)$ geht, daß dieser Punkt ein Doppelpunkt ist, daß die beiden Tangenten in P zu den Koordinatenachsen parallel sind, daß der Krümmungsradius an den Zweig, dessen Tangente parallel zur x-Achse $= 6$ wird (Krümmung um die Parallele zur $+y$-Achse) und der Krümmungsradius an den anderen Zweig $= 3$ wird (Krümmung um die Parallele zur $-x$-Achse).

3. Eine Kurve zweiter Ordnung, welche einen Doppelpunkt hat, muß in zwei Gerade zerfallen.

4. Die Doppeltangenten an die Bernoullische Lemniskate und ihre Berührungspunkte sind zu ermitteln.

5. Wo liegen die Wendepunkte der Kurve

$$x^3 + y^3 + y = 0\,?$$

§ 24. Hüllkurven (Enveloppen) und Hüllflächen.

199. Die Einhüllende. Ein Kreis wird von allen seinen Tangenten eingehüllt. Die Tangenten sind eine Schar gerader Linien und der Kreis ist ihre Einhüllende (oder Enveloppe). Alle Flugbahnen, welche von demselben Anfangspunkt in derselben Vertikalebene mit derselben Anfangsgeschwindigkeit aber mit verschiedenen Abgangswinkeln beschrieben werden, werden von der sog. Grenzparabel eingehüllt [200]. Die Flugbahnen bilden eine Kurvenschar und die Grenzparabel ist ihre Einhüllende. So ließen sich tausende von Beispielen anführen, in denen eine Kurvenschar eine Einhüllende besitzt. Es sei ganz allgemein:

$$F(x, y, \lambda) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer Kurvenschar. Das soll heißen: Wenn man für λ (nötigenfalls unter Beschränkung auf einen gegebenen Spielraum) irgendeinen Wert setzt, dann stellt (1) die Gleichung irgendeiner Kurve der Schar vor. Die Zahl λ soll also ein Parameter sein, dessen Wert für ein und dieselbe Kurve der Schar konstant ist, aber bei dem Übergang von einer Kurve zur andern sich ändert.

Wenn nun die Einhüllende überhaupt existieren soll, so müssen zum mindesten „benachbarte" Kurven der Schar einander schneiden. Benachbart aber werden zwei Kurven sein, deren Parameter sich um unendlich wenig, um $d\lambda$, unterscheiden. In diesem Sinne seien ihre Gleichungen

$$F(x, y, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad F(x, y, \lambda + d\lambda) = 0. \tag{2}$$

Es ist wohl klar, daß ihr Schnittpunkt der Einhüllenden unbegrenzt nahe liegt, oder mit anderen Worten, daß die Grenzlage dieses Schnittpunktes einen Punkt der Einhüllenden ergibt. Aus (2) folgt:

$$F(x, y, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{F(x, y, \lambda + d\lambda) - F(x, y, \lambda)}{d\lambda} = 0.$$

Die linke Seite der zweiten Gleichung ist aber nach § 19 nur unendlich wenig von der partiellen Ableitung nach λ verschieden. Also:

Jeder Punkt der Einhüllenden erfüllt die beiden Gleichungen:

$$\alpha) \quad F(x, y, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad \beta) \quad \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{oder} \quad F_\lambda' = 0. \tag{3}$$

Ihre Gleichung entsteht daher durch Elimination von λ aus den beide Gleichungen (3). Mithin:

Um zu einer gegebenen Kurvenschar:

$$\boldsymbol{F(x, y, \lambda) = 0} \tag{4}$$

die Einhüllende zu ermitteln, bilde man die Ableitung nach dem Parameter λ (also wohlbemerkt, weder nach x noch nach y, sondern nach λ) und setze sie gleich 0

$$\boldsymbol{F_\lambda' = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0.} \tag{5}$$

Durch Elimination von λ aus (4) und (5) entsteht alsdann die Gleichung der Einhüllenden:

$$\psi(x, y) = 0. \tag{6}$$

Statt λ zu eliminieren und bis zur Endgleichung (6) vorzudringen, ist es zuweilen gebotener, λ beizubehalten und es entweder bei der Zusammenstellung von (4) und (5) für die Einhüllende bewenden zu lassen, um geeignete Betrachtungen oder Konstruktionen daran zu knüpfen oder auch aus (4) und (5) x und y durch λ zu berechnen, um im Sinne von [60] eine Parameterdarstellung der Einhüllenden zu gewinnen.

Daß die so ermittelte Kurve in der Tat Anspruch machen darf, Einhüllende zu heißen, läßt sich auch a posteriori wie folgt beweisen. Man differenziere (4) total nach allen drei Veränderlichen x, y, λ. Es wird:

$$0 = F_x' dx + F_y' dy + F_\lambda' d\lambda. \tag{7}$$

Diese Differentialgleichung gilt allgemein, wenn man von irgend einem Wertsystem x, y, λ zu einem benachbarten Wertsystem $x + dx$, $y + dy$, $\lambda + d\lambda$ übergeht. Das dritte Glied verschwindet, wenn man auf derselben Kurve der Schar bleibt, weil dann $d\lambda = 0$ ist. Es verschwindet aber auch, wenn man auf der Einhüllenden bleibt, weil dann $F_\lambda' = 0$ ist. In beiden Fällen erhält man:

$$F_x' dx + F_y' dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'}{F_y'},$$

also, wenn beide mal ein und derselbe Punkt, der dann ein Punkt der Schar und zugleich der Einhüllenden sein muß, gewählt wird, denselben Wert für $dy : dx$, d. h.

Die Kurve (6) wird von jeder Kurve der Schar (4) in dem aus (4) und (5) zu bestimmenden Punkt P berührt. Sie ist also in der Tat die Einhüllende.

In der Regel wird die Berührung von erster Ordnung sein, doch ist höhere Ordnung durchaus nicht ausgeschlossen.

Für eine analytische Deutung von (4), (5) und (6) ziehe man [161] zu Rate; es soll λ nach (5) eine (mindestens) zweifache Wurzel von (4) sein, wenn (4) als eine Gleichung zur Bestimmung von λ aufgefaßt wird. Ist z. B. (4) von der Form:

$$f_1(x, y) + 2\lambda f_2(x, y) + \lambda^2 f_3(x, y) = 0, \tag{8}$$

so wird (5) von der Form:

$$f_2(x, y) + \lambda f_3(x, y) = 0,$$

während aus (6) wird:

$$f_1(xy) \cdot f_3(x, y) - (f_2(x, y))^2 = 0, \tag{9}$$

d. h. die Diskriminante von (8) hat zu verschwinden.

200. Erstes Beispiel (Fig. 79). Die Einhüllende aller von einem festen Punkt O gleichweit entfernten Geraden ist zu bestimmen.

Lösung: Man mache O zum Koordinatenanfangspunkt, und setze die Gleichung der Geraden in der Hesseschen Normalform voraus:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0.$$

Es soll δ konstant sein, also ist α der in [199] mit λ bezeichnete Parameter. Folglich nach [199 5]:

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0.$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Auflösung nach x und y:

$$x = \delta \cos \alpha, \quad y = \delta \sin \alpha$$

und durch Quadrieren und Addieren, um α fortzuschaffen:

$$x^2 + y^2 - \delta^2 = 0.$$

Die Einhüllende hat sich als Kreis um O als Mittelpunkt mit δ als Radius herausgestellt, was ja wohl als selbstverständlich gelten konnte.

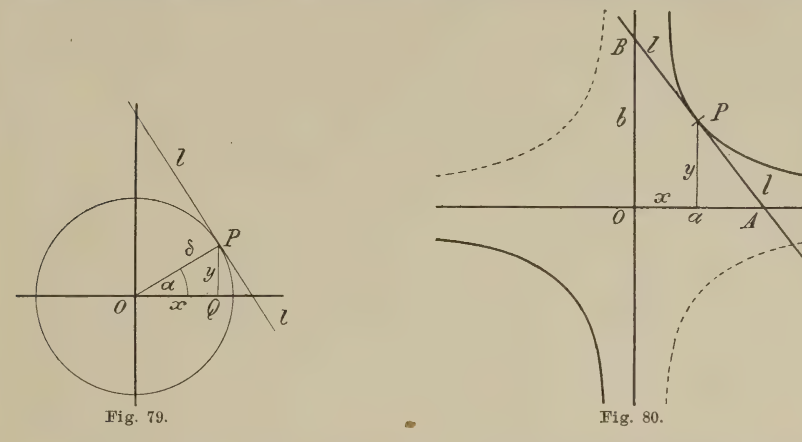


Fig. 79. Fig. 80.

Zweites Beispiel (Fig. 80). Die Einhüllende aller Geraden, welche von einem rechten Winkel ein Dreieck mit konstantem Inhalt $\Delta OAB = \Delta$ abschneiden, ist zu ermitteln.

Lösung: Die Gleichung der Geraden l ist:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Nach Voraussetzung soll sein:

$$ab = 2\Delta, \quad b = \frac{2\Delta}{a},$$

daher nach Elimination von b:

$$\frac{x}{a} + \frac{ya}{2\Delta} - 1 = 0; \quad ya^2 - 2\Delta a + x 2\Delta = 0.$$

Die linke Seite ist die Funktion F, wenn λ durch a ersetzt wird. Also:

$$0 = F_a' = 2ya - 2\Delta.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$y = \frac{\Delta}{a}, \quad x = \frac{a}{2};$$

oder auch:

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}$$

und nach Elimination von a und b:

$$xy - \frac{\Delta}{2} = 0.$$

Die Einhüllende ist also eine Hyperbel, welche die Koordinatenachsen zu Asymptoten hat. Der Berührungspunkt P liegt in der

Mitte von AB, wie unmittelbar aus den vorigen Ausdrücken für x und y folgt.

Übrigens ist hier der Umlaufssinn $0 - A - B - 0$ positiv vorausgesetzt. Nimmt man ihn negativ, so entsteht als zweite Einhüllende eine Hyperbel im zweiten und vierten Quadranten und beide Hyperbeln sind zusammen zu nehmen, wenn man Δ nur absolut auffaßt.

Drittes Beispiel (Fig. 81). Die Einhüllende aller Flugbahnen in derselben Vertikalebene, ausgehend von demselben Punkt, mit derselben

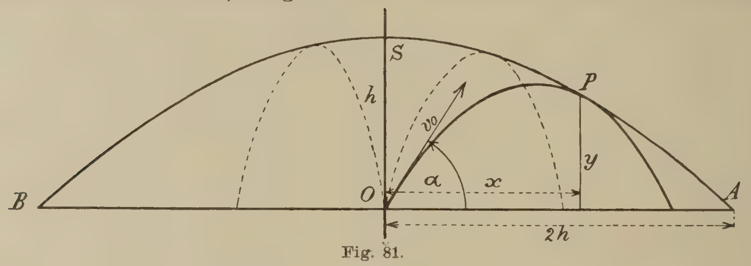


Fig. 81.

Anfangsgeschwindigkeit, aber verschiedenen Abgangswinkeln ist zu bestimmen. Es wird die parabolische Theorie zugrunde gelegt, also nach Stärke und Richtung konstante Schwere und kein Luftwiderstand.

Lösung: Es sei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, t die Zeit, gerechnet von dem Augenblick, in welchem das Geschoß von O ausgeht, α der Abgangswinkel, g die Schwerebeschleunigung. Außerdem werde der Kürze wegen gesetzt:

$$h = \frac{v_0^{\,2}}{2g}.$$

Dann ist h bekanntlich die größte Höhe bei senkrechtem Wurf. Die beiden Bewegungsgleichungen sind nach den Prinzipien der Mechanik:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t; \; y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}\, t^2$$

und hieraus folgt nach Elimination von t:

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2\,v_0^{\,2}\cos^2\alpha}\, x^2$$

oder, wenn zur Abkürzung $\operatorname{tg}\alpha = p$ gesetzt und h eingeführt wird:

$$F(x, y, p) = \frac{p^2}{4h}x^2 - px + \left(y + \frac{x^2}{4h}\right) = 0;$$

also für die Einhüllende auch:

$$F_p{}' = \frac{p}{2h}\, x^2 - x = 0,$$

d. h. entweder $x = 0$, was auf Punkt O zurückführt, (der so zu sagen

ein isolierter Punkt der Einhüllenden ist, da alle Flugbahnen durch ihn hindurchgehen), oder:

$$x = \frac{2h}{p} = 2h \operatorname{cotg} \alpha; \quad p = \frac{2h}{x}.$$

Nach Einsetzen von p in die Gleichung der Flugbahn folgt:

$$h - 2h + \left(y + \frac{x^2}{4h}\right) = 0,$$

oder:

$$y = h - \frac{x^2}{4h}.$$

Die Einhüllende ist also eine Parabel, die sog. Grenzparabel. Ihr Scheitel fällt mit dem Scheitel des senkrechten Wurfes zusammen und ihr Brennpunkt ist der Punkt O. Ist $\alpha > 45^0$, so liegt der Berührungspunkt P höher als O; ist $\alpha = 45^0$, so fällt er mit A (oder B) zusammen (größte Schußweite bei horizontalem Ziel), ist $\alpha < 45^0$, so liegt P tiefer als O. Liegt ein Ziel innerhalb der Grenzparabel, so kann es durch zwei Schüsse getroffen werden, einen Flachschuß und einen Steilschuß. Liegt es auf der Grenzparabel, so fallen beide Schüsse zusammen. Liegt es außerhalb der Grenzparabel, so kann es überhaupt nicht mehr getroffen werden.

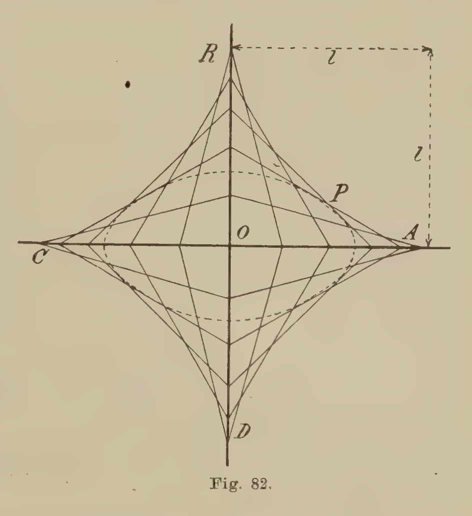


Fig. 82.

Viertes Beispiel. Eine Stange von gegebener Länge l gleitet mit den Endpunkten auf zwei zueinander senkrechten Geraden. Es wird ihre Einhüllende gesucht.

Lösung: Die Gleichung einer Geraden, welche von den Koordinatenachsen die Strecken p und q abschneidet, lautet:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0.$$

Es soll sein: $p^2 + q^2 = l^2$, also nach Einführung des Hilfswinkels α (nicht gezeichnet):

$$p = l \cos \alpha, \quad q = l \sin \alpha;$$

daher nach Fortschaffung der Nenner:

$$F(x, y, \alpha) = x \sin \alpha + y \cos \alpha - l \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Also für die Einhüllende auch:

$$F_\alpha' = x \cos \alpha - y \sin \alpha - l(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0.$$

Die Auflösung nach x und y ergibt:

$$\left.\begin{aligned} x &= l(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha + l\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha \\ y &= l\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha - l(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{ oder überaus einfach:}$$

$$x = l\cos^3\alpha, \quad y = l\sin^3\alpha,$$

eine sehr einfache Parameterdarstellung der Einhüllenden. Um ihre Gleichung zu erhalten, berechne man umgekehrt:

$$\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}, \quad \sin\alpha = \sqrt[3]{\frac{y}{l}}; \quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

daher:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{l^2} = 0$$

oder wenn die Wurzeln fortgeschafft werden, wie in [182]:

$$(l^2 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2l^2 = 0.$$

(Diese Kurve nennt man nach ihrer Gestalt auch Astroide oder Sternkurve.)

Fünftes Beispiel. Eine Ellipse mit gegebenem Mittelpunkt und gegebenen Achsenrichtungen ändert sich so, daß die Summe der Halbachsen konstant bleibt.

$$a + b = l.$$

Gesucht wird die Einhüllende.

Lösung: Da $b = l - a$ ist, so lautet die Gleichung der Ellipse:

$$F(x, y, a) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(l-a)^2} - 1 = 0;$$

also für die Einhüllende auch:

$$F_a' = -\frac{2x^2}{a^3} + \frac{2y^2}{(l-a)^3} = 0.$$

Man berechne aus beiden Gleichungen x und y. Es ergibt sich recht einfach:

$$x = a\sqrt{\frac{a}{l}}; \quad y = b\sqrt{\frac{b}{l}}$$

oder, wenn man den Hilfswinkel α durch die Gleichung

$$a = l\cos^2\alpha, \quad \text{also} \quad b = l - a = l\sin^2\alpha$$

einführt:

$$x = l\cos^3\alpha, \quad y = l\sin^3\alpha.$$

Die Einhüllende ist daher mit derjenigen im vierten Beispiel identisch.

Sechstes Beispiel (Fig. 83). Wie das fünfte, nur soll sein:

$$a^2 + b^2 = l^2.$$

Lösung: Man setze $a^2 = p$, $b^2 = l^2 - p$, so wird die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{l^2 - p} - 1 = 0,$$

oder:

$$F(x, y, p) \equiv p^2 + p(y^2 - x^2 - l^2) + x^2 l^2 = 0,$$

mithin für die Einhüllende auch:

$$0 = F_p' = 2p + (y^2 - x^2 - l^2)$$

und nach Elimination von p:

$$(y^2 - x^2 - l^2)^2 - 4x^2 l^2 = 0$$

oder nach Zerlegung der linken Seite in Faktoren:

$$(x + y - l)(x - y - l)(- x + y - l)(- x - y - l) = 0.$$

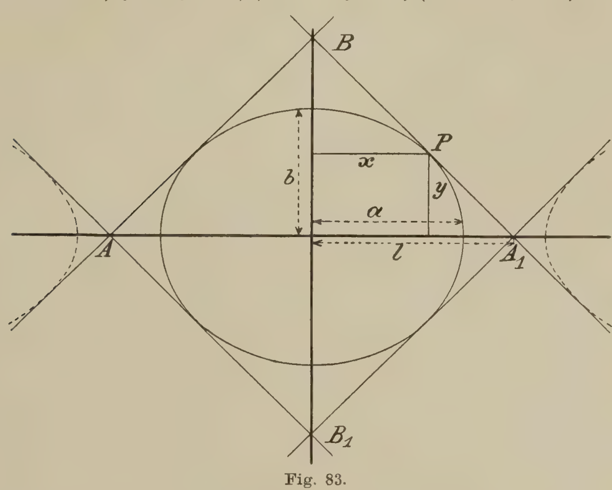


Fig. 83.

Die Einhüllende zerfällt also in vier Gerade, welche von der x-Achse und y-Achse die Strecken $\pm l$ abschneiden. Hält man an dem Wortlaut fest, daß die Kurven Ellipsen sein sollen, so beschränkt sich die Einhüllende auf den Umfang des Quadrates AB_1A_1B.

Läßt man aber zu, daß p oder $l^2 - p$ auch negativ werden dürfen, so besteht die Kurvenschar aus Ellipsen und Hyperbeln. Letztere berühren die Seiten des Quadrates in den Verlängerungen.

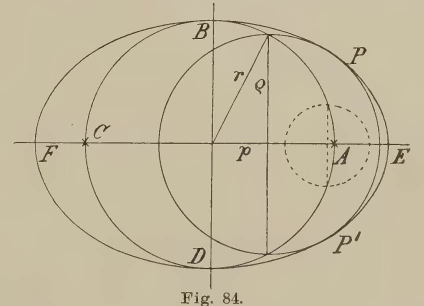


Fig. 84.

Siebentes Beispiel (Fig. 84). In einem Kreise mit dem Radius r ist eine Schar paralleler Sehnen gezogen und über jeder Sehne als Durchmesser wieder ein Kreis konstruiert. Gesucht wird die Einhüllende aller Kreise.

Lösung. Man führe p als Parameter ein, dann ist die Gleichung des Kreises mit $2\varrho = 2\sqrt{r^2 - p^2}$ als Durchmesser:

$$F(x, y, p) = (x-p)^2 + y^2 - (r^2 - p^2) \equiv 2p^2 - 2px + x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Für die Einhüllende ist daher auch

$$F_p' = 4p - 2x = 0.$$

Berechnet man hiernach x und darauf y, so folgt:

$$x = 2p, \quad y = \pm\sqrt{r^2 - 2p^2},$$

also nach Elimination von p:

$$\frac{x^2}{2r^2} + \frac{y^2}{r^2} - 1 = 0.$$

Die Einhüllende ist eine Ellipse mit den Halbachsen $r\sqrt{2}$ und r. Doch bemerke man sehr wohl, daß nur diejenigen Kreise in Betracht kommen, für welche

$$|p| \leqq \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

ist. Denn sonst wird die Wurzel, durch welche y bestimmt wird, imaginär. Dafür aber gibt es, wenn $|p|$ sich innerhalb der gesteckten Grenzen hält, stets zwei zur x-Achse symmetrische Berührungspunkte P und P', welche für die Grenzen:

$$p = \pm\frac{r}{2}\sqrt{2}, \quad x = \pm r\sqrt{2}$$

zusammenfallen. (Krümmungskreis im Scheitel der großen Achse [182]). Läßt man $|p|$ noch größer werden, bis $|p| = r$ ist, so bleiben zwar die Kreise reell, aber P und P' werden imaginär.

Die Kreise bleiben dann ganz innerhalb der Ellipse.

201. Sind in der allgemeinen Gleichung der Schar statt eines Parameters p zwei Parameter p und q vorhanden

$$F(x, y, p, q) = 0, \tag{1}$$

ist jedoch dafür zwischen p und q eine Bedingungsgleichung:

$$\varphi(p, q) = 0 \tag{2}$$

gegeben, so könnte man entweder aus letzterer q explizite berechnen und in (1) einsetzen, worauf wieder nach [199] zu verfahren wäre, wie ja auch in den meisten Beispielen geschehen ist, ohne davon ein Aufhebens zu machen. Oder man differenziere (1) total nach p und q:

$$F_p' dp + F_q' dq = 0. \tag{3}$$

Für die Einhüllende muß diese Gleichung richtig sein. Ebenso differenziere man (2) total nach p und q.

$$\varphi_p' dp + \varphi_q' dq = 0, \tag{4}$$

so folgt aus (3) und (4) nach Elimination von dp und dq:

$$F_p' \varphi_q' - \varphi_p' F_q' = 0. \tag{5}$$

Und nun hätte man aus (1), (2) und (5) die beiden Parameter p und q zu eliminieren, um die Gleichung der Einhüllenden zu erhalten.

Besteht im besondern die Schar aus Geraden, wie im ersten, zweiten und vierten Beispiel [200], also aus den Tangenten der zu suchenden Einhüllenden, so kann man etwa für p und q die Abschnitte auf den Achsen (Fig. 85), also (1) in der Form:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$$

nehmen. Da aber p und q im Nenner stehen, so setze man:

$$u = -\frac{1}{p}, \quad v = -\frac{1}{q}$$

und bezeichne, wie in der analytischen Geometrie üblich ist, u und v als Koordinaten der Geraden, als sog. Linienkoordinaten, so daß aus (1) wird:

$$F(x, y, u, v) \equiv ux + vy + 1 = 0. \tag{6}$$

Die Gleichung (2) wird zu einer Gleichung:

$$\varphi(u, v) = 0 \tag{7}$$

zwischen u und v (die sog. Tangentengleichung).

Fig. 85.

Aus (3) und (4) daher:

$$x du + y dv = 0; \qquad \varphi_u' du + \varphi_v' dv = 0, \tag{8}$$

so daß (5) übergeht in:

$$x \varphi_v' - y \varphi_u' = 0. \tag{9}$$

Und nun ist aus (6), (7) und (9) u und v zu eliminieren. So entsteht:

$$\psi(x, y) = 0 \tag{10}$$

als Gleichung der Einhüllenden in „Punktkoordinaten".

Läßt man die Bezeichnung als Einhüllende jetzt fallen, und sagt schlechthin Kurve, so sind (7) und (10) zwei Gleichungen derselben. (10) ist ihre Gleichung in Punktkoordinaten, welche für alle Punkte $P(x, y)$ der Kurve erfüllt wird; (7) dagegen ist ihre Gleichung in Linienkoordinaten, welche für alle Tangenten $l(u, v)$ der Kurve erfüllt wird.

Wie (7) in (10) transformiert wird, hat die eben entwickelte Methode gezeigt. Ist umgekehrt (10) gegeben und will man in (7) transformieren, so bilde man aus (10) zunächst durch totale Differentiation:

$$\psi_x' dx + \psi_y' dy = 0. \tag{11}$$

Andererseits ergibt die totale Differentiation von (6):

$$u\,dx + x\,du + v\,dy + y\,dv = 0 \quad \text{oder} \quad u\,dx + v\,dy = 0, \qquad (12)$$

da nach (8) die Summe des zweiten und letzten Gliedes verschwindet, daher nach Elimination von $dy : dx$ aus (11) und (12):

$$u\psi_y' - v\psi_x' = 0. \qquad (13)$$

Stellt man die fünf Hauptgleichungen in veränderter Reihenfolge so zusammen:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(u, v) = 0, \quad x\varphi_v' - y\varphi_u' = 0, \\ ux + vy + 1 = 0, \\ u\psi_y' - v\psi_x' = 0, \quad \psi(x, y) = 0, \end{array}\right\} \qquad (14)$$

so zeigt sich wieder einmal das große geometrische Prinzip der Dualität zwischen Punkt und Gerade im allgemeinen, sowie zwischen Kurvenpunkt und Kurventangente im besondern, in vollster Klarheit. Man geht nämlich, wie diese Zusammenstellung zeigt, nach genau denselben Vorschriften von den Punkten zu den Tangenten, wie von den Tangenten zu den Punkten der Kurve über. Denn werden in (14) u und v mit x und y, sowie die Funktionen φ und ψ vertauscht, so kehren, wie man sieht, die Gleichungen wieder, nur in umgekehrter Reihenfolge. Nach § 10 und [146] war es ja auch nicht anders zu erwarten. Eine Kurventangente ist die Verbindungsgerade benachbarter Kurvenpunkte und umgekehrt ein Kurvenpunkt ist der Schnittpunkt benachbarter Kurventangenten.

202. In innigster Beziehung hierzu steht als ganz besonderer Fall auch die Theorie von Evolvente und Evolute. Wenn, wie in [180] gezeigt, der Krümmungsmittelpunkt zusammenfällt mit dem Schnittpunkt benachbarter Normalen, so ist eben die Evolute die Einhüllende der Normalen der Kurve. Oder etwas anders ausgedrückt: Die Tangenten der Evolute sind die Normalen der Evolvente.

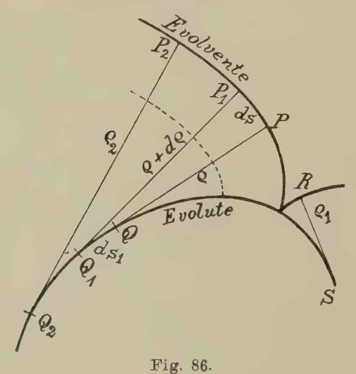


Fig. 86.

Damit wird, wenn die Evolute gegeben ist, die Konstruktion der Evolvente in die Wege geleitet als einer Kurve, welche alle Tangenten der Evolute senkrecht zu schneiden hat. Daraus geht hervor, daß bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung (Fig. 86):

$$Q_1P_1 = QP + QQ_1, \quad Q_1P_1 - QP = QQ_1, \quad \text{d. h.} \quad d\varrho = ds_1, \qquad (1)$$

sein muß, wie ja auch aus den Formeln für ϱ, ξ, η [180] analytisch

sich ableiten ließe. Also auch, wenn man zu endlichen Differenzen übergeht:

$$\varDelta \varrho = \varDelta s_1 \qquad \text{oder} \qquad \varrho_2 - \varrho = s_1, \tag{2}$$

d. h. der Unterschied zweier Krümmungsradien der Evolvente ist gleich der Bogenlänge des zugehörigen Teiles der Evolute.

Doch gilt dieser Satz nur, wenn weder die Evolvente, noch die Evolute in dem betreffenden Spielraum Spitzen (oder Asymptoten) hat. Denn die Gleichung (1) muß eigentlich allgemeiner heißen:

$$d\varrho = \pm\, ds_1, \tag{3}$$

also daß Gleichung (2) nur gültig bleibt, so lange in (3) kein Vorzeichenwechsel eintritt Ein solcher ist aber unvermeidlich, wenn man durch eine Spitze der Evolvente oder der Evolute hindurchgeht.

Man stelle sich etwa $Q_2 P_2$ als einen völlig biegsamen aber unausdehnbaren Faden vor, der sich auf der Evolute aufwickelt. So beschreibt der freie Endpunkt des Fadens die Evolvente $P_2 P_1 P R$. Bei R ist der Faden gänzlich aufgewickelt und man muß, um die Konstruktion über R hinaus weiter fortsetzen zu können, annehmen, daß sich der auf der Evolute liegende Faden über R hinaus nach S fortsetzt, in R abgeschnitten und nun abgewickelt wird. Dann wird die Fortsetzung der Evolvente beschrieben und an Stelle von (2) hat man offenbar:

$$\varrho + \varrho_1 = \text{Bogen } QS.$$

(Statt des Fadens kann man sich auch eine starre unbegrenzt lange Stange denken, welche auf der Evolute rollt, ohne zu gleiten. Denn beschreibt ein fester Punkt der Stange die Evolvente und eine Unterbrechung, wie bei dem Auf- und Abwickeln eines Fadens findet überhaupt nicht statt.)

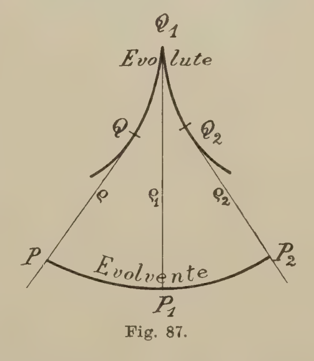


Fig. 87.

Hat aber die Evolute eine Spitze, so geht auch das Abwickeln in ein Aufwickeln über, allerdings auf andere Weise. Vorhin verschwand ϱ für den kritischen Punkt, jetzt ist ϱ für ihn ein Maximum (oder Minimum). Denkt man sich $Q_1 P_1$ als ein Pendel, an dessen Endpunkt P_1 sich ein Gewicht befindet, so legt es sich beim Hin- und Herschwingen abwechselnd an die eine und an die andere Backe der Evolute, so daß der Endpunkt die Evolvente beschreibt. Eine gewisse Berühmtheit hat das hierher gehörende Zykloidenpendel erlangt, bei welchem auch die Evolute aus zwei halben Zykloiden besteht (man denke sich Fig. 21 in [60] umgedreht). Ein solches Pendel schwingt völlig isochron (oder vielmehr würde so schwingen ohne Reibungswiderstände).

Wenn man übrigens die Evolute als gegeben betrachtet, so ist klar, daß eine ganze Schar von Evolventen existieren muß. Bei dem Auf- und Abwickeln des Fadens oder bei dem Rollen der Stange beschreibt jeder Punkt eine Evolvente und alle diese Evolventen haben dieselben Normalen. Je zwei solche Evolventen haben überall denselben senkrechten Abstand, man nennt sie daher auch wohl parallele Kurven. Der einfachste Fall sind konzentrische Kreise, die Evolute ist zu ihrem Mittelpunkt zusammengeschrumpft.

203. Die Theorie der Einhüllenden ist selbstverständlich von Kurven auf Flächen übertragbar. Auch eine Flächenschar kann ihre Einhüllende oder Enveloppe haben, die ganz ebenso gefunden wird, wie bei ebenen Kurven, nämlich indem man die Gleichung der Flächenschar:

$$F(x, y, z, p) = 0 \tag{1}$$

mit der Gleichung:

$$F_p' \equiv \frac{\partial F(x, y, z, p)}{\partial p} = 0 \tag{2}$$

zusammenstellt und p eliminiert. Eine andere Verallgemeinerung würde entstehen, wenn man ein Flächensystem mit zwei Parametern

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{3}$$

voraussetzt, aber nicht etwa so wie in [201] zwischen p und q eine Beziehung annimmt, sondern p und q gänzlich voneinander unabhängig setzt. Auch dann entsteht mit Hilfe der beiden Gleichungen:

$$F_p' = 0, \quad \text{und} \quad F_q' = 0 \tag{4}$$

und der ursprünglichen Gleichung nach Elimination von p und q eine Einhüllende des Flächensystems.

Erstes Beispiel. Ein dreiachsiges Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ändert sich so, daß c und auch:

$$a^2 + b^2 = 2c^2$$

konstant bleibt. Es wird die Einhüllende gesucht.

Lösung: Setzt man $a^2 = p$, $b^2 = 2c^2 - p$, führt p als Parameter ein, so folgt nach Aufstellung von (1) und (2) und Elimination von p als Gleichung der Einhüllenden:

$$\left(y^2 - x^2 - 2c^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\right)^2 - 8c^2x^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) = 0.$$

Sie zerfällt in zwei Flächen zweiten Grades mit den Gleichungen:

$$(y + x)^2 - 2c^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) = 0,$$

$$(y - x)^2 - 2c^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) = 0.$$

Diese beiden Flächen sind, wie die nähere Untersuchung zeigen würde, zwei Kreiszylinder, jeder mit dem Radius $= c$, deren Achsen die Winkel der x- und y-Achse halbieren, also zueinander senkrecht stehen.

Zweites Beispiel. Gegeben:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad a^2 + b^2 + c^2 = l^2, \tag{5}$$

d. h. ein dreiachsiges Ellipsoid, das sich so ändert, daß die Summe der Quadrate der Halbachsen konstant ist. Gesucht die Einhüllende.

Lösung. Man könnte $a^2 = p$, $b^2 = q$, $c^2 = l^2 - (p + q)$ setzen und nach (3) und (4) verfahren; soll aber die Symmetrie gewahrt werden, so differenziere man (5) total nach a, b, c. Es folgt:

$$\frac{x^2}{a^3}\,da + \frac{y^2}{b^3}\,db + \frac{z^2}{c^3}\,dc = 0; \quad a\,da + b\,db + c\,dc = 0. \tag{6}$$

Beide Differentialgleichungen müssen, von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen, dieselbe Beziehung zwischen da, db und dc ergeben. Also:

$$\frac{x^2}{a^3} : \frac{y^2}{b^3} : \frac{z^2}{c^3} = a : b : c,$$

oder:

$$\frac{x^2}{a^4} = \frac{y^2}{b^4} = \frac{z^2}{c^4}$$

oder auch, wenn man die reziproken Werte nimmt und die Wurzel zieht:

$$\pm\frac{a^2}{x} = \pm\frac{b^2}{y} = \pm\frac{c^2}{z}.$$

Man bezeichne den gemeinsamen Wert dieser Brüche mit λ, so folgt:

$$a^2 = \pm\lambda x, \quad b^2 = \pm\lambda y, \quad c^2 = \pm\lambda z$$

und nach Einsetzen in (5):

$$\pm\frac{x}{\lambda} \pm \frac{y}{\lambda} \pm \frac{z}{\lambda} = 1; \quad \lambda(\pm x \pm y \pm z) = l^2,$$

also nach Elimination von λ, durch Multiplizieren:

$$(\pm x \pm y \pm z)^2 = l^2$$

oder:

$$\pm x \pm y \pm z = l.$$

Die Einhüllende besteht daher, den acht möglichen Vorzeichenkombinationen entsprechend aus acht Ebenen, welche von den Koordinatenachsen die Strecken $\pm l$ abschneiden. Sie schließen ein regelmäßiges Oktaeder ein, das von allen dreiachsigen Ellipsoiden berührt wird. Vgl. Beispiel (6) in [200].

204. Die Theorie der Einhüllenden hat noch vielmehr geometrische Untersuchungen zur Folge gehabt, als hier aufgezeigt worden sind. Auch auf Physik, namentlich auf die Optik erstrecken sich ihre Anwendungen. Die katakaustischen Linien spiegelnder Kreise z. B. sind die Einhüllenden der zurückgeworfenen Lichtstrahlen.

Nach dem Huyghensschen Prinzip werden die Lichtwellen als Einhüllende jeden Augenblick neu entstehender, von jedem schwingenden Ätherteilchen ausgehender Wellen betrachtet.

Aber die Theorie der Einhüllenden hat auch eine sehr große, abstrakt analytische Bedeutung, die sich allerdings erst bei vertieften Studien offenbart. So hängt sie mit den sogenannten singulären Lösungen von Differentialgleichungen und mit der berühmten Methode der Variation der Konstanten zusammen, welche von Lagrange zur höchsten Vollendung ausgearbeitet worden ist. Auch manche Substitutionen und Transformationen zur Umformung von Differentialausdrücken gehören hierher. Man nennt sie wohl auch Berührungstransformationen.

Doch das geht schon über die Elemente der Differentialrechnung hinaus.

Übungen zu § 24.

1. Die Einhüllende der Krümmungskreise aller Punkte der Parabel $x^2 = 2py$ ist zu bestimmen.

2. Eine Gerade bewegt sich so, daß die Summe der beiden Strecken, welche sie auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels abschneidet, konstant ist. Gesucht die Einhüllende.

3. Aufgabe wie in 2., nur soll das abgeschnittene Dreieck konstanten Umfang haben.

4. Um alle Punkte auf dem Umfange eines Kreises werden als Mittelpunkte Kugeln beschrieben, welche sämtlich durch einen festen Punkt in der Ebene des Kreises gehen. Gesucht wird die Gleichung der einhüllenden Fläche.

5. Um alle Punkte auf der Oberfläche einer Kugel werden als Mittelpunkte Kugeln beschrieben, welche sämtlich durch einen festen Punkt des Raumes hindurchgehen. Gesucht wird die Gleichung der einhüllenden Fläche.

Sechster Abschnitt.

Analytische Entwicklung von Funktionen.

§ 25. Die unendliche Taylorsche und Maclaurinsche Reihe. Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen.

205. Die Taylorsche Reihe:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^p}{p!} f^p(x) + R \qquad (1)$$

kann mit beliebig vielen Gliedern geschrieben werden, nur ist sie durch das Restglied R zu schließen. Für dieses sind in [157] drei verschiedene Formen aufgezeigt worden, nämlich:

1. Form von Lagrange:

$$R = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{p+1}(x+\lambda h) \qquad (1 > \lambda > 0) \qquad (2)$$

2. Form von Cauchy:

$$R = \frac{h^{p+1}(1-\lambda)^p}{p!} f^{p+1}(x+\lambda h) \qquad (1 > \lambda > 0) \qquad (2a)$$

3. Form von Schlömilch:

$$R = \frac{h^{p+1}(1-\lambda)^{p+1-q}}{q p!} f^{p+1}(x+\lambda h) \qquad (1 > \lambda > 0). \qquad (2b)$$

Die dritte geht für $q = p + 1$ in die erste und für $q = 1$ in die zweite über. Da von λ allgemein nur bekannt ist, daß sein Wert zwischen 0 und 1 liegt, so wird durch jeden der drei Ausdrücke der Rest nur in Grenzen eingeschlossen. Wenn aber trotzdem nachweisbar:

$$\lim_{(p=\infty)} R = 0 \qquad (3)$$

wird, so erhält man auch ohne Rest als unendliche, nach Potenzen von h fortschreitende Potenzreihe

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^p}{p!} f^p(x) + \cdots \text{ in inf.} \qquad (4)$$

Sie läßt sich viel einfacher als durch die früheren Betrachtungen durch die sogenannte Methode der unbestimmten Koeffizienten wie folgt, „beweisen". Angenommen, es existiere eine Potenzreihe für $f(x+h)$:

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \cdots, \qquad (5)$$

so differenziere man einmal, zweimal, dreimal usw. nach h.

$$f'(x+h) = B + 2Ch + 3Dh^2 + \cdots$$
$$f''(x+h) = 1 \cdot 2C + 2 \cdot 3Dh + \cdots$$
$$f'''(x+h) = 1 \cdot 2 \cdot 3D + \cdots$$

usw. Setzt man überall $h = 0$, so folgt:

$$f(x) = A, \quad f'(x) = 1!B, \quad f''(x) = 2!C, \quad f'''(x) = 3!D, \ldots$$

also durch Umkehrung:

$$A = x, \; B = \frac{f'(x)}{1!}, \quad C = \frac{f''(x)}{2!}, \quad D = \frac{f'''(x)}{3!}; \ldots .$$

Die Koeffizienten sind bestimmt. In (5) eingesetzt entsteht wieder (4).

Doch was ist denn eigentlich so bewiesen worden? Doch nicht der Taylorsche Satz selbst, sondern nur, daß wenn eine Potenzreihe für $f(x+h)$ überhaupt existiert, sie mit der Taylorschen Reihe identisch sein muß.

Aber ob und wann die Reihe konvergent ist, ob und wann sie für den Fall der Konvergenz auch wirklich mit $f(x+h)$ übereinstimmt, darüber geht die Methode der unbestimmten Koeffizienten stillschweigend hinweg.

Sie gibt spielend leicht das Bildungsgesetz der Koeffizienten, das ist ihr unleugbarer Vorzug. Sie führt so synthetisch zur Taylorschen Reihe, die in der Tat von Taylor auf diese Weise entdeckt worden ist. Aber die tiefergehenden Untersuchungen, nämlich Konvergenzkriterien für Potenzreihen einerseits (§ 11), sowie die Restbetrachtungen andererseits (§ 18) sind erst später hinzugetreten und haben erst die Gültigkeitsgrenzen des Taylorschen Satzes fest und sicher bestimmt.

206. Die Maclaurinsche Reihe. Man schreibe zunäscht in der Taylorschen Reihe h statt x und x statt h:

$$f(h+x) = f(h) + \frac{x}{1!} f'(h) + \frac{x^2}{2!} f''(h) + \cdots + \frac{x^p}{h!} f^p(h) + R,$$

und setze nun im besonderen $h = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^p}{p!} f^p(0) + R. \qquad (1)$$

Die drei Restformen werden:

$$R = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} f^{p+1}(\lambda x) \qquad \text{nach Lagrange} \qquad (2)$$

$$R = \frac{x^{p+1}}{p!} (1-\lambda)^p f^{p+1}(\lambda x) \qquad \text{nach Cauchy} \qquad (2a)$$

$$R = \frac{x^{p+}}{q \cdot p!} \cdot (1-\lambda)^{p+1-q} f^{p+1}(\lambda x) \qquad \text{nach Schlömilch.} \qquad (2b)$$

Wenn nachweisbar:

$$\lim_{(p=\infty)} R = 0$$

wird, so ergibt sich die Maclaurinsche Reihe ohne Rest:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^p}{p!} f^p(0) + \cdots \text{ in. inf.} \tag{3}$$

als unendliche Potenzreihe für die Funktion $f(x)$.

Die Maclaurinsche Reihe ist also ein besonderer Fall der Taylorschen Reihe. Oder vielmehr, es erscheint nur so, denn genau besehen, ist erstere ebenso allgemein wie letztere. Um dies nachzuweisen, ersetze man zunächst in (3) den Funktionsbuchstaben f durch φ, also:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1!}\varphi'(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \cdots,$$

sodann setze man:

$$\varphi(x) = f(h + x),$$

dann ergibt die beständige Differentiation nach x vgl. [123 17]:

$$\varphi'(x) = f'(h+x); \quad \varphi''(x) = f''(h+x) \cdots,$$

also für $x = 0$:

$$\varphi(0) = f(h), \ \varphi'(0) = f'(h), \ \varphi''(0) = f''(h), \ldots,$$

daher:

$$f(h+x) = f(h) + \frac{x}{1!} f'(h) + \frac{x^2}{2!} f''(h) + \cdots$$

und dies ist wieder der Taylorsche Satz, aus dem Maclaurinschen Satz abgeleitet. Es ist klar wie der Tag, daß die Überführung der Taylorschen in die Maclaurinsche Reihe und umgekehrt einer geometrischen Verschiebung des Ausgangspunktes der Entwicklung von einem beliebigen Punkt der x-Achse zum Anfangspunkt oder umgekehrt entspricht. Zwischen beiden Reihen ist also kein wesentlicher Unterschied.

Der Taylorsche und der Maclaurinsche Satz gelten nach § 22 auch für Funktionen mehrerer Veränderlichen, nur daß der Rest R aus mehreren Gliedern besteht. Ist auch nachweisbar:

$$\lim_{(p=\infty)} R = 0,$$

so wird die Funktion in eine nach Potenzen von h und k, bez. von x und y aufsteigende unendliche Doppelreihe entwickelt.

Eine Hauptanwendung der Taylorschen und Maclaurinschen Reihe betrifft die nun folgende Entwicklung elementarer Funktionen in Potenzreihen.

207. Ist $f(x)$ eine ganze Funktion n^{ter} Ordnung, so hat ihre n^{te} Ableitung einen konstanten Wert und es verschwinden alle höheren

Ableitungen. Also verschwindet auch der Rest R, sobald $p = n$ gesetzt wird. Die Reihe bricht von selbst ab und verwandelt sich in eine geschlossene Summe:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^n}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^n(x), \qquad (1)$$

und nach dem Maclaurinschen Satz:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^n(0). \qquad (2)$$

Es sei z. B. die n^{te} Potenz von x selbst vorgelegt, also:

$$f(x) = x^n,\ f'(x) = nx^{n-1},\ f''(x) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2, \ldots f^n(x) = n!,\ f^{n+1}(x) = 0, \ldots$$

Die Formel (1) ergibt daher:

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1!} h x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} h^2 x^{n-2} + \cdots + h^n,$$

oder [17 2]:

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + h^n,$$

d. h. der Taylorsche Satz hat zu dem binomischen Lehrsatz [19] für ganze Exponenten zurückgeführt, wie es ja auch nicht anders möglich ist.

Ist eine ganze Funktion n^{ten} Grades mehrerer Veränderlicher gegeben, so bricht die Reihe gleichfalls bei den Gliedern n^{ter} Ordnung ab. Man erhält symbolisch [192]:

$$F(x+h,\ y+k) = F(x,\ y) + \frac{\left(h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}\right)}{1!} + \cdots + \frac{\left(h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}\right)^n}{n!},$$

oder nach Vertauschung von x mit h und y mit k:

$$F(h+x,\ k+y) = F(h,\ k) + \frac{x \frac{\partial F}{\partial h} + y \frac{\partial F}{\partial k}}{1!} + \cdots + \frac{\left(x \frac{\partial F}{\partial h} + y \frac{\partial F}{\partial k}\right)^n}{n!}.$$

Beispiel. In der Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung:

$$F(x, y) \equiv a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

(Es soll a_{12} dasselbe sein wie a_{21} usw.)

wird infolge einer Parallelverschiebung

$$x = \alpha + x', \quad y = \beta + y'$$

gesetzt, wo α, β die Koordinaten des neuen Anfangspunktes und x', y' die transformierten Koordinaten bedeuten. Welche Werte haben die sechs Koeffizienten der transformierten Gleichung:

$$\varphi(x', y') \equiv a'_{11} x'^2 + 2 a'_{12} x' y' + a'_{22} y'^2 + 2 a'_{13} x' + 2 a'_{23} y' + a'_{33} = 0.$$

Es soll sein:

$$\varphi(x', y') \equiv F(\alpha + x',\ \beta + y').$$

Daher nach dem Taylorschen Satz (wenn die Glieder nach steigendem Grade geordnet werden):

$a'_{33} = F(\alpha, \beta),\ 2a'_{13} = F'_\alpha,\ 2a'_{23} = F'_\beta;\ 2a'_{11} = F''_{\alpha,\alpha},\ 2a'_{12} = F''_{\alpha,\beta},\ 2a'_{22} = F'_{\beta}{}'_{\beta}$

oder nach Ausführung der Differentiationen, Umkehrung der Reihenfolge der Gleichungen und Fortlassung des Faktors 2 auf beiden Seiten:

$$a'_{11} = a_{11},\ a'_{12} = a_{12},\ a'_{22} = a_{22},$$
$$a'_{13} = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13} = F_\alpha{}' : 2,$$
$$a'_{23} = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23} = F_\beta{}' : 2,$$
$$a'_{33} = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33} = F(\alpha, \beta).$$

Die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades haben sich also nicht geändert. Die Koeffizienten der Glieder ersten Grades hängen von α und β ab und sind Funktionen ersten Grades dieser beiden Größen. Die neue Konstante der Gleichung ist eine Funktion zweiten Grades von α und β.

In gleich einfacher Weise lehrt der Taylorsche Satz für eine beliebige Kurve (oder Fläche) n^{ter} Ordnung die transformierten Koeffizienten bei einer Parallelverschiebung des Koordinatensystems zu ermitteln. So werden die langwierigen Rechnungen, welche das Einsetzen und elementare Ausmultiplizieren nebst darauf folgenden Sammeln entsprechender Glieder zu einem Glied verursachen würde, völlig überflüssig gemacht.

Ist dagegen eine Gleichung n^{ter} Ordnung durch eine beliebige ganze Transformation ersten Grades:

$$x = \alpha + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1$$
$$y = \beta + \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1$$

umzugestalten, so sind vor Anwendung des Taylorschen Satzes erst die partiellen Ableitungen nach [172] zu transformieren, was selbstverständlich die Rechnungen umständlicher macht, aber doch in der Regel immer noch einfacher ist, als das Einsetzen und elementare Ausmultiplizieren.

208. Es sei die Exponentialfunktion vorgelegt:

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x, \ldots,$$
$$f(0) = e^0 = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1, \ldots,$$

Das Restglied der Maclaurinschen Reihe wird in der Lagrangeschen Form:

$$R = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} e^{\lambda x}.$$

Der zweite Faktor liegt gemäß den Grenzen für λ zwischen:

$$e^{0x} = 1, \quad \text{und } e^{1x} = e^x.$$

Er ist und bleibt also endlich, wenn x endlich ist. Der erste Faktor wird unendlich klein, wenn p unendlich groß wird. Die Bedingung:

$$\lim_{(p=\infty)} R = 0$$

ist erfüllt und man erhält nach Maclaurin:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \text{in inf.} \tag{1}$$

für jeden (endlichen) Wert von x. Der Maclaurinsche Satz hat, wie zu erwarten, auf die Exponentialreihe zurückgeführt (§ 12).

Auch bei Anwendung der Taylorschen Reihe wird $\lim R = 0$ für $\lim p = \infty$. Daher:

$$e^{x+h} = e^x + \frac{h}{1!}e^x + \frac{h^2}{2!}e^x + \frac{h^3}{3!}e^x + \cdots \text{in inf.}$$

$$= e^x\left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots\right),$$

oder nach (1):

$$e^{x+h} = e^x \cdot e^h.$$

Der Taylorsche Satz hat auf die Funktionalgleichung der Exponentialfuuktion geführt, wie zu erwarten war. In Erinnerung gebracht seien ferner aus [111] die beiden Reihen für die Hyperbelfunktionen:

$$\mathfrak{Cos}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \text{in inf.} \tag{2}$$

$$\mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \text{in inf.}, \tag{3}$$

welche auch selbständig mittelst des Maclaurinschen Satzes wie folgt abgeleitet werden könnten. Es sei:

$$f(x) = \mathfrak{Cos}\, x,\ f'(x) = \mathfrak{Sin}\, x,\ f''(x) = \mathfrak{Cos}\, x,\ f'''(x) = \mathfrak{Sin}\, x, \ldots,$$

also für $x = 0$:

$$f(0) = \mathfrak{Cos}\,(0) = 1,\ f'(0) = \mathfrak{Sin}\,(0) = 0,\ f''(0) = 1,\ f'''(0) = 0, \ldots$$

Der Rest ist in der Form von Lagrange:

$$R = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}\mathfrak{Cos}\,(\lambda x) \quad \text{oder} \quad R = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}\mathfrak{Sin}\,(\lambda x),$$

je nachdem p gerade oder ungerade ist. In beiden Fällen bleibt der zweite Faktor endlich, während der erste unendlich klein wird, wenn p unbegrenzt wächst. Die Maclaurinsche Reihe führt daher auch zu (2) und ebenso zu (3).

Die Reihenentwicklung für die Funktion:

$$\mathfrak{Tg}\, x = \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Cos}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

nach Maclaurin (oder Taylor) stößt auf erhebliche Schwierigkeiten,

weil die Ableitungen immer mehr Arbeit machen, je größer p wird, da zwar ihr allgemeines Bildungsgesetz einfach genug ist, aber die Bestimmung der Koeffizienten Mühe macht. Man erhält:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathfrak{Tg}\,x, \\ f'(x) &= 1 - \mathfrak{Tg}^2 x, \\ f''(x) &= -2\,\mathfrak{Tg}\,x + 2\,\mathfrak{Tg}^3 x, \\ f'''(x) &= -2 + 8\,\mathfrak{Tg}^2 x - 6\,\mathfrak{Tg}^4 x \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und für $x = 0$:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -2, \ldots,$$

daher:

$$\mathfrak{Tg}\,x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

Das dritte Glied hiernach als:

$$+\frac{x^5}{5}$$

anzunehmen, wäre sehr voreilig, weil diese Induktion sich nur auf zwei bekannte Glieder stützt. Man kann dabei das Richtige, aber auch das Falsche treffen. In diesem Falle wäre es das Falsche, wie sowohl die wirkliche Berechnung des dritten Gliedes nach Maclaurin, als auch die gewöhnliche Division der Reihen für $\mathfrak{Sin}\,x$ und $\mathfrak{Cof}\,x$ zeigt:

$$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots : 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \ldots$$

$$\begin{array}{l} +x + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24} \\ -\quad\ -\quad\ - \\ \hline \qquad -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} \ldots \\ \qquad -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{6} \\ \qquad +\quad\ + \\ \hline \qquad\qquad +\dfrac{2x^5}{15}. \end{array}$$

Das dritte Glied hat also nicht den Koeffizienten $1:5$, sondern $2:15$. Es ist:

$$\mathfrak{Tg}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \ldots \tag{4}$$

Es tritt vorläufig kein einfaches Bildungsgesetz der Koeffizienten hervor. Nur ist leicht erweislich, daß wie bisher nur ungerade Potenzen von x vorkommen können, also allgemein:

$$\mathfrak{Tg}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - Ax^7 + Bx^9 + \cdots$$

zu setzen wäre. Denn die Funktion ist „ungerade“, d. h. es ist $\mathfrak{Tg}(-x) = -\mathfrak{Tg}\,x$, und nur die ungeraden Potenzen wechseln mit x ihr Vorzeichen. (Die wirkliche Berechnung der Koeffizienten würde auf die schon einmal gelegentlich [27] genannten Bernoullischen Zahlen führen. Auch ist die Konvergenz an die Ungleichung $x \leqq \frac{\pi}{2}$ geknüpft).

Die Entwicklung der Funktion:

$$f(x) = \mathfrak{Kotg}\,x = \frac{\mathfrak{Kof}\,x}{\mathfrak{Sin}\,x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

ist nach Maclaurin ganz unmöglich, da das Anfangsglied

$$f(0) = \mathfrak{Kotg}\,(0) = \pm \tfrac{1}{0} = \pm \infty$$

sein würde. Die Reihe müßte mit $\pm \infty$ beginnen, wäre also völlig divergent, wie sich obendrein auch bei den folgenden Gliedern bestätigt, da deren Koeffizienten ebenfalls unendlich werden.

209. Es sei gegeben die trigonometrische Funktion:

$$f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = +\sin x, \ldots$$

Für $x = 0$ wird:

$$f(0) = +1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ f''''(0) = +1, \ldots$$

und der Rest R nach Lagrange erhält die Gestalt:

$$\pm \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \sin(\lambda x) \quad \text{oder:} \quad \pm \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \cos(\lambda x),$$

je nachdem p gerade oder ungerade ist. Der zweite Faktor bleibt endlich, der erste wird mit unbegrenzt zunehmendem p unendlich klein. Es ist daher für jeden (endlichen) Wert von x nach Maclaurin:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \text{ in inf.} \tag{1}$$

Genau so ergibt sich:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ in inf.} \tag{2}$$

Die Anwendung des Taylorschen Satzes hat die Gleichung zur Folge:

$$\cos(x+h) = \cos x - \frac{h}{1!}\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \frac{h^4}{4!}\cos x \ldots,$$

$$= x\left(1 - \frac{h^2}{2!} + \cdots\right) - \sin x\left(\frac{h}{1!} - \frac{h^3}{3!} + \cdots\right),$$

also nach (1) und (2):

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h,$$

d. h. eine der bekanntesten Formeln der Trigonometrie ist streng

analytisch abgeleitet worden. Ebenso ergibt der Taylorsche Satz für den Sinus:

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h.$$

Die Reihenentwicklungen für

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

nach Maclaurin und Taylor stoßen genau wie bei der entsprechenden Hyperbelfunktion und aus denselben Gründen auf erhebliche Schwierigkeiten. Man erhält ganz wie dort:

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + A x^7 + B x^9 + \cdots \tag{3}$$

und die Koeffizienten haben sogar die gleichen absoluten Werte, nur sind sie hier sämtlich positiv, dort abwechselnd positiv und negativ. Also gerade umgekehrt wie bei:

$$\mathfrak{Sin}\, x \text{ und } \sin x, \quad \text{oder:} \quad \mathfrak{Cos}\, x \text{ und } \cos x,$$

denn auch bei diesen Funktionen sind die absoluten Werte der Koeffizienten die gleichen, nur sind sie bei der Hyperbelfunktion sämtlich positiv, bei der trigonometrischen Funktion dagegen abwechselnd positiv und negativ.

Die Entwicklung der Funktion

$$f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ist nach Maclaurin ganz unmöglich, weil auch, wie bei der entsprechenden Hyperbelfunktion der „Nullwert" unendlich ist:

$$f(0) = \operatorname{cotg} 0 = \pm \infty.$$

210. Potenzreihen für Logarithmen. Man setze:

$$f(x) = \ln x,\ f'(x) = \frac{1}{x},\ f''(x) = -\frac{1}{x^2},\ f'''(x) = +\frac{2!}{x^3},\ f''''(x) = -\frac{3!}{x^4}, \cdots$$

Die Entwicklung nach Maclaurin ist unmöglich, weil die „Nullwerte" der Funktion und ihre Ableitungen sämtlich $= \pm \infty$ werden.

Für die Beurteilung des Restes nach Taylor eignet sich diesmal die Restform von Cauchy besser. Man erhält:

$$R = \pm \frac{h^{p+1}}{p!} (1-\lambda)^p \cdot \frac{p!}{(x+\lambda h)^{p+1}} = \frac{h}{x+\lambda h} \left(\frac{h(1-\lambda)}{x+\lambda h}\right)^p.$$

Sowohl x wie $x+h$ muß positiv sein, weil sonst $\ln x$ oder $\ln(x+h)$ nicht reell sein würden. Es sei $|h| < x$. Dann ist der erste Bruch endlich, weil der Nenner nicht verschwinden kann. Der zweite ist auch endlich und sein absoluter Wert ist kleiner als 1. Denn setzt man erstens h positiv, so wird auch der Zähler positiv und kleiner als der Nenner, da die Differenz Nenner — Zähler:

$$(x+\lambda h) - (h(1-\lambda)) = (x-h) + 2\lambda h$$

positiv ist. Setzt man aber zweitens h negativ, so wird der Zähler negativ, aber sein absoluter Wert wird auch kleiner als der Nenner, da die Summe Nenner + Zähler = Nenner — (— Zähler):

$$(x + \lambda h) + h(1 - \lambda) = x + h$$

positiv ist. Die p^{te} Potenz des zweiten Bruches, folglich auch R wird daher mit wachsendem p unendlich klein. Also:

$$\ln(x+h) = \ln x + \frac{h}{1!}\cdot\frac{1}{x} + \frac{h^2}{2!}\cdot\frac{-1}{x^2} + \frac{h^3}{3!}\cdot\frac{2!}{x^3} + \frac{h^4}{4!}\cdot\frac{-3!}{x^4}\cdots \text{ in inf.}$$

oder vereinfacht:

$$\ln(x+h) = \ln x + \frac{\frac{h}{x}}{1} - \frac{\left(\frac{h}{x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{h}{x}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{h}{x}\right)^4}{4} + \cdots \text{ in inf.} \quad (|h| < x). \tag{1}$$

Ist dagegen $|h| > x$, so ergibt sich die Unrichtigkeit dieser Gleichung auch ohne Restbetrachtungen, unmittelbar aus dem Kriterium [94 8], welches die Divergenz der Reihe (1) zeigt. Fängt man die Entwicklung bei $x = 1$ an und setzt dann statt h wieder x, so folgt, da $\ln 1 = 0$ ist:

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\cdots \text{ in inf.} \quad (|x| < 1), \tag{2}$$

sie gilt auch noch für die Grenzen und gibt für $x = +1$

$$\ln 2 = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}\cdots, \tag{3}$$

(eine sehr schlecht konvergente Reihe) und für $x = -1$:

$$\ln 0 = -1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\cdots.$$

Die Reihe divergiert [92] gegen $-\infty$, und es ist ja auch:

$$\ln 0 = -\infty.$$

Übrigens hätte (2) auch auf folgende Weise aus (1) abgeleitet werden können. Man bringe das erste Glied rechts auf die linke Seite und forme um:

$$\ln(x + h) - \ln x = \ln\frac{x+h}{x} = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

und setze darauf $\frac{h}{x}$ statt x.

Reihen für die hyperbolischen Areafunktionen. Aus (2) folgt sofort:

$$\ln(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\cdots \text{ in inf.} \quad (|x| < 1) \tag{3}$$

und nach Subtraktion von (2), Division durch 2 und Anwendung von [67]

$$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\cdots \text{ in inf.} \quad (|x| < 1). \tag{4}$$

Selbstverständlich hätte diese Formel (4) auch direkt nach Maclaurin statt aus (2) und (3) abgeleitet werden können. Auch

die Methode der unbestimmten Koeffizienten würde, wie folgt, zum Ziele führen. Da die Funktion ungerade ist, so setze man:

$$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = x) = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \cdots$$

und differenziere beide Seiten. Es folgt nach IV [124]

$$\frac{1}{1-x^2} = A + 3Bx + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \cdots$$

Es ist aber auch [93 10], wenn x durch x^2 ersetzt wird:

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots, \qquad (|x| < 1)$$

also, nach Vergleichung der Koeffizienten:

$$A = 1,\ 3B = 1,\ 5C = 1,\ 7D = 1, \ldots$$
$$A = 1,\ B = \tfrac{1}{3},\ C = \tfrac{1}{5},\ D = \tfrac{1}{7} \cdots.$$

Damit sind die Koeffizienten in (4) wieder gefunden.

In ähnlicher Weise lassen sich die Koeffizienten in der Entwicklung von:

$$f(x) = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

finden. Da die Funktion ungerade ist, so setze man:

$$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \cdots$$

und differenziere beide Seiten nach x. Es folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \cdots.$$

Andrerseits ist nach dem verallgemeinerten binomischen Lehrsatz [212], wenn $n = -\frac{1}{2}$ und x^2 statt x gesetzt wird:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 \cdots. \qquad (|x| < 1)$$

Die Vergleichung der Koeffizienten gibt daher:

$$A = 1,\ B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3},\ C = +\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5},\ D = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7}, \cdots,$$

folglich, wenn $|x| < 1$, die gesuchte Reihe:

$$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (5)$$

Eine Potenzreihe für

$$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kof} = x) = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

und für

$$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kotg} = x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

existiert nicht, weil die Funktionen für $x = 0$ als (reelle) Größen leere Ausdrücke werden und erst für $x > 1$ bez. $|x| > 1$ einen Sinn erhalten (§ 7).

211. Reihen für die Arcusfunktionen:

$$f(x) = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x),\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ f'''(x) = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}, \cdots,$$

also für $x = 0$, wenn $\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)$ nach [53] auf den Spielraum von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ beschränkt wird:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -2, \ldots$$

Daher nach Maclaurin:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

Das nächste Glied $= + x^5 : 5$ zu setzen, wäre genau ebenso gewagt, wie in [208]. Dort wäre es falsch gewesen, hier aber trifft man das Richtige, wie die höheren Ableitungen, die aber nicht leicht zu haben sind [239], zeigen würden. Am einfachsten aber macht man den Ansatz:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) = Ax + Bx^3 + Cx^5 + \cdots$$

und differenziert nur einmal. Es folgt:

$$\frac{1}{1+x^2} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + \cdots,$$

andererseits ergibt aber die geometrische Reihe [93 10], wenn x durch $-x^2$ ersetzt wird:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots \quad (|x| < 1),$$

Daher nach Vergleichung der Koeffizienten:

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = +\frac{1}{5}, \quad D = -\frac{1}{7}, \cdots,$$

also die gesuchte Entwicklung:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \cdots \text{ in inf.} \qquad (|x| < 1). \quad (1)$$

Entsprechend kann mit:

$$f(x) = \operatorname{arc}(\sin = x)$$

verfahren werden. Man setze, da es sich um eine ungerade Funktion handelt, (so lange man nach der Vereinbarung [53] den Arcus zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ nimmt),

$$\operatorname{arc}(\sin = x) = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \cdots$$

und differenziere einmal. Es folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \cdots,$$

andererseits gibt der verallgemeinerte binomische Lehrsatz [212] für $n = -\frac{1}{2}$, wenn x durch $-x^2$ ersetzt wird:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \cdots \text{ in inf.} \qquad (|x| < 1),$$

also folgt durch Koeffizientenvergleichung:

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad C = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5}, \quad D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7}, \ldots,$$

daher die gesuchte Reihe:

$$\operatorname{arc}(\sin = x) = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} \cdots \text{ in inf. } (|x| < 1). \quad (2)$$

Aus den Reihen für $\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)$ und $\operatorname{arc}(\sin = x)$ folgen endlich noch die Reihen für:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) \quad \text{und} \quad \operatorname{arc}(\cos = x)$$

nach (1) und (1a) in [54]:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \cdots \text{ in inf. } (|x| < 1), \quad (3)$$

$$\operatorname{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}(\sin = x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \cdots \text{ in inf. } (|x| < 1). \quad (4)$$

212. Der binomische Lehrsatz für beliebige Exponenten. Es sei:

$$f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \ldots,$$
$$f^p(x) = n(n-1)\ldots(n-(p-1))x^{n-p}, \ldots$$

und n beliebig, x also positiv nach [40].

Der Rest von Taylor ist diesmal nicht ganz leicht zu behandeln. Am vorteilhaftesten stellt sich die Restform von Cauchy heraus, welche ergibt:

$$R = \frac{h^{p+1}}{p!}(1-\lambda)^p \cdot n(n-1)\ldots(n-p) \cdot (x+\lambda h)^{n-p-1}$$

oder:

$$R = [nh(x+\lambda h)^{n-1}] \cdot \left[\frac{h(1-\lambda)}{x+\lambda h}\right]^p \cdot \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1 \cdot 2 \ldots p}.$$

Es sei $|h| < x$. Der erste Faktor ist endlich, der zweite wird (wie in ([210]) mit unbegrenzt wachsendem p unendlich klein. Es bleibt also noch der dritte Faktor übrig, der der Kürze wegen bezeichnet werden mag als:

$$A = \frac{(n-1)\ldots(n-p)}{1 \cdot 2 \ldots p}.$$

Wenn n positiv und > 1 ist, so macht er nicht viel Schwierigkeiten. Man setze, da n sonst beliebig ist:

$$n = 1 + m + \varepsilon,$$

wo m eine positive ganze Zahl (einschließlich 0) und ε einen positiven echten Bruch bedeutet. Außerdem werde p, da es unbegrenzt wachsen soll, von Anfang an $> m + 1$ vorausgesetzt. Man erhält:

$$A = \frac{(m+\varepsilon)(m-1+\varepsilon)\ldots\varepsilon\cdot(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)\ldots(\varepsilon-(p-m-1))}{1\cdot 2\ldots p}$$

$$= \pm\frac{(1-\varepsilon)\cdot(2-\varepsilon)\ldots(p-(m+1)-\varepsilon)}{1\cdot 2\ldots(p-(m+1))}\cdot\frac{\varepsilon\cdot(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+m)}{(p-m)((p-m)+1)\ldots((p-m)+m)}.$$

Der erste Bruch ist echt, weil jeder Faktor im Zähler um ε kleiner ist als der entsprechende Faktor im Nenner. Der zweite Bruch ist auch echt, weil jeder Faktor im Zähler um $p - m - \varepsilon$ kleiner ist, als der entsprechende Faktor im Nenner.

Ist n positiv aber kleiner als 1, so bedarf es dieser Umformung erst gar nicht, weil von vornherein jeder Faktor im Zähler absolut kleiner ist, als der entsprechende Faktor im Nenner. Daher:

Ist n positiv, so ergibt sich entweder für jedes p oder für hinreichend große p:

$$|A| < 1, \quad \text{also} \quad \lim_{(p=\infty)} R = 0,$$

folglich nach Taylor:

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h^2 + \cdots \text{ in inf.}, \quad (|h| < x),$$

oder auch:

$$\boldsymbol{(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots \text{ in inf.}}, \qquad (1)$$

also wie bei ganzen Exponenten n, nur daß die Reihe jetzt niemals abbricht [18]. Wenn aber n negativ ist, so wird das obige Beweisverfahren für das Verschwinden von R hinfällig, weil sich herausstellt, daß $\lim A = \infty$ wird. Man kann sich aber dann wie folgt durch Übergang von n auf $n-1$ helfen: Es werde (1) nach x differenziert. Nach Division durch n und Anwendung der Formel [17 4_β] ergibt sich:

$$(x+h)^{n-1} = x^{n-1} + \binom{n-1}{1}x^{n-2}h + \binom{n-1}{2}x^{n-3}h^2\ldots,$$

d. h. wieder die Formel (1), nur $n-1$ statt n geschrieben.

Der Übergang von n auf $n-1$ ist also als richtig erwiesen. Nun gilt (1) wie bereits gezeigt, für positive Exponenten. Da aus einer beliebigen positiven Zahl durch beliebig oft wiederholte Subtraktion von 1 eine beliebige negative Zahl entstehen kann, so folgt auch die Gültigkeit für negative n. Also gilt (1) allgemein für alle Exponenten, so lange $|h| < x$ ist. Ist aber $h > x$, so divergiert die Binomialreihe, wie das Kriterium III [94] bei seiner Anwendung beweist.

Setzt man im besonderen $n = -1$ und $-x$ statt h, so entsteht wieder die geometrische Reihe [93]:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \text{ in inf.} \qquad (|x| < 1).$$

213. Es ließen sich noch viele lehrreiche Beispiele zur Entwicklung von Funktionen nach Taylor und Maclaurin anknüpfen. Schwierigkeiten können entstehen, erstens bei der Bildung der allgemeinen abgeleiteten Funktion, wenn das betreffende Gesetz nicht auf den ersten Blick erkennbar ist, sondern durch tiefere Untersuchungen erst herauszubringen wäre. Und zweitens bei dem Nachweis, daß der Rest R unendlich klein wird, was durchaus nicht immer einfach ist.

Gegebenen Falles nur zu beweisen, daß die Taylorsche oder Maclaurinsche Reihe konvergiert, genügt nicht für völlige Strenge. Man muß auch zeigen, daß sie gegen den Funktionswert konvergiert, welchem sie gleich gesetzt wird, darin besteht ja der eigentliche Sinn der Ausdrücke für den Rest R der Reihe.

Übungen zu § 25.

1. Die beiden Potenzreihen für $\ln \cos x$ und $\ln \mathfrak{Cos}\, x$ sind zu ermitteln. Spielraum der Konvergenz ist zu bestimmen.

2. Gegeben die Keplersche Gleichung

$$M = E - e \sin E.$$

Es soll bei gegebenen M die Größe E als Funktion von e in eine Potenzreihe entwickelt werden. Berechnung der Glieder bis zur sechsten Potenz. Ist ein einfaches Bildungsgesetz für diese Glieder vorhanden?

3. $\sqrt{1 + 3x + 2x^2}$ ist in eine Potenzreihe von x zu entwickeln. Die Koeffizienten bis zur sechsten Potenz sind zu ermitteln. Versuch, ein einfaches Bildungsgesetz und den Spielraum der Konvergenz festzustellen.

§ 26. Numerische Berechnungen von Funktionswerten durch Potenzreihen.

214. Die in § 25 abgeleiteten Reihen geben nicht allein vorzügliche analytische Darstellungen der betreffenden Funktionen ab, sondern sind außerdem für ihre tabellarischen Berechnungen vortrefflich geeignet. Man setze für x seinen Ziffernwert ein, berechne soviel Glieder, bis der Rest für die gewählte Anzahl von Dezimalen ohne

Belang ist und bilde die algebraische Summe. Ein erstes Beispiel ist schon in § 12 enthalten, nämlich die Berechnung von e durch die Reihe:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \cdots,$$

welche aus der Exponentialreihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots$$

entsteht für $x = 1$. Man kann aber auch für x beliebige Werte setzen, und dabei planmäßig verfahren, etwa in der Absicht, eine Tafel der Exponentialfunktion herzustellen. Der Spielraum, in welchem sie gebraucht wird, etwa von $x = -10$ bis $x = +10$, wird dann am besten in angemessen kleine und gleiche Teile geteilt. Bei dreistelligem Eingang hinter dem Komma wird man also setzen:

$$x = -10{,}000, \quad -9{,}999, \quad -9{,}998 \ldots, \quad +9{,}999, \quad +10{,}000$$

usw. Man kann sich auch die Funktionalgleichung:

$$e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}, \quad e^{x_1 - x_2} = e^{x_1} : e^{x_2} = e^{x_1} e^{-x_2}$$

zu Nutze machen, z. B. zur Kontrolle, für welche sich auch die Bildung von Differenzen, welche „laufen" müssen, sehr gut eignet. Oder man ziehe auch Interpolationsformeln heran, falls die Abweichung nachweisbar unter der Fehlergrenze bleibt (vgl. z. B. [136]), um zur Erleichterung der Arbeit die Werte von x, welche einzusetzen bleiben, auf eine möglichst geringe Zahl herabzudrücken. Erlaubte Abkürzungen und zweckmäßige Kontrollen machen eine solche Tafelrechnung weniger langweilig, geben die erforderliche Sicherheit und ersparen Zeit.

Die Tafel der Exponentialfunktion wird meist in Verbindung mit der Tafel der mit ihnen so innig verknüpften Hyperbelfunktionen gebracht. Sollte nur letztere vorhanden sein, so kann erstere sofort durch Addition oder Subtraktion nach den Formeln:

$$e^x = \mathfrak{Kos}\, x + \mathfrak{Sin}\, x, \quad e^{-x} = \mathfrak{Kos}\, x - \mathfrak{Sin}\, x$$

ergänzt werden.

215. Berechnung der Logarithmen. Für Werte des numerus, welche nur wenig von 1 abweichen, ist die Reihe [210 2]

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \text{ in inf.} \quad (|x| < 1) \qquad (1)$$

konvergent genug. Sie gibt z. B.

$$\ln 1{,}1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} - \frac{1}{40000} \cdots.$$

Jedes Glied ist absolut kleiner als der 10te Teil des vorher-

gehenden, so daß zur Berechnung auf acht Stellen sicherlich nicht mehr als acht Glieder gebraucht werden. Man erhält:

$$\ln 1,1 = 0{,}09531017\ldots$$

Weicht der numerus erheblich von 1 ab, so wird die Konvergenz schlecht und geht zuletzt in Divergenz über.

Man könnte sich helfen, indem man den numerus in Faktoren zerlegt, welche sämtlich nur wenig von 1 verschieden sind und dann die logarithmische Formel

$$\ln(a \cdot b \cdot c \ldots) = \ln a + \ln b + \ln c + \cdots$$

anwendet. Aber bei systematischer Berechnung fährt man viel besser, durch rekursorische Anwendung von [210 1] von x auf $x + h$ überzugehen, indem für h die kleine Differenz zweier aufeinander folgender numeri gesetzt wird z. B.:

$$\ln 4{,}125 = \ln 4{,}124 + \frac{1}{4124} - \frac{1}{2 \cdot (4124)^2} + \frac{1}{3 \cdot (4,124)^3} - \cdots.$$

Man erkennt sofort, daß bei Berechnung auf sieben Stellen der erste Bruch $1 : 4124$ genügen würde.

Doch noch vorteilhafter ist es, von vornherein nur die Formel [210 4] zu benutzen. Man setze:

$$\frac{1+x}{1-x} = z, \quad x = \frac{z-1}{z+1},$$

also:

$$\ln z = 2\left[\frac{\frac{z-1}{z+1}}{1} + \frac{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5}{5} + \cdots\right]. \tag{2}$$

Die Bedingung $|x| < 1$ verwandelt sich in die Bedingung $z > 0$, welche für den numerus überhaupt keine Einschränkung bedeutet, da er nicht negativ sein kann.

Die Formel (2) hat daher zunächst den Vorzug, immer brauchbar zu sein. Sie gibt z. B. für $z = 2$

$$\ln 2 = \left[\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \cdots\right].$$

Welch ein Unterschied in der Schnelligkeit der Konvergenz zwischen dieser Reihe und der Reihe [210 3]! Letztere konvergiert so schlecht, daß zur Berechnung auf nur 7 Stellen sicherlich mehr als zehn Millionen Glieder notwendig sind, während bei ersterer jedes Glied kleiner ist als der neunte Teil des vorhergehenden, also sieben Glieder völlig ausreichen würden.

Bei der Berechnung wird man der Abrundungsfehler wegen jedes Glied auf eine Dezimale mehr berechnen, als festgesetzt wurde

und erst bei der Summe die letzte Dezimale kürzen. Es seien etwa acht Dezimalen gesetzt:

1. $2:3^1$	$=0{,}666$	666	667	1tes Glied	$=0{,}666$	666	667
2. $2:3^3$	$=0{,}074$	074	074	2tes „	$=0{,}024$	691	358
3. $2:3^5$	$=0{,}008$	230	453	3tes „	$=0{,}001$	646	091
4. $2:3^7$	$=0{,}000$	914	495	4tes „	$=0{,}000$	130	642
5. $2:3^9$	$=0{,}000$	101	611	5tes „	$=0{,}000$	011	290
6. $2:3^{11}$	$=0{,}000$	011	290	6tes „	$=0{,}000$	001	026
7. $2:3^{13}$	$=0{,}000$	001	254	7tes „	$=0{,}000$	000	096
8. $2:3^{15}$	$=0{,}000$	000	139	8tes „	$=0{,}000$	000	009
9. $2:3^{17}$	$=0{,}000$	000	015	9tes „	$=0{,}000$	000	001
				ln 2	**= 0,693**	**147**	**180.**

Die letzte Stelle ist wegen der Abrundung unsicher, die andern aber sind richtig.

Wird der numerus größer, so verschlechtert sich die Konvergenz. Für $z = 10$ erhält man z. B.:

$$\ln 10 = 2\left[\frac{1}{1}\cdot\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \cdots\right]$$

und braucht mindestens 3 mal so viel Glieder. Man zerlegt daher am besten den numerus in Faktoren, etwa:

$$10 = 2^3\cdot\tfrac{5}{4}, \quad \ln 10 = 3\ln 2 + \ln\tfrac{5}{4}$$

und wendet nun auf den letzten Logarithmus (2) an. Es folgt:

$$\ln\frac{5}{4} = \frac{2}{1\cdot 9} + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{3\cdot 9^5} + \frac{2}{3\cdot 9^7} + \cdots.$$

$2:\ \ 9^1$	$=0{,}222$	222	222
$2:3\cdot 9^3$	$=0{,}000$	914	495
$2:5\cdot 9^5$	$=0{,}000$	006	774
$2:7\cdot 9^7$	$=0{,}000$	000	060
$2:9\cdot 9^9$	$=0{,}000$	000	001
$\ln\frac{5}{4}$	$=0{,}223$	143	552
$3\ln 2$	$=2{,}079$	441	540
ln 10	**= 2,302**	**585**	**092.**

Bei systematischer Berechnung einer Tafel der natürlichen Logarithmen würde man selbstverständlich von den in [214] erwähnten Hilfsmitteln den vielseitigsten Gebrauch machen, um die Arbeit auf ein Minimum einzuschränken. Hier aber genügen wohl die beiden Beispiele.

Aus den natürlichen folgen die Briggsschen Logarithmen nach [43]:

$$\log x = M\ln x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

So z. B. für $x = 2$

$$\log 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} = \frac{0{,}693147180}{2{,}302585092} = \mathbf{0{,}30103000}$$

auf acht Stellen genau.

Im Thesaurus logarithmorum von Vega findet man abgedruckt eine Tafel der natürlichen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000, berechnet von Wolfram auf 48 Stellen. Die Briggsschen Logarithmen haben in diesem Thesaurus einen fünfzifferigen Eingang für den numerus, sind aber selbst auf zehn Stellen angegeben. Seitdem sind natürliche Logarithmen sogar auf 200 Dezimalen und Briggssche Logarithmen auf 100 Dezimalen berechnet worden.

Im übrigen sind über die hochinteressante Entwicklung der Logarithmenberechnung von den ersten Anfängen bis zur systematischen Berechnung nach den Formeln von Taylor, wie sie soeben in den Grundzügen auseinander gesetzt worden ist, geschichtliche Werke der Mathematik nachzulesen.

216. Berechnung der Zahl π. Setzt man in der Reihe [211 1] den äußersten Wert, für welchen sie noch gilt, nämlich:

$$x = 1, \quad \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} 45^0,$$

so folgt die Leibnizsche Reihe für die Zahl π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \cdots. \tag{1}$$

Sie ist aber schon vor Leibniz entdeckt worden. Auch hat sie eigentlich nur geschichtlichen Wert als erster wirklich ziffernmäßiger Ausdruck für π, denn ihrer äußerst schlechten Konvergenz wegen ist sie selbstverständlich niemals wirklich benutzt worden.

Besser wäre schon, man setzte:

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \operatorname{artg}(\operatorname{tg} = x) = \frac{\pi}{6} = \operatorname{arc} 30^0,$$

daher:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}\cdots\right). \tag{2}$$

Hiernach läßt sich π schon eher berechnen, da jedes Glied kleiner als der dritte Teil des vorhergehenden ist und also zwei neue Glieder immer ungefähr eine neue Dezimale ergeben. Doch hält es nicht schwer, noch erheblich konvergentere Reihen für π aufzutreiben. Man nehme etwa zwei spitze Winkel φ und ψ in Bogenmaß durch die Bedingungen

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{1}{3},$$

so wird nach IV [51]:

$$\operatorname{tg}(\varphi+\psi) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$

Die Umkehrung der beiden ersten Formeln gibt nach [211 1]:

$$\varphi = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdots \tag{3}$$

$$\psi = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdots \tag{4}$$

Andererseits gibt die Umkehrung der dritten Formel:

$$\varphi + \psi = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = 1) = \frac{\pi}{4}. \tag{5}$$

Die beiden Reihen (3) und (4) sind erheblich konvergenter als (2). Oder man nehme einen spitzen Winkel φ im Bogenmaß durch die Bedingung:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{5},$$

so folgt:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}$$

und:

$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}.$$

Da der Bruch um ein wenig größer ist als 1, wird 4φ um ein wenig größer sein als $\frac{\pi}{4}$. Man setze daher:

$$4\varphi = \frac{\pi}{4} + \psi, \qquad \psi = 4\varphi - \frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}4\varphi - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}4\varphi\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Man berechne daher φ und ψ durch die Reihen

$$\varphi = \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots, \tag{6}$$

$$\psi = \frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \cdots, \tag{7}$$

so folgt:

$$\pi = 16\varphi - 4\psi. \tag{8}$$

Man nennt π bekanntlich auch die Ludolfsche Zahl, weil sie von Ludolf von Ceulen zuerst auf 35 Stellen berechnet worden ist. Jetzt kennt man ihren Wert auf 1000 Dezimalen.

217. Berechnung der trigonometrischen Tafeln. Diese Tafeln sind für den praktischen Gebrauch bestimmt und setzen daher die Winkel im Gradmaß voraus. Da aber π mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden kann, so macht dies bei der Benutzung der Formeln (1) und (2) [209] wenig aus. So ist z. B.

$$5^0 = \frac{\pi}{36},$$

daher:

$$\cos 5^0 = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^6 + \cdots,$$

$$\sin 5^0 = \frac{\pi}{36} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^7 + \cdots.$$

Diese Reihen sind äußerst rasch konvergent und ergeben mit nur 3 Gliedern auf 7 Stellen genau:

$$\cos 5^0 = 0{,}9961947; \qquad \sin 5^0 = 0{,}0871557.$$

Je größer der Winkel wird, desto mehr verlangsamt sich die Konvergenz. Aber erstens braucht man mit x nicht über $\frac{\pi}{4}$ zu gehen und zweitens kann die Berechnung für größere Winkel durch die Formeln

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

auf kleinere Winkel zurückgebracht werden. Außerdem lassen sich Mittel und Wege finden, um die rekursorische Berechnung sehr beträchtlich zu vereinfachen, so z. B. durch die Formeln:

$$\sin(x+2h) = 2\sin(x+h) - \sin x - 4\sin(x+h)\cdot\sin^2\frac{h}{2},$$

$$\cos(x+2h) = 2\cos(x+h) - \cos x - 4\cos(x+h)\cdot\sin^2\frac{h}{2},$$

in welchen die letzten Glieder mit h von der zweiten Ordnung klein werden, also nur als kleine Korrektionsglieder in Betracht kommen.

Die trigonometrischen Tangenten und Kotangenten selbständig zu berechnen, empfiehlt sich nicht; man führt sie besser auf Sinus und Kosinus durch Division zurück. (Ebenso verzichtet man lieber auf selbständige Entwicklungen der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.)

Alle diese Rechnungen sind längst in größter Vollständigkeit wie Sorgfalt erledigt und ihre Ergebnisse finden sich in den Logarithmentafeln zum allgemeinen Gebrauch handlich zusammengestellt. Millionen von Menschen haben sie benutzt, benutzen sie heute und werden sie benutzen bis in die fernste Zukunft; es ist daher nicht zu viel, sie eine Kulturtat von unvergänglichem Werte zu nennen. Eine Kultur-

tat, die wie gesagt, ein für allemal vollbracht worden ist. Auf welche Weise aber, das eben sollte dieser Paragraph in aller Kürze, doch zum vollen Verständnis ausreichend, erklären und zeigen.

218. Zum Schluß sei an einem Beispiel gezeigt, wie man sich durch Zurückgehen auf die ursprünglichen Formeln helfen kann, wenn bei einer Rechnung, die sonst logarithmisch geführt zu werden pflegt, eine Logarithmentafel zufällig nicht zu haben ist.

Aufgabe. Von einem Dreieck sind gegeben die drei Seiten:

$$a = 7, \quad b = 6, \quad c = 5.$$

Es sollen die drei Winkel α, β, γ ohne Logarithmentafel bis auf zehntel Minuten genau berechnet werden:

Der Kosinussatz ergibt für den Winkel α, also den arc: $\alpha \frac{\pi}{180}$:

$$\cos(\alpha^0) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{5} = \cos\left(\alpha^0 \frac{\pi}{180^0}\right); \quad \alpha^0 \frac{\pi}{180^0} = \text{arc}\left(\cos = \frac{1}{5}\right),$$

folglich nach [211 4]:

$$\alpha^0 \frac{\pi}{180^0} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5^3} - \frac{3}{40} \cdot \frac{1}{5^5} \cdots$$

und hieraus:

$$\alpha^0 \frac{\pi}{180^0} = 1{,}36945\ldots; \quad \alpha^0 = 78^0\, 27{,}8'.$$

Ebenso könnten β und γ berechnet werden. Man erhielte

$$\cos\left(\beta^0 \frac{\pi}{180^0}\right) = \frac{19}{35}, \quad \cos\left(\gamma^0 \frac{\pi}{180^0}\right) = \frac{5}{7},$$

doch wären die Reihen offenbar erheblich langsamer konvergent. Schneller führt der Tangentialsatz zum Ziele:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{11} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \frac{\sqrt{6}}{22},$$

daher nach [211 1]

$$\frac{\beta - \gamma}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{6}}{22} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{22}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{6}}{22}\right)^5 \cdots,$$

$$= 0{,}1109,$$

$$\frac{\beta - \gamma}{2} = 6^0\, 21{,}2'.$$

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 50^0\, 46{,}1'.$$

Hieraus durch Addition und Subtraktion β und γ. Also zusammengefaßt:

$$\alpha = 78^0\, 27{,}8'; \quad \beta = 57^0\, 7{,}3'; \quad \gamma = 44^0\, 24{,}9'.$$

Man sieht, es ist auch ohne Logarithmentafel gegangen, wenn auch nicht so schnell. Es ist doch gut, wenn man sich zur Not einmal auch ohne Tafelwerte mittelst Grundformeln helfen kann.

Übungen zu § 26.

1) Es sollen ohne Gebrauch von Logarithmentafeln die trigonometrischen Funktionen von 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0 bis auf 7 Stellen hinter dem Komma richtig ermittelt werden.

2) $\ln 2$, $\ln 3 \ldots$ bis $\ln 10$ ohne Gebrauch von Logarithmentafeln zehnstellig zu berechnen.

§ 27. Komplexe Zahlen.

219. Die imaginäre Einheit oder die Zahl

$$i \tag{1}$$

wird erklärt als eine Zahl, deren Quadrat gleich -1 sein soll:

$$i^2 = -1. \tag{2}$$

Positiv kann i nicht sein, und negativ kann i auch nicht sein, denn das Quadrat sowohl einer positiven als auch einer negativen Zahl ist stets positiv. Null kann sie auch nicht sein, denn das Quadrat von Null ist Null. Also kann i überhaupt keine reelle Zahl sein. Sie ist eben die imaginäre Einheit.

Die rein imaginären Zahlen. Man bezeichnet das Produkt

$$b \cdot i \tag{3}$$

als eine rein imaginäre Zahl, wenn b als beliebige reelle Zahl vorausgesetzt wird, und erklärt hierzu ferner: Es soll sein:

I) $(+1) \cdot i = i = +i$, II) $(-1) . i = -i$, III) $0 \cdot i = 0$, IV) $ib = bi$.

Diese und die folgenden Gleichungen bezwecken, daß mit i „möglichst" so gerechnet werden könne, wie mit einer reellen Zahl. Denn für eine solche ist auch:

I) $(+1) \cdot a = a$, II) $(-1) a = -a$, III) $0 \cdot a = 0$, IV) $ab = ba$.

Die komplexen Zahlen. Man bezeichnet den Ausdruck:

$$a + bi \tag{4}$$

als eine komplexe Zahl, wenn sowohl a als auch b als beliebig reell vorausgesetzt werden. Es ist a der reelle, bi der imaginäre Bestandteil. Hierzu wird ferner erklärt:

$$a + bi = bi + a$$

(nach dem für reelle Zahlen geltenden kommutativen Gesetz),

$$0 + bi = bi + 0 = bi; \quad a + 0i = a + 0 = a$$

(nach der für eine reelle Zahl geltenden Gleichung $0 + q = q + 0 = q$). Hiernach sind die rein imaginären wie die rein reellen Zahlen unter

den komplexen Zahlen als ein besonderer Fall enthalten, wenn der reelle bzw. imaginäre Bestandteil verschwindet.

$$0 + 0i = 0i = 0.$$

Hiernach ist also 0 eine solche Zahl und zwar die einzige von allen, welche sowohl als komplex, als auch als rein reell, als auch als rein imaginär angesehen werden darf.

220. Die komplexe Ebene nach Gauß. Zur Darstellung der Gesamtheit reeller Zahlen reicht eine unbegrenzte Gerade aus [9]. Für die komplexen Zahlen ist hierzu eine unbegrenzte Ebene nötig. Man nehme in ihr ein rechtwinkliges Koordinatensystem an (Fig. 88), nenne die eine Achse reell, die andere imaginär, verfahre aber sonst wie in der analytischen Geometrie der Ebene und bezeichne die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene mit a und b. Dann soll P die komplexe Zahl $a + bi$ vertreten, oder kurz und scharf: P soll $a + bi$ sein.

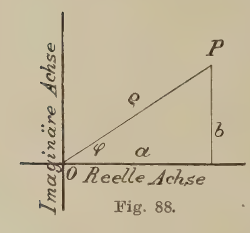


Fig. 88.

Auf der reellen Achse liegen die rein reellen, auf der imaginären Achse die rein imaginären Zahlen. Allgemein entsprechen den vier Quadranten die vier möglichen Vorzeichenkombinationen von a und b. Es gibt keine komplexe Zahl ohne den zugehörigen Punkt P und keinen Punkt P ohne die zugehörige komplexe Zahl. Die Zuordnung ist beiderseits eindeutig.

Modul und Argument oder Winkel. Werden a und b durch die Polarkoordinaten ϱ und φ ersetzt, so bezeichnet man ϱ als den Modul und φ als den Winkel oder das Argument der komplexen Zahl. Die Transformationsformeln lauten:

$$a = \varrho \cos\varphi, \quad b = \varrho \sin\varphi,$$

daher:

$$a + bi = \varrho \cos\varphi + \varrho \sin\varphi i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1}$$

Die Form:

$$\boldsymbol{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \tag{2}$$

heißt die „Normalform“ der komplexen Zahl. Ist sie in der gewöhnlichen Form $a + bi$ gegeben, so folgt zur Umwandlung in die Normalform:

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{3}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\varrho}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\varrho}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{a}{b}, \tag{4}$$

mit der Maßgabe, daß erstens ϱ absolut oder positiv genommen wird, daß zweitens φ wie üblich ein Vorzeichen erhält, daß drittens φ als

arcus genommen wird und daß viertens ein beliebiges ganzes Vielfaches von 2π zu φ addiert oder von φ subtrahiert werden darf, weil

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho(\cos(\varphi \pm 2k\pi) + i\sin(\varphi \pm 2k\pi))$$

ist.

Sonst entspricht jeder komplexen Zahl nur ein ϱ und (abgesehen von $2k\pi$) ein φ, ausgenommen $\varrho = 0$, weil dann φ beliebig sein darf. Ist sie rein reell, so wird

$$\varrho = |a| \quad \text{und} \quad \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = \pi,$$

je nachdem a positiv oder negativ ist. Ist sie rein imaginär, so wird

$$\varrho = |b| \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi,$$

je nachdem b positiv oder negativ ist. Allgemein soll der Modul für eine komplexe Zahl etwa das sein, was der absolute Wert für eine reelle Zahl ist, wie ja auch ersterer in letzteren übergeht, wenn die komplexe Zahl durch Verschwinden des imaginären Bestandteiles reell wird.

Komplexe Einheiten. Wird in (2) der Modul $\varrho = 1$ genommen, so nennt man die komplexe Zahl eine komplexe Einheit. Der allgemeinste Ausdruck einer komplexen Einheit ist daher:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{5}$$

Hiernach gibt es unendlich viele komplexe Einheiten, welchen alle Punkte des Kreises um O als Mittelpunkt mit der Längeneinheit als Radius entsprechen. Besondere komplexe Einheiten sind zu allererst 1 selbst:

$$1 = +1 = \cos 0 + i\sin 0, \tag{6}$$

sodann die negative Einheit:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi, \tag{7}$$

drittens die positive imaginäre Einheit:

$$+i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

viertens die negative imaginäre Einheit:

$$-i = \cos\tfrac{3}{2}\pi + i\sin\tfrac{3}{2}\pi. \tag{9}$$

Zwei andere viel gebrauchte, oft mit ω_1 und ω_2 bezeichnete komplexe Einheiten sind:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \\ \omega_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = \cos -\frac{2}{3}\pi + i\sin -\frac{2}{3}\pi. \end{aligned} \tag{10}$$

Konjugierte komplexe Zahlen haben denselben Modul und entgegengesetzt gleiche Winkel (oder auch zwei Winkel, die sich zu 2π ergänzen).

Zwei konjugierte komplexe Zahlen sind daher:

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{und} \quad \varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi) \tag{11}$$

oder in gewöhnlicher Form geschrieben:

$$a + bi \quad \text{und} \quad a - bi. \tag{12}$$

Sie haben denselben reellen Bestandteil und entgegengesetzt gleiche imaginäre Bestandteile und werden durch zwei zur reellen Achse symmetrisch liegende Punkte vertreten. Im besonderen hat jede Einheit eine ihr konjugierte Einheit.

221. An das Rechnen mit komplexen Zahlen sind drei Forderungen zu stellen. Erstens: Es muß mit den bereits in [219] getroffenen Festsetzungen und Gleichungen im Einklang stehen. Zweitens: Seine allgemeinen Regeln und Gesetze müssen diejenigen des Rechnens mit reellen Zahlen als besonderen Fall umfassen. Drittens: Innerhalb des Spielraumes, welchen die beiden ersten Forderungen vielleicht noch lassen, ist die angemessenste Wahl zu treffen, so daß das Rechnen mit komplexen Zahlen zur einfachsten und natürlichsten Erweiterung des Rechnens mit reellen Zahlen wird.

Gleichheit. Hierauf bezieht sich zunächst folgende grundlegende Erklärung: Zwei komplexe Zahlen heißen dann, aber auch nur dann einander gleich, wenn ihre reellen Bestandteile einander gleich und ihre imaginären Bestandteile einander gleich sind. Die Gleichung:

$$a + bi = c + di \tag{1}$$

soll, wenn a, b, c, d reell sind, zerfallen in die beiden Gleichungen:

$$a = c \quad \text{und} \quad b = d. \tag{2}$$

Eine Gleichung zwischen komplexen Zahlen erscheint hiernach als die Zusammenfassung zweier Gleichungen zwischen reellen Zahlen.

Das Addieren. Es wird erklärt:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \tag{3}$$

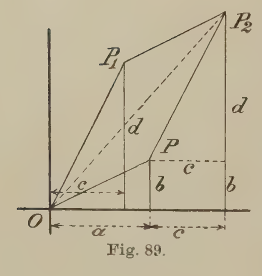


Fig. 89.

Es wird das Reelle für sich und das Imaginäre für sich addiert. Wenn P und P_1 die Summanden und P_2 die Summe vertritt (Fig. 89), so ist P_2 die vierte und O gegenüberliegende Ecke eines Parallelogramms, dessen drei andere Ecken O, P, P_1 sind. Komplexe Zahlen werden also in gleicher Weise addiert, wie man Kräfte zusammensetzt, das ist die geometrische Deutung von (3).

Das Multiplizieren. Es wird erklärt

$$(a+bi)(c+di) = ac + (bi)c + a(di) + (bi)(di)$$
$$= ac + bdi^2 + bci + adi, \quad \text{also [219 2]},$$
$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + i(bc+ad).$$

Beispiel:

$$(5-3i)(7+2i) = 35 - 6i^2 - 21i + 10i = 41 - 11i. \tag{4}$$

Setzt man die beiden komplexen Zahlen in der Normalform voraus, so folgt:

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \varrho\varrho_1\cos\varphi\cos\varphi_1$$
$$-\varrho\varrho_1\sin\varphi\sin\varphi_1 + \varrho\varrho_1 i\sin\varphi\cos\varphi_1 + \varrho\varrho_1 i\sin\varphi_1\cos\varphi,$$

also nach den Additionstheoremen für $\sin x$ und $\cos x$:

$$\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot\varrho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=\varrho\varrho_1(\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)). \tag{5}$$

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist eine komplexe Zahl, deren Modul gleich dem Produkt der beiden gegebenen Moduln und deren Winkel gleich der Summe der beiden gegebenen Winkel ist (Fig. 90). Es stelle O die Null, OA die reelle Einheit, P den ersten Faktor, P_1 den zweiten Faktor vor, so entspricht (5) folgende Konstruktion:

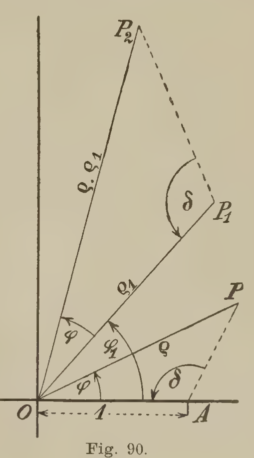


Fig. 90.

Man trage φ an OP_1 in O und δ an OP_1 in P an, unter Innehaltung ihres Drehungssinnes, so bestimmt der Schnittpunkt der zweiten Schenkel denjenigen Punkt P_2, welcher das Produkt vertritt. Denn erstens ist nach Konstruktion $\sphericalangle AOP_2 = \varphi + \varphi_1$ und zweitens ergibt die Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$OP_2 = \frac{OP_1\cdot OP}{OA} = \frac{\varrho\cdot\varrho_1}{1} = \varrho\cdot\varrho_1.$$

Zu der Addition und Multiplikation sei noch nachgetragen: Erstens:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(a-bi) &= 2a,\\ (a+bi)(a-bi) &= a^2+b^2.\end{aligned} \tag{6}$$

Die Summe und das Produkt (wie überhaupt jede symmetrische Funktion) zweier konjugierter komplexer Zahlen ist reell. Die letzte Formel entspricht völlig der Gleichung:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Zweitens. Für das Addieren und Multiplizieren komplexer Zahlen gilt ebenso das assoziative, das kommutative und das distributive Gesetz wie für das Addieren und Multiplizieren reeller Zahlen:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di)&=(c+di)+(a+bi),\\ (a+bi)(c+di)&=(c+di)(a+bi)\end{aligned} \tag{7}$$

usw. (Bei anderen Zahlengattungen, welche man sonst eingeführt hat, wie Quaternionen, Vektoren, Tensoren usw., gelten diese Gesetze zum Teil nicht mehr.)

Drittens. Ein Produkt zweier komplexer Zahlen kann nur verschwinden, wenn ein Faktor verschwindet. Und umgekehrt, wenn ein Faktor verschwindet, so verschwindet das Produkt. Folgt am schnellsten aus (5). Damit das Produkt verschwinde, muß $\varrho\varrho_1 = 0$ sein. Da aber ϱ und ϱ_1 absolute reelle Zahlen sind, ist dies nur möglich, wenn

$$\text{entweder} \quad \varrho = 0 \quad \text{oder} \quad \varrho_1 = 0$$

ist. (Auch dieser Satz gilt zum Teil nicht mehr für andere Zahlengattungen. Es kann bei manchen von ihnen ein Produkt verschwinden, obgleich keiner der Faktoren verschwindet.)

Viertens. Setzt man in (5) im besonderen $\varrho = \varrho_1 = 1$, so folgt:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \cos(\varphi+\varphi_1) + i\sin(\varphi+\varphi_1). \tag{8}$$

Komplexe Einheiten werden multipliziert, wenn man ihre Winkel addiert. Übrigens zerfällt (8) nach der Ausmultiplikation links in die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi+\varphi_1) &= \cos\varphi\cos\varphi_1 - \sin\varphi\sin\varphi_1;\\ \sin(\varphi+\varphi_1) &= \sin\varphi\cos\varphi_1 + \cos\varphi\sin\varphi_1,\end{aligned} \tag{9}$$

wie umgekehrt (8) aufgefaßt werden kann als eine sehr bemerkenswerte Zusammenziehung der beiden allbekannten reellen Gleichungen (9) zu einer komplexen Gleichung.

Das Potenzieren. Es wird erklärt: Die Potenz

$$(a+bi)^n \tag{10}$$

einer komplexen Zahl soll unter Voraussetzung eines absoluten und ganzzahligen Eyponenten n genau so wie die Potenz einer reellen Zahl ein Produkt von n Faktoren sein, von denen jeder gleich der Basis $a+bi$ ist:

$$(a+bi)^n = (a+bi)(a+bi)\cdots(n \text{ Faktoren}). \tag{11}$$

Es sei im besonderen $a = 0$, $b = 1$, so folgt:

$$\begin{aligned}i^0 &= +1,\\ i^1 &= +i,\\ i^2 &= i\cdot i = -1,\end{aligned}$$

$$i^3 = iii = (ii)i = -i,$$
$$i^4 = iiii = (ii)(ii) = (-1)(-1) = +1,$$
$$i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = +i$$

usw. Allgemein:

$$i^{4n} = +1, \quad i^{4n+1} = +i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i. \tag{12}$$

Es gibt nur eine ganze Potenz von $+1$, nämlich $+1$; es gibt zwei ganze Potenzen von -1, nämlich abwechselnd $+1$ und -1; es gibt aber vier ganze Potenzen von i, nämlich, immer in derselben Reihenfolge wiederkehrend:

$$+1, \quad +i, \quad -1, \quad -i, \cdots,$$

Um allgemein (10) in eine komplexe Zahl zu verwandeln, bediene man sich des binomischen Satzes für die Potenz von $a+b$, ersetze aber b durch bi, was selbstverständlich auf Grund der vorangegangenen Erklärungen erlaubt ist. Man erhält:

$$(a+bi)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} bi + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 i^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 i^3 + \cdots + b^n i^n,$$

also nach Anwendung von (12) auf alle Glieder und Zusammenziehung derjenigen, welche reell werden, und derjenigen, welche imaginär werden:

$$(a+bi)^n = \left[a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 \cdots\right] \tag{13}$$
$$+ i\left[\binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 \cdots\right].$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(-5+3i)^7 &= [(-5)^7 - 21(-5)^5 \cdot 3^2 + 35(-5)^3 \cdot 3^4 - 7(-5) \cdot 3^6] \\ &\quad + i[7(-5)^6 \cdot 3 - 35(-5)^4 \cdot 3^3 + 21(-5)^2 \cdot 3^5 - 3^7] \\ &= [-78125 + 590625 - 354375 + 25515] \\ &\quad + i[328125 - 590625 + 127575 - 2187] \\ &= 183640 - 137112\,i.\end{aligned}$$

Ist die Basis in der Normalform gegeben, so wende man (5) an nach Erweiterung auf beliebig viele Faktoren und nach Gleichsetzung aller Moduln und aller Winkel. Man erhält so:

$$[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{14}$$

Eine komplexe Zahl wird mit n potenziert, wenn man den Modul mit n potenziert, aber den Winkel oder das Argument mit n multipliziert. Im besonderen folgt für $\varrho = 1$:

$$\boldsymbol{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.} \tag{15}$$

Diese überaus wichtige Gleichung heißt die

„Moivresche Formel“.

Eine komplexe Einheit wird mit n potenziert, indem man den Winkel mit n multipliziert.

222. Subtrahieren, Dividieren und Wurzelausziehen. Sie werden wie bei reellen Zahlen als Umkehrungen des Addierens, Multiplizierens und Potenzierens definiert.

Das Subtrahieren. Die Gleichung

$$(a + bi) - (c + di) = (e + fi)$$

soll die Umkehrung der Gleichung sein:

$$(a + bi) = (c + di) + (e + fi),$$

daher nach (3) [221]:

$$a = c + e, \quad b = d + f \quad \text{oder} \quad e = a - c, \quad f = b - d,$$

also:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (d - f)\, i. \tag{1}$$

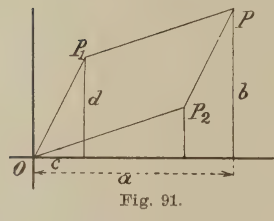


Fig. 91.

Es werden die reellen Bestandteile unter sich und die imaginären Bestandteile unter sich subtrahiert. Geometrisch ausgedrückt (Fig. 91). Die Strecke $P_1 P$ selbst bestimmt, parallel zu sich selbst verschoben, so daß ihr Anfangspunkt nach O gebracht wird, durch den Endpunkt P_2 die Differenz.

Das Dividieren. Die Gleichung

$$\frac{a + bi}{c + di} = e + fi$$

soll die Umkehrung der Gleichung sein:

$$a + bi = (e + fi)(c + di),$$

also nach [221]:

$$a = ec - fd; \quad b = ed + fc$$

und durch Auflösung nach e und f:

$$e = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad f = \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2},$$

daher:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}\, i. \tag{2}$$

Schneller hätte die Erweiterung mit der Konjugierten des Nenners zum Ziele geführt, wie folgt:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - bdi^2 - adi + bci}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}\, i.$$

Beispiel (vgl. Beispiel zu (4) [221]):

$$\frac{41-11i}{5-3i} = \frac{(41-11i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{205+33+123i-55i}{5^2+3^2}$$
$$= \frac{238}{34} + \frac{68}{34}i = 7+2i.$$

Sind Divisor und Dividendus in der Normalform gegeben, so tritt an Stelle von (2):

$$\frac{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)} = \frac{\varrho}{\varrho_1}(\cos(\varphi-\varphi_1) + i\sin(\varphi-\varphi_1)). \qquad (3)$$

Die Moduln werden dividiert und die Winkel werden subtrahiert. Unmittelbare Umkehrung von [221 5]. Siehe Fig. 92. Es stellt P_2 den Quotienten von P und P_1 vor und man beachte wohl, daß der Winkel AOP_2 mit dem unmittelbar gegebenen Winkel P_1OP übereinstimmt.

Fig. 92.

Das Wurzelausziehen. Die Gleichung:

$$\sqrt[n]{a+bi} = c+di$$

soll Umkehrung der Gleichung sein:

$$(c+di)^n = a+bi$$

oder in der Normalform: die Gleichung:

$$\sqrt[n]{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

soll Umkehrung der Gleichung sein:

$$(\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1))^n = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Daher nach der Moivreschen Formel:

$$\varrho_1^n(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1) = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Also zunächst:

$$\varrho_1^n = \varrho; \quad \varrho_1 = \sqrt[n]{\varrho}. \qquad (4)$$

Diese Formel gibt, da ϱ und ϱ_1 absolut oder positiv sein sollen, nur einen Wert für ϱ_1. Ferner muß sein:

$$\cos n\varphi_1 = \cos\varphi; \quad \sin n\varphi_1 = \sin\varphi,$$

also allgemein mit Rücksicht auf den Periodizitätsmodul 2π:

$$n\varphi_1 = \varphi + 2k\pi; \quad \varphi_1 = \frac{\varphi+2k\pi}{n} \qquad (5)$$

und schließlich:

$$\sqrt[n]{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\varrho}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad (6)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Eine komplexe Zahl wird radiziert, indem man den Modul radiziert, aber den Winkel durch den Wurzelexponenten dividiert, letzteres mit

dem Vorbehalt, den Winkel vorher um ein beliebiges ganzes Vielfaches von 2π zu vermehren oder zu vermindern.

Es dürfte k in (6) zwar eine beliebige positive oder negative ganze Zahl sein. Dennoch ist in (6) die Beschränkung auf die ganzen Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ ganz in Ordnung. Würde man nämlich fortfahren, zunächst mit $k = n$, so würde:

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \frac{\varphi + 0\pi}{n} + 2\pi$$

werden, d. h. $k = n$ würde denselben Wurzelwert ergeben wie $k = 0$. Ebenso $k = n + 1$ denselben Wert wie $k = 1$, usw. Die Werte der Wurzeln würden in derselben Reihenfolge immer wiederkehren, und ein gleiches würde stattfinden für negative ganzzahlige k. Andererseits sind die n in (6) bezeichneten Werte auch wirklich voneinander verschieden. Denn nimmt man für k zwei Zahlen k_1 und k_2 der angegebenen Reihe, so ergibt sich als Unterschied der beiden entsprechenden Winkel

$$\frac{k_2 - k_1}{n} 2\pi.$$

Er ist also, da $k_2 - k_1$ nicht durch n teilbar sein kann, kein ganzes Vielfaches von 2π, wie es sein müßte, falls die beiden Werte gleich sein sollen. Also:

Jede n^{te} Wurzel aus einer komplexen Zahl hat n verschiedene Werte. Sie haben alle denselben Modul. Ihre Winkel unterscheiden sich um beliebige ganze Vielfache von $2\pi : n$, d. h. um Vielfache des zu der Seite eines regelmäßigen n-Ecks gehörenden Zentriwinkels, daher:

Die n-Werte der n^{ten} Wurzel aus einer komplexen Zahl werden geometrisch vertreten durch die n Ecken eines regelmäßigen n-Eckes, dessen Mittelpunkt die Null vertritt.

Ist im besondern $n = 2$, so bilden die beiden Ecken ein regelmäßiges Zweieck, dessen Mittelpunkt die Null ist, d. h. die beiden Quadratwurzeln sind entgegengesetzt gleich, z. B.

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1\,(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt{1}\,\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right)\ (k = 0, 1$$

also entweder

$$\sqrt{-1} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = +i,$$

oder

$$\sqrt{-1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + i\left(\sin\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -i,$$

Die Einheitswurzeln. Setzt man $\varrho = 1$, so folgt:

$$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \tag{7}$$

und ganz im besondern für $\varphi = 0$:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1). \qquad (8)$$

Für $k = 0$ erhält man $\cos 0 + i \sin 0 = +1$; einer der n Werte ist also immer die Einheit selbst, wie sich von selbst versteht. Ist n gerade, so ist ein zweiter Wert: -1, entsprechend $k = \frac{n}{2}$. Alle andern Werte sind nicht reell.

$n = 2$

a) $\sqrt{1} = \cos 0 + i \sin 0 = +1.$

b) $\sqrt{1} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$

$n = 3$

a) $\sqrt[3]{1} = \cos 0 + i \sin 0 = +1.$

b) $\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = \omega_1$

c) $\sqrt[3]{1} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = \omega_2$

(b, c) vgl. [220 10].

$n = 4$

a) $\sqrt[4]{1} = \cos 0 + i \sin 0 = +1.$

b) $\sqrt[4]{1} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = +i.$

c) $\sqrt[4]{1} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$

d) $\sqrt[4]{1} = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i.$

Durch Vermittlung dieser Einheitswurzeln kann man allgemein alle n Werte der Wurzeln aus einer beliebigen komplexen Zahl durch einen einzigen ausdrücken. Es ist:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{\varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

oder nach [221 5]:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Man berechne einen Wert der Wurzel und multipliziere ihn nach und nach mit allen Werten der zu demselben n gehörenden Einheitswurzeln.

223. Zum Radizieren komplexer Zahlen seien noch folgende Bemerkungen hinzugesetzt.

Erstens: Die eigenartige Verknüpfung mit den regelmäßigen Vielecken hat Gauß unter Hinzunahme zahlentheoretischer Untersuchungen benutzt, um ein uraltes geometrisches Problem, die Kreis-

teilungslehre, zum wirklichen Abschluß zu bringen durch den Satz: Wenn die Zahl:

$$p = 2^{2^n} + 1$$

eine Primzahl ist, so läßt sich der Kreis durch eine geometrische Konstruktion in p gleiche Teile teilen!

Für $n = 0$ und $n = 1$ wird $p = 3$ und $p = 5$. Diese beiden Fälle waren uralt (letzterer hängt mit dem goldenen Schnitt zusammen). Für $n = 2$ wird $p = 17$ und an diesen Fall, sowie erst recht an die weiteren Fälle, hatte vor Gauß niemand gedacht.

Zweitens: Statt zu sagen, die n^{te} Wurzel habe n Werte, kann man sich auch so ausdrücken: Die Gleichung des n^{ten} Grades:

$$x^n - A = 0$$

in der A eine beliebige komplexe Zahl bedeutet, hat n Wurzeln; denn es folgt ja:

$$x = \sqrt[n]{A}.$$

Auf diese Weise wird dieser Satz ein ganz besonderer Fall eines viel allgemeineren Satzes, des Fundamentalsatzes der Algebra, welcher für komplexe Zahlen den Wortlaut hat:

Jede Gleichung n^{ten} Grades:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \dots + kx + l = 0 \qquad (1)$$

in der $a, b, c \,.\,.\, k, l$ beliebig gegebene komplexe Zahlen bedeuten, hat n (komplexe) Wurzeln:

$$x_1, x_2, \dots x_n,$$

und es ist identisch:

$$ax^n + bx^{n-1} \dots + kx + l \equiv a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n). \qquad (2)$$

Sind die Koeffizienten sämtlich reell, so bleibt der Satz selbstverständlich auch richtig; nur darf man nicht etwa annehmen, daß dann die Wurzeln auch sämtlich reell sein müssen. Sie können vielmehr alle oder zum Teil wirklich komplex sein; dann aber ist zu jeder komplexen Wurzel auch die konjugierte komplexe Wurzel vorhanden. Denn setzt man zunächst für x irgendeine komplexe Zahl $p + qi$ in die linke Seite von (1), so wird diese im allgemeinen auch komplex, etwa $P + Qi$; setzt man aber $p - qi$, so entsteht bei reellen Koeffizienten $P - Qi$. Ist $p + qi$ eine Wurzel, so ergibt sich $P + Qi = 0$, d. h. $P = 0$ und $Q = 0$, also auch $P - Qi = 0$, d. h. $p - qi$ ist auch eine Wurzel.

Es seien $x_1 = p + qi$ und $x_2 = p - qi$ zwei solche konjugierte Wurzeln. Faßt man das Produkt der beiden Faktoren ersten Grades

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

nach [221 4] zusammen, so ergibt sich der Ausdruck zweiten Grades

$$x^2 - 2px + (p^2 + q^2) = (x - p)^2 + q^2$$

mit reellen Koeffizienten: Daher erhält der Fundamentalsatz unter Beschränkung auf reelle Zahlen, die in [76] angegebene Form. Man wird zugeben, daß seine allgemeine Form erheblich einfacher ist, so einfach, wie sie überhaupt nur sein kann. Wie überhaupt die Einführung komplexer Zahlen in mehr als einer Hinsicht nicht eine Steigerung, sondern eine Verminderung der Schwierigkeiten für die Mathematik zur Folge gehabt hat.

224. Für komplexe Zahlen verlieren die Bezeichnungen größer und kleiner zum großen Teil ihre Anwendbarkeit, insofern zwei komplexe Zahlen sehr wohl verschieden sein können, ohne Berechtigung, die eine größer oder kleiner als die andere zu nennen. Man nehme etwa als Beispiel:

$$4 + 3i \text{ und } 3 + 4i.$$

Dagegen ist es sehr wohl möglich, den Begriff des Unendlichkleinen auf komplexe Zahlen zu übertragen durch die Erklärung, daß eine komplexe Zahl $a + bi$ unendlich klein heißen solle, wenn a und b beide unendlich klein sind. Dann ergibt sich von selbst die entsprechende Übertragung der mit dem Unendlichkleinen verbundenen Begriffe der Stetigkeit, der unbegrenzten Annäherung, des Limes und der Konvergenz unendlicher Ausdrücke von reellen auf komplexe Zahlen. Dies wirklich auszuführen, ist wohl überflüßig (vgl. dritter Abschnitt).

Komplexe Reihen:

Gegeben sei eine unendliche Reihe:

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \ldots = \sum u, \tag{1}$$

deren Glieder als komplex vorausgesetzt werden:

$$u_n = a_n + ib_n = \varrho_n (\cos\varphi_n + i \sin\varphi_n),$$

also:

$$s = \sum u = \sum \varrho (\cos\varphi + i \sin\varphi) = \sum \varrho \cos\varphi + i \sum \varrho \sin\varphi. \tag{2}$$

Alsdann gilt als Erweiterung von [95 1] der folgende Satz:

Eine Reihe konvergiert, wenn die Reihe der Moduln

$$s' = \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n + \cdots \tag{3}$$

konvergiert.

Beweis: Man betrachte die beiden absoluten Reihen:

$$s'' = \varrho_0 \,|\cos\varphi_0| + \varrho_1 \,|\cos\varphi_1| + \cdots + \varrho_n \,|\cos\varphi_n| + \cdots \tag{4}$$

$$s''' = \varrho_0 \,|\sin\varphi_0| + \varrho_1 \,|\sin\varphi_1| + \cdots + \varrho_n \,|\sin\varphi_n| + \cdots \tag{5}$$

Zu jeder von beiden ist s' eine Majorante, weil ein Kosinus und ein Sinus eines (reellen) Winkels absolut kleiner oder höchstens $= 1$ sind. Da s' konvergiert, so konvergieren also s'' und s''' erst recht.

Konvergieren aber diese, so konvergieren auch die entsprechenden algebraischen Reihen:

$$\sum \varrho \cos \varphi \text{ und } \sum \varrho \sin \varphi,$$

also auch s selbst.

Überträgt man die Unterscheidung zwischen bedingter und unbedingter Konvergenz aus § 11 auf komplexe Reihen, so läßt der eben bewiesene Satz noch folgende Ergänzung zu:

Wenn die Reihe (3) der Moduln einer Reihe (1) konvergiert, so konvergiert (1) selbst unbedingt. Aber auch umgekehrt:

Wenn eine Reihe (1) unbedingt konvergiert, so konvergiert die Reihe (3) ihrer Moduln: Denn aus der unbedingten Konvergenz von (1) folgt zunächst die unbedingte Konvergenz von (4) und (5). Mithin konvergiert auch die Reihe

$$\begin{aligned}\varrho_0 (|\cos \varphi_0| + |\sin \varphi_0|) + \varrho_1 (|\cos \varphi_1| + |\sin \varphi_1|) \\ + \varrho_2 (|\cos \varphi_2| + |\sin \varphi_2|) + \cdots \end{aligned} \tag{6}$$

Nun ist allgemein

$$(|\cos \varphi| + |\sin \varphi|)^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 2 |\cos \varphi| |\sin \varphi| = 1 + |\sin 2\varphi|,$$

also

$$(|\cos \varphi| + |\sin \varphi|)^2 \geqq 1,$$

also auch:

$$|\cos \varphi| + |\sin \varphi| \geqq 1.$$

Folglich ist (6) Majorante von (3). Da (6) konvergiert, so konvergiert also auch (3), w. z. b. w.

Die Konvergenz der Moduln ist mithin ein nie versagendes und entscheidendes Kriterium unbedingter Konvergenz für komplexe Reihen. Im besonderen sei gegeben eine komplexe Potenzreihe:

$$s = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{7}$$

in der die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \cdots$ gegebene komplexe Werte haben sollen, also allgemein

$$a_n = \varrho_n (\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n), \tag{8}$$

während z vorläufig unumschränkt komplex-veränderlich angenommen wird, so daß in der Gleichung:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \tag{9}$$

vorläufig der Modul r, wie der Winkel φ beliebig sein können. Es ist nach Moivre:

$$\begin{aligned} a_n z^n &= \varrho_n (\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n) \cdot r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \\ &= \varrho_n r^n \cdot (\cos (n\varphi + \alpha_n) + i \sin (n\varphi + \alpha_n)), \end{aligned}$$

also:

$$\text{Modul von } a_n z^n = \varrho_n r^n.$$

Die Reihe der Moduln von (7) ist daher:

$$s' = \varrho_0 + \varrho_1 r + \varrho_2 r^2 + \cdots \quad + \varrho_n r^n + \cdots \tag{10}$$

d. h. eine reelle und obendrein absolute Potenzreihe von r, dem Modul von z. Für sie gibt es daher nach § 11 eine Zahl r_0, welche die Grenze der Konvergenz bestimmt, derart, daß für $r < r_0$ Konvergenz, für $r > r_0$ Divergenz eintritt. Nach dem vorigen Satz (3) konvergiert also auch Reihe (7) für $r < r_0$ und zwar unbedingt, während sie für $r = r_0$ zwar noch konvergieren, aber auch schon divergieren kann. Andererseits läßt sich genau wie in [102] nachweisen, daß, wenn (7) für irgendein r (und irgendein φ) konvergiert, wenn auch nur bedingt, so (7) für jedes kleinere r unbedingt konvergieren muß. Also divergiert (7) für $r > r_0$. Daher:

Zu jeder komplexen Potenzreihe gibt es für z einen um den Nullpunkt als Mittelpunkt beschriebenen Konvergenzkreis. Bleibt z innerhalb desselben, so konvergiert die Reihe unbedingt, tritt z aus dem Konvergenzkreis heraus, so divergiert sie. Der Radius r_0 des Konvergenzkreises ist derjenige Wert des Moduls r, für welchen die Reihe der Moduln ihrer Glieder von der Konvergenz zur Divergenz übergeht.

Aus den Strecken der Konvergenz mit dem Nullpunkt als Mitte für reelle Potenzreihen (§ 11) werden also Kreise der Konvergenz um den Nullpunkt als Mittelpunkt. Wie sich die komplexe Potenzreihe auf dem Umfang des Konvergenzkreises verhält, muß von Fall zu Fall ausgemacht werden, da es verschiedene Möglichkeiten gibt, genau wie in § 11.

Selbstverständlich bleibt der Satz vom Konvergenzkreis auch dann ohne die kleinste Änderung richtig, wenn nur z komplex, die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 dagegen alle reell sind. Ihre Moduln fallen dann mit ihren absoluten Werten $|a_0|$, $|a_1|$, $|a_2| \cdots$ zusammen.

Beispiel. Die Reihe (7) sei:

$$s = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots \tag{11}$$

Die Reihe (10) der Moduln ist dann:

$$s' = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots$$

Sie konvergiert oder divergiert, je nachdem $r \lessgtr 1$, d. h. je nachdem $x^2 + y^2 \lessgtr 1$ ist, wenn $z = x + iy$ gesetzt wird. Entwickelt man in s die Potenzen von $z = x + iy$ nach dem binomischen Lehrsatz, so wird die in Beispiel V [105] angeführte Reihe zu dem reellen Bestandteil von s. Sie konvergiert oder divergiert also, je nachdem $x^2 + y^2 \lessgtr 1$ ist.

Übungen zu § 27.

1. a) $\sqrt{1+i}$, b) $\sqrt[3]{1+i}$, c) $\sqrt[4]{1+i}$.

2. Das Produkt $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ soll durch Zerlegung der Faktoren und Benutzung der Kommutativität und Assoziativität in die Summe zweier Quadrate umgeformt werden. Auf zwei Arten.

3. Der Quotient zweier konjugierter komplexer Zahlen ist eine komplexe Einheit.

4. Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$1 - 2z\cos\alpha + z^2 = 0$$

sind konjugierte komplexe Einheiten. Zu beweisen, daß die Potenzreihe für

$$\sqrt{1 - 2z\cos\alpha + z^2},$$

für jeden Wert von α (α reell) einen Konvergenzkreis mit der Einheit als Radius besitzt. Welche Werte haben die Koeffizienten dieser Potenzreihe?

§ 28. Funktionen komplexer Veränderlicher.

225. Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ heißt beliebig veränderlich, wenn sich x und y beliebig verändern können. Wird z nach [220] geometrisch durch $P(x, y)$ veranschaulicht, so soll P beliebig wandern und andere Lagen in der Ebene annehmen dürfen, etwa so, daß eine beliebige Kurve beschrieben wird.

Die komplexe Zahl $Z = X + iY$ heißt eine Funktion von $z = x + iy$, wenn sie von z abhängt, etwa explizite durch einen Funktionsausdruck

$$Z = f(z), \tag{1}$$

oder implizite durch eine Gleichung:

$$F(Z, z) = 0, \tag{2}$$

also ganz wie bei reellen Funktionen reeller Veränderlicher.

Wie die Grundrechnungsarten: Addieren, Subtrahieren usw., so werden alle algebraischen Funktionen von reellen auf komplexe Veränderliche übertragen. So die ganze Funktion, schon in [223] erläutert, die gebrochene rationale Funktion, die irrationale algebraische und die implizite algebraischen Funktionen [69] (§ 8).

Die geometrische Veranschaulichung einer komplexen Funktion muß selbstverständlich anders erfolgen als durch eine Kurve, wie es bei reellen Veränderlichen üblich ist, nämlich in folgender Weise.

Man denke sich irgend zwei komplexe Ebenen, eine für z und eine für Z. Dann wird durch (1) oder (2) eine geometrische

Verwandtschaft zwischen den beiden Ebenen bestimmt, da jeder Punkt der ersten Ebene einen Wert von z und jeder Punkt der zweiten einen Wert von Z vertritt. In welcher gegenseitigen Lage man sich die beiden Ebenen denkt, ist dabei ganz gleichgültig.

Erstes Beispiel. Gegeben sei die ganze Funktion ersten Grades:

$$Z = A + Bz, \tag{3}$$

wo A und B beliebig gegebene komplexe Zahlen:

$$\alpha)\ A = a + a_1 i, \quad \beta)\ B = b + b_1 i \tag{4}$$

bedeuten. Welche Verwandtschaft wird durch (3) zwischen den beiden komplexen Ebenen vermittelt?

Es seien z_1, z_2, z_3 irgend drei Werte von z, P_1, P_2, P_3 die zugehörigen drei Punkte der z-Ebene und Z_1, Z_2, Z_3 die entsprechenden Werte von Z, Q_1, Q_2, Q_3 die entsprechenden drei Punkte der Z-Ebene (Figur 93). Also:

$$Z_1 = A + Bz_1, \quad Z_2 = A + Bz_2, \quad Z_3 = A + Bz_3.$$

Fig. 93.

Es folgt:

$$Z_2 - Z_1 = B(z_2 - z_1); \quad Z_3 - Z_1 = B(z_3 - z_1),$$

also auch:

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{5}$$

Oder nach [222] (Subtrahieren und Dividieren):

$$\frac{Q_3 Q_1}{Q_2 Q_1} (\cos\alpha + i \sin\alpha) = \frac{P_3 P_1}{P_2 P_1} (\cos\alpha_1 + i \sin\alpha_1),$$

daher:

$$Q_3 Q_1 : Q_2 Q_1 = P_3 P_1 : P_2 P_1 \quad \text{und} \quad \sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \alpha,$$

d. h.:

$$\triangle\, Q_1 Q_2 Q_3 \sim \triangle\, P_1 P_2 P_3.$$

Die durch (3) vermittelte Abbildung ist also so beschaffen, daß dem Dreieck, gebildet aus irgend drei Punkten der z-Ebene als Ecken ein ähnliches Dreieck in der Z-Ebene entspricht. Die Abbildung ist dem Abzubildenden ähnlich.

Ein zweiter Beweis geht von der Zerlegung von (3) in zwei reelle Gleichungen aus. Es ist zunächst:

$$X + iY = a + a_1 i + (b + b_1 i)(x + iy)$$
$$= a + bx - b_1 y + i(a_1 + b_1 x + by),$$

daher:

$$X = a + bx - b_1 y, \quad Y = a_1 + b_1 x + by$$

oder, wenn $b = \lambda \cos\varphi$, $b_1 = \lambda \sin\varphi$ gesetzt wird:

$$X = \lambda(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + a, \quad Y = \lambda(x\sin\varphi + y\cos\varphi) + a_1. \quad (6)$$

Diese beiden Gleichungen drücken analytisch Ähnlichkeit aus. Für $\lambda = 1$ gehen sie in die sehr bekannten Formeln der Kongruenz über. Setzt man im besonderen $\varphi = 0$, so wird:

$$X = a + x, \quad Y = a_1 + y.$$

was eine Parallelverschiebung bedeutet.

Zweites Beispiel. Gegeben sei:

$$Z = \frac{1}{z}. \quad (7)$$

Nach Einführung von Modul und Winkel von z und Z:

$$z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi); \quad Z = \varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

erhält man:

$$\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \frac{(\cos 0 + i\sin 0)}{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{\varrho}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),$$

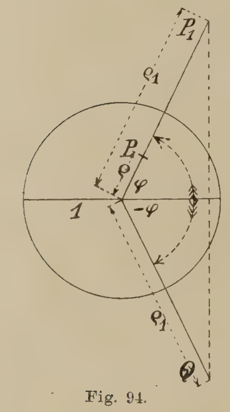


Fig. 94.

daher:

$$\varrho_1 = \frac{1}{\varrho}, \quad \varphi_1 = -\varphi. \quad (8)$$

Wäre nicht $\varphi_1 = -\varphi$, sondern $\varphi_1 = +\varphi$, so würde, falls man die Ebenen und Achsen zusammenfallen ließe, eine sehr bekannte Abbildung entstehen, nämlich die nach den sogenannten reziproken Radienvektoren, unter Zugrundelegung eines Kreises mit der Längeneinheit als Radius. Des Minuszeichens wegen hat man die Abbildung nur noch um die x-Achse „herumzuklappen".

Bekanntlich entsprechen bei der Abbildung nach den reziproken Radienvektoren Kreisen stets wieder Kreise. Sie ist eine sogenannte Kreisverwandtschaft. Analytisch folgt das aus (7) durch Zerlegung in zwei reelle Gleichungen:

$$X + iY = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Y = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

oder umgekehrt:

$$x = \frac{X}{X^2 + Y^2}, \quad y = \frac{-Y}{X^2 + Y^2}.$$

Man lasse den Punkt $P(x, y)$ einen Kreis:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

beschreiben. Die Transformation ergibt nach Multiplikation mit $X^2 + Y^2$:

$$1 + mX - nY + p(X^2 + Y^2) = 0,$$

also wieder ein Kreis.

So wie in diesen beiden Beispielen entspricht allgemein jeder Funktion (1) oder (2) die Abbildung einer Ebene auf eine andere Ebene. Wie es aber mit der Umkehrung steht, wird sich bald herausstellen.

226. Wie die algebraischen, so kann man auch transzendente, im Gebiete des Reellen bereits bekannte und erforschte Funktionen auf das Komplexe ausdehnen, was meist in einer durchaus angemessenen und natürlichen Weise möglich ist, aber doch manchmal in einer Weise, die weit, weit abliegt von dem ersten geschichtlichen Ursprung der entsprechenden Funktion.

Als erstes Beispiel diene die Exponentialfunktion:

$$y = e^x, \tag{1}$$

welche, wie ja schon ihre Schreibweise verrät, aus dem Potenzbegriff hervorgegangen ist durch Erweiterung von ganzzahligen auf beliebige reelle Exponenten. Versucht man aber nun auch auf komplexe Exponenten auszudehnen, so zeigt sich der Potenzbegriff als nunmehr völlig ungeeignet. Denn offenbar kann z. B.

$$e^{3i}$$

nur noch durch die Schreibweise an die Potenz erinnern und ist überhaupt zunächst ein völlig leerer Ausdruck [16].

Dagegen bieten gar manche der vorangegangenen Entwicklungen über die Exponentialfunktion in sehr einfacher Weise Möglichkeiten für ihre Ausdehnung auf komplexe Veränderliche dar, z. B. die zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} e^x &= \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \text{ in inf.,} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

denn in beiden kommt x rechts nur als Basis vor, während die Exponenten reell sind. Sie führen zu demselben Ergebnis, wie bei Nachprüfung von § 12 unter Annahme eines komplexen Wertes für x erweislich ist. Daher sei allgemein:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \text{ in inf.} \tag{3}$$

als Definition der Exponentialfunktion für beliebige komplexe Exponenten, $z = x + iy$ angenommen. Sie versagt niemals, da die Exponentialreihe für alle reellen, also nach [224] auch für alle komplexen Werte von z konvergiert. Ebenso gelten aus [63] die Formeln:

$$\mathfrak{Kof}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \tag{4}$$

$$\mathfrak{Sin}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \tag{5}$$

als Definition der Hyperbelfunktionen für komplexe Werte von z.

Aus (3) folgt, ganz wie in § 12, die Funktionalgleichung:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Sie ist besonders wichtig, weil sie es ermöglicht, die Erweiterung im wesentlichen auf rein imaginäre Exponenten einzuschränken, da auch:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

sein muß, so daß nur noch der zweite Faktor untersucht zu werden braucht. Betrachtet man ihn für sich und schreibt daher wieder x statt y, so stellt sich die Frage so:

Was tritt ein, wenn in (3) z durch ix ersetzt wird?

Es folgt nach (3):

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \cdots \text{ in inf.},$$

also nach [221 12]:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right)$$

oder nach (1) und (2) [209]:

$$\boldsymbol{e^{ix} = \cos x + i \sin x.} \tag{6}$$

Diese berühmte Formel, welche blitzartig den schon so oft angedeuteten Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktion aufdeckt, wird Euler zugeschrieben. Sie allein würde die Einführung der komplexen Zahlen in die Analysis rechtfertigen und hat in der Tat wesentlich zu deren Annahme beigetragen. Daß ursprünglich so grundverschiedene Funktionsarten doch für die reine Analysis auf dieselbe Funktion zurückführbar seien, war so unvermutet, so überraschend, so folgenschwer, wie nur je eine Entdeckung in der Mathematik gewesen ist.

227. Soeben ist die Exponentialfunktion auf trigonometrische Funktionen zurückgeführt worden. Um das Umgekehrte zu bewerkstelligen, setze man in die Gleichung:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1}$$

$-x$ statt x. Es folgt:

$$e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}} = \cos(-x) + i \sin(-x)$$

oder:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{2}$$

und aus (1) und (2):

$$\alpha)\ \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \beta)\ \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = i\,\frac{e^{-ix}-e^{ix}}{2} \tag{3}$$

oder [226 4] und [226 5]:

$$\alpha)\ \cos x = \mathfrak{Cof}\,(ix); \quad \beta)\ \sin x = \frac{\mathfrak{Sin}\,(ix)}{i} = -i\,\mathfrak{Sin}(ix). \tag{4}$$

Die trigonometrischen Funktionen sind also, abgesehen von dem Faktor i, wesentlich identisch mit den Hyperbelfunktionen.

Es war x als reell, ix als rein imaginär vorausgesetzt. Läßt man aber die Gleichungen (1) und (2) in [209]:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \text{ in inf.},$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \text{ in inf.}$$

als Definition der trigonometrischen Funktionen auch für komplexe Werte von z gelten, so kann x in (1), (2), (3), (4) im besonderen auch rein imaginär werden. Man setze also in ihnen ix statt x, oder x statt $-ix$, oder $-x$ statt ix, so wird aus (1), (2), (3), (4):

$$e^x = \cos ix - i \sin ix, \tag{5}$$

$$e^{-x} = \cos ix + i \sin ix, \tag{6}$$

$$\cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathfrak{Cof}\,x, \tag{7}$$

$$\sin ix = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = -\frac{\mathfrak{Sin}\,x}{i} = i\,\mathfrak{Sin}\,x. \tag{8}$$

Mit Hilfe dieser Formeln (1) bis (8) erhält man nunmehr ganz allgemein für:

$$e^z, \quad \sin z, \quad \cos z, \quad \mathfrak{Sin}\,z, \quad \mathfrak{Cof}\,z, \tag{9}$$

wenn z beliebig komplex ist und die betreffenden Additionstheoreme benutzt werden:

$$\left.\begin{aligned}
e^z &= e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y,\\
\sin z &= \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x\,\mathfrak{Cof}\,y + i \cos x\,\mathfrak{Sin}\,y,\\
\cos z &= \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x\,\mathfrak{Cof}\,y - i \sin x\,\mathfrak{Sin}\,y,\\
\mathfrak{Cof}\,z &= \mathfrak{Cof}\,(x+iy) = \mathfrak{Cof}\,x\,\mathfrak{Cof}\,iy + \mathfrak{Sin}\,x\,\mathfrak{Sin}\,iy = \mathfrak{Cof}\,x \cos y + i\,\mathfrak{Sin}\,x \sin y,\\
\mathfrak{Sin}\,z &= \mathfrak{Sin}(x+iy) = \mathfrak{Sin}\,x\,\mathfrak{Cof}\,iy + \mathfrak{Cof}\,x\,\mathfrak{Sin}\,iy = \mathfrak{Sin}\,x \cos y + i\,\mathfrak{Cof}\,x \sin y.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Da hier x und y reell sein sollen, so genügen also Tafeln der fünf Funktionen (9) für reelle Werte von z sogar für beliebige komplexe Werte von z, das ist der Sinn der Formeln (10). Aus ihnen läßt sich übrigens leicht nachweisen, daß jede der fünf Funktionen,

z. B. e^z, jeden komplexen Wert annehmen kann. Ihr Modul ist nach (10) durch e^x bestimmt, kann also alle Werte von 0 bis ∞, also alle Werte überhaupt annehmen. Ihr Winkel ist nichts anderes als y selbst und kann daher jeden Wert von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

228. Die Periode der Exponentialfunktion. Im besonderen folgt aus (1) in [227]:

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi,$$

d. h.:

$$\boldsymbol{e^{2k\pi i} = 1}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{1}$$

und daher allgemein: $\boldsymbol{e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i}}$, d. h.:

$$\boldsymbol{e^{z+2k\pi i} = e^z} \tag{2}$$

[ebenso:

$$\mathfrak{Kof}\,(x + 2k\pi i) = \mathfrak{Kof}\,x, \quad \mathfrak{Sin}\,(x + 2k\pi i) = \mathfrak{Sin}\,x, \tag{3}$$

$$\mathfrak{Tg}\,(x + 2k\pi i) = \mathfrak{Tg}\,x, \quad \mathfrak{Kotg}\,(x + 2k\pi i) = \mathfrak{Kotg}\,x]. \tag{4}$$

Während also die trigonometrischen Funktionen die reelle Periode 2π haben, kommt der Exponentialfunktion die rein imaginäre Periode $2\pi i$ zu. Und zwar haben erstere nur diese reelle und letztere nur diese imaginäre Periode. Denn gesetzt es sei:

$$K = U + iV$$

irgend eine Periode der Exponentialfunktion, so müßte sein:

$$e^{x+K} = e^x e^K = e^x, \quad e^K = 1, \quad e^{U+iV} = 1,$$

also nach (10) in [227]:

$$e^U (\cos V + i \sin V) = 1, \quad \text{d. h.:} \quad e^U \cos V = 1, \quad e^U \sin V = 0.$$

Die letzte Gleichung gibt, da e^U für reelle Werte außer $U = -\infty$ nicht verschwindet, $\sin V = 0$, also $\cos V = \pm 1$. Das Minuszeichen ist zu verwerfen, da nach der ersten Gleichung $\cos V$ nur positiv sein kann. Daher:

$$V = 0, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 4\pi, \quad \pm 6\pi, \ldots$$

und

$$e^U = 1.$$

Diese Gleichung wird nur für einen reellen Wert von U erfüllt, nämlich für $U = 0$, also:

$$K = \pm 2k\pi i,$$

d. h. die Exponentialfunktion hat wirklich nur die eine unabhängige Periode $2\pi i$, also die trigonometrische Funktion entsprechend nur eine unabhängige Periode 2π. Man halte diesen Nachweis nicht für überflüssig, da es sehr wohl Funktionen mit zwei unabhängigen Perioden, etwa einer reellen und einer imaginären Periode geben könnte und auch wirklich solche Funktionen als elliptische Funktionen durch Umkehrung der sog. elliptischen Integrale entdeckt worden

sind. Übrigens sind die trigonometrischen Funktionen einerseits, die Exponentialfunktion und Hyperbelfunktionen andererseits Grenzfälle dieser elliptischen Funktionen.

229. Natürliche Logarithmen komplexer Zahlen. Aus der Gleichung:

$$z = e^Z \tag{1}$$

folgt durch Umkehrung:

$$Z = \ln z. \tag{2}$$

Diese Definition wird ohne jede Änderung von reellen auf komplexe Zahlen übertragen. Während aber dort erstens der numerus z positiv sein mußte, dann aber $\ln z$ eindeutig war und alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlief, ist hier z ganz beliebig und $\ln z$ durchaus nicht eindeutig, sondern unendlich vieldeutig, da nach [228] der Periodizitätsmodul $2\pi i$ existieren muß.

Ist also $(\ln z)$ ein Wert von $\ln z$, so sind alle anderen Werte durch die Formel bestimmt:

$$\ln z = (\ln z) + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

also z. B. für $z = 1$:

$$\ln 1 = 0 + 2k\pi i.$$

Die frühere Funktionalgleichung:

$$\ln x + \ln y = \ln (xy)$$

muß daher jetzt lauten:

$$\ln (z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \pm 2k\pi i.$$

Ist der numerus z in der Normalform:

$$z = \varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \varrho e^{i\varphi}$$

gegeben, so folgt:

$$\ln z = \ln \varrho + \ln e^{i\varphi} \pm 2k\pi i = \ln \varrho + i\varphi \pm 2k\pi i \tag{3}$$

oder, wenn z erst in die Normalform gebracht werden muß [220 3] [220 4]:

$$\ln z = \ln (x + iy) = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) + i\left(\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right) + 2k\pi\right) \tag{4}$$

mit der Maßgabe, daß erstens im ersten Glied der reelle Logarithmus zu nehmen ist und daß zweitens der $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ genommen werden muß, wenn x positiv ist, dagegen zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{3}{2}\pi$, wenn x negativ ist (vgl. [53]).

Beispiele.

$$\ln(+4+3i) = \ln 5 + i(\text{arc}(\text{tg} = +\tfrac{3}{4}) + 2k\pi),$$
$$\ln(+4-3i) = \ln 5 + i(\text{arc}(\text{tg} = -\tfrac{3}{4}) + 2k\pi),$$
$$\ln(-4+3i) = \ln 5 + i(\text{arc}(\text{tg} = -\tfrac{3}{4}) + \pi + 2k\pi),$$
$$\ln(-4-3i) = \ln 5 + i(\text{arc}(\text{tg} = +\tfrac{3}{4}) + \pi + 2k\pi).$$

Im besonderen kann nun endlich die Frage nach den Logarithmen negativer Numeri vollständig beantwortet werden. Man setze $y = 0$ und $-x$ statt x, nehme x positiv an, so wird aus (4):

$$\ln(-x) = \ln x + i(\pi \pm 2k\pi), \qquad (5)$$

also z. B. für $k = 0$:

$$\ln(-x) = \ln x + i\pi.$$

d. h. der Logarithmus eines negativen Numerus ist komplex. Sein Wert entsteht, wenn man zu dem Logarithmus des absoluten Wertes des Numerus πi oder ein ungerades Vielfaches von πi addiert oder subtrahiert. So ist z. B.:

$$\ln(-1) = \ln 1 + i(\pi \pm 2k\pi) = i(\pi \pm 2k\pi)$$

230. Die Formeln [67]:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = z) &= \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)\\
\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kof} = z) &= \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)\\
\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = z) &= \ln\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}\\
\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kotg} = z) &= \ln\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

gelten auch für komplexe Werte von z, wenn ganz allgemein die hyperbolische Areafunktionen als Umkehrungen der Hyperbelfunktionen definiert werden. Es fallen dabei die für reelle Werte gemachten Einschränkungen ganz fort, dagegen kann man, um auf die unendliche Vieldeutigkeit Rücksicht zu nehmen, links oder rechts ein beliebiges ganzes Vielfaches von $2\pi i$ addieren oder subtrahieren. Außerdem ist auf die Zweideutigkeit der Wurzeln zu achten.

Aber auch die trigonometrischen Arcusfunktionen sind jetzt auf Logarithmen zurückführbar. Man nehme z. B. die Formel

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz} + 1 : e^{iz}}{2} = \frac{e^{2iz}+1}{2e^{iz}},$$

oder

$$(e^{iz})^2 - 2e^{iz}\cos z + 1 = 0,$$

also nach Auflösung:

$$e^{iz} = \cos z + \sqrt{\cos^2 z - 1}$$

daher, wenn man logarithmiert:

$$iz = \ln\left(\cos z + \sqrt{\cos^2 z - 1}\right).$$

Hier setze man $\cos z = u$, $z = \operatorname{arc}(\cos = u)$, so wird:

$$\operatorname{arc}(\cos = u) = \frac{\ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)}{i} = -i \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right),$$

worauf der Arcus auf einen Logarithmus zurückgeführt ist. Kürzer gelangt man zu derselben Formel durch [227] (4α) und (1)

$$\cos z = \mathfrak{Cos}\,(iz) = u$$
$$z = \operatorname{arc}(\cos = u);\quad iz = \mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Cos} = u)$$
$$\operatorname{arc}(\cos = u) = -i\,\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Cos} = iu) = -i \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right).$$

Wird nun zuletzt noch z statt u geschrieben und ebenso mit den übrigen Arcus verfahren, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{arc}(\sin = z) &= -i \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)\\
\operatorname{arc}(\cos = z) &= -i \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)\\
\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = z) &= -\frac{i}{2} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}\\
\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = z) &= \frac{i}{2} \ln \frac{iz + 1}{iz - 1}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

231. Die Entwicklungen von [228] bis [230], welche noch erheblich ergänzt werden könnten, lehren eindringlich, wie die große Entdeckung Eulers über den Zusammenhang der Exponentialfunktion mit den trigonometrischen Funktionen nach allen Seiten ihre Folgen nach sich zieht. Doch ist gar nicht nötig, sämtliche Einzelheiten bis ins Kleinste auszuarbeiten, weil sie ausnahmlos auf dem Satz beruhen:

Nach Einführung komplexer Zahlen gibt es nur eine einzige wirklich unabhängige und elementare transzendente Funktion, nämlich die Exponentialfunktion.

Denn außer ihr gelten nur noch als elementar: erstens die logarithmische Funktion, welche ihre unmittelbare Umkehrung ist, zweitens und drittens die Hyperbelfunktionen und Kreisfunktionen, welche einfache Verbindungen der Exponentialfunktion darstellen und viertens und fünftens die hyperbolischen Areafunktionen und die gewöhnlichen Arcusfunktionen, welche wieder Umkehrungen der Hyperbelfunktionen und Kreisfunktionen sind. So bewahrheitet sich auch hier, daß die Einführung komplexer Zahlen oft nicht eine Vermehrung, sondern eine Verminderung der Schwierigkeiten für die höhere Mathematik bedeutet hat [223].

Im Anschluß an diese Betrachtungen sei noch eine gewiß sehr nahe liegende Frage erörtert, nämlich was bei möglichster Erweiterung des Potenzbegriffes wohl ganz allgemein unter

$$u^z$$

zu verstehen sei, wenn u und z beide beliebig komplex sind. Tut man am besten, einen solchen Ausdruck ganz fallen zu lassen und als widersinnig zu verwerfen oder ist es doch möglich, ihm einen Sinn beizulegen?

Das erstere ist sehr leicht und auf der Stelle ausgeführt, das letztere erfordert eine zweckmäßige Definition. Zunächst setzte man:

$$u^z = (e^{\ln u})^z,$$

also, wenn man die Absicht hat, die alte Potenzformel:

$$(a^b)^c = a^{bc},$$

wenn möglich bestehen zu lassen:

$$u^z = e^{z \ln u}. \tag{1}$$

Damit ist die Definition gefunden. Doch sei bemerkt, daß im allgemeinen hiermit die Potenz als eine unendlich vieldeutige Funktion ihrer Basis und ihres Exponenten definiert wird, da $\ln u$ den Periodizitätsmodul $2\pi i$ besitzt. Alle Werte zusammen sind in dem Ausdruck enthalten:

$$u^z = e^{z(\ln u \pm 2k\pi i)} = e^{z \ln u} \cdot e^{\pm 2k\pi z i} = (u^z) \cdot e^{\pm 2k\pi z i},$$

wo der Klammerausdruck einen der Werte der Potenz bestimmt. Nur wenn der Exponent z eine positive oder negative ganze Zahl ist, hat der zweite Faktor für jeden Wert von k immer den Wert 1, so daß die Potenz eindeutig wird. Ist z ein reeller rationaler Bruch mit dem Nenner q, so hat der zweite Faktor (wie in [222]) q verschiedene Werte:

Beispiel:

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i\left[i\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)\right]} = e^{-\frac{\pi}{2} \mp 2k\pi} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\mp 2k\pi},$$

also im besondern für $k = 0$

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Merkwürdigerweise ist dieser Wert, wie alle andern Werte von i^i reell.

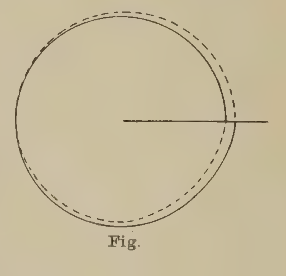
232. Selbstverständlich kann man auch bei Funktionen komplexer Veränderlicher eine Vieldeutigkeit durch gehörige Einschränkung des Spielraumes in Eindeutigkeit verwandeln, wie es für reelle Veränderliche wiederholt, z. B. [53] geschehen ist. So etwa wird $\ln z$ eindeutig bestimmt, wenn man festsetzt, daß sein imaginärer Teil

zwischen 0 und $2\pi i$ (ersterer Wert ein —, letzterer ausgeschlossen) liegen soll, was wegen des Periodizitätsmoduls $2\pi i$ immer möglich ist. Nach einer solchen Festsetzung würde ja auch u^z eine eindeutige Funktion von u und z werden.

Wie Cauchy und namentlich Riemann auf andere Weise die Vieldeutigkeit der Funktionen komplexer Veränderlicher zu beherrschen gelehrt haben, sei an einem sehr einfachen Beispiel erklärt. Gegeben sei die zweideutige Funktion:

$$Z = \sqrt{z} = \sqrt{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt{\varrho}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Man denke sich als Gebiet für z zwei Ebenen I und II, welche wie zwei Blätter eines Buches übereinanderliegen (Fig. 95). In I beschränke man φ auf den Spielraum von 0 bis 2π, in II von 0 bis -2π. Dann ist $\sin\frac{\varphi}{2}$ positiv oder negativ, je nachdem z in I oder in II angenommen wird. Riemann denkt sich nun I und II durch zwei übereinanderliegende von dem „Verzweigungspunkt" 0 (in welchem die beiden Werte zusammenfallen) ausgehende Schnitte, etwa in der Richtung $\varphi = 0$ gespalten und dann I und II längs dieser Schnitte so aneinandergeheftet, daß die obere Seite von I sich in der unteren von II und die untere Seite von I in der oberen Seite von II fortsetzt (was allerdings nur möglich ist, wenn sich die Blätter längs ihrer Schnitte durchdringen). Dann entsteht eine zweiblättrige Riemannsche Fläche, auf der die Funktion völlig eindeutig (und überall stetig) ist.


Fig.

Es geht nicht an, hier weiter auf diese herrliche Theorie Riemanns einzugehen, welche sich bei tieferen Forschungen über komplexe Funktionen von allergrößter Bedeutung erwiesen hat. In Durège, Theorie der komplexen Funktionen, findet man ihre Elemente in aller Klarheit und Gründlichkeit auseinandergesetzt.

233. Durch die Eulerschen Formeln

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x; \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x \tag{1}$$

oder umgekehrt,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{2}$$

kann auch die Trigonometrie auf eine rein analytische Grundlage gestellt werden, ohne irgendwelche Bezugnahme auf Geometrie. Zunächst folgt aus (1) durch Multiplizieren oder aus (2) durch Quadrieren und Addieren:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Sodann folgt aus

$$e^{ix}\, e^{ix_1} = e^{i(x_1 + x_2)}$$

sofort:

$$(\cos x + i \sin x)\,(\cos x_1 + i \sin x_1) = \cos(x + x_1) + i \sin(x_1 + x_2),$$

was in die beiden Gleichungen zerfällt:

$$\begin{aligned} \cos x \cos x_1 - \sin x \sin x_1 &= \cos(x + x_1); \\ \sin x \cos x_1 + \cos x \sin x_1 &= \sin(x + x_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Also sind auf der Stelle die Additionstheoreme wieder gefunden. Endlich führt die Formel:

$$(e^{ix})^n = e^{inx}$$

unmittelbar auf die Moivresche Formel:

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \tag{4}$$

welche schon in [221] auf andere Weise abgeleitet worden ist. Entwickelt man die linke Seite nach dem binomischen Lehrsatz:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + \binom{n}{1} i \cos^{n-1}\varphi \sin\varphi + \binom{n}{2} i^2 \cos^{n-2}\varphi \sin^2\varphi$$

$$+ \binom{n}{3} i^3 \cos^{n-3}\varphi \sin^3\varphi + \ldots + i^n \sin^n\varphi$$

und setzt für die Potenzen von i ihre Werte nach [221], so zerfällt (4) in die beiden reellen Gleichungen:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2}\varphi \sin^2\varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4}\varphi \sin^4\varphi - \cdots \tag{5}$$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1}\varphi \sin\varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3}\varphi \sin^3\varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5}\varphi \sin^5\varphi - \cdots, \tag{6}$$

welche lehren, ganz allgemein den Sinus und Kosinus eines vielfachen Winkels auszudrücken durch die Potenzen des Sinus und Kosinus des einfachen Winkels. Sehr bekannt sind ja die Formeln für $n = 2$, nämlich

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi; \quad \sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi.$$

Für $n = 3$ erhält man:

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \\ \sin 3\varphi &= 3\sin\varphi \cos^2\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \end{aligned}$$

oder für $n = 8$:

$$\cos 8\varphi = \cos^8\varphi - 28\cos^6\varphi \sin^2\varphi + 70\cos^4\varphi \sin^4\varphi - 28\cos^2\varphi \sin^6\varphi + \sin^8\varphi$$

$$\sin 8\varphi = 8\cos^7\varphi \sin\varphi - 56\cos^5\varphi \sin^3\varphi + 56\cos^3\varphi \sin^5\varphi - 8\cos\varphi \sin^6\varphi$$

usw. Man kann diese Formeln, wie für $n = 3$ geschehen, verschiedentlich umgestalten, so z. B. indem in (5) gesetzt wird:

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi, \quad \sin^4\varphi = (1 - \cos^2\varphi)^2 = 1 - 2\cos^2\varphi + \cos^4\varphi, \ \ldots$$

Bildet man den Quotienten von (6) und (5) und dividiert rechts Zähler und Nenner durch $\cos^n\varphi$, bzw. $\sin^n\varphi$, so folgt:

$$\operatorname{tg} n\varphi = \frac{\binom{n}{1}\operatorname{tg}\varphi - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3\varphi + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5 \dots}{1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4\varphi - \dots}, \tag{7}$$

$$\operatorname{cotg} n\varphi = \frac{\operatorname{cotg}^n\varphi - \binom{n}{2}\operatorname{cotg}^{n-2}\varphi + \binom{n}{4}\operatorname{cotg}^{n-4}\varphi \dots}{\binom{n}{1}\operatorname{cotg}^{n-1}\varphi - \binom{n}{3}\operatorname{cotg}^{n-3}\varphi + \binom{n}{5}\operatorname{cotg}^{n-5}\varphi \dots}, \tag{8}$$

so z. B. für $n = 2$ und $n = 3$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}; \quad \operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi - 1}{2\operatorname{cotg}\varphi},$$

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 3\operatorname{tg}^2\varphi}; \operatorname{cotg} 3\varphi = \frac{\operatorname{cotg}^3\varphi - 3\operatorname{cotg}\varphi}{3\operatorname{cotg}^2\varphi - 1}.$$

234. Etwas umständlicher ist die Ableitung der Formeln, mittels welcher die Potenzen des Kosinus oder des Sinus des einfachen Winkels ausgedrückt werden sollen durch die Kosinus und Sinus der vielfachen Winkel. Sie sind in diesem Sinne Umkehrungen von (5) und (6) in [233]. Man gehe von [233 2] aus. Es folgt:

$$\cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{e^{nix} + \binom{n}{1} e^{(n-1)ix} e^{-ix} + \binom{n}{2} e^{(n-2)ix} e^{-2ix} + \dots + e^{-nix}}{2^n}$$

$$= \frac{e^{nix} + \binom{n}{1} e^{(n-2)ix} + \dots + \binom{n}{n-1} e^{-(n-2)ix} + e^{-nix}}{2^n}$$

$$= \frac{(e^{nix} + e^{-nix}) + \binom{n}{1}(e^{(n-2)ix} + e^{-(n-2)ix}) + \dots}{2^n}$$

also nach [233 2]

$$(\cos x)^n = \frac{\cos nx + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x + \cdots}{2^{n-1}}$$

Ist n ungerade $= 2p + 1$, so wird das letzte Glied im Zähler:

$$\binom{2p+1}{p}\cos x.$$

Ist aber n gerade $= 2p$, so wird des letzte Glied im Zähler konstant und zwar:

$$\frac{1}{2}\binom{2p}{p}.$$

Man vergesse bei diesem Glied nicht den Faktor 1 : 2 (welcher bei den übrigen Gliedern fehlt, weil letztere aus zwei Gliedern der ursprünglichen Entwicklung gebildet worden sind, wobei der Faktor 2 gegen den Nenner gehoben wurde). So ergibt sich für $n = 7$ und $n = 8$

$$(\cos x)^7 = \frac{\cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x}{64}$$

$$(\cos x)^8 = \frac{\cos 8x + 8\cos 6x + 28\cos 4x + 56\cos 2x + 35}{128}.$$

(Das letzte Glied im Zähler der Formel ist nicht

$$\binom{8}{4}, \text{ sondern } \frac{1}{2}\binom{8}{4} = \frac{1}{2}\cdot 70 = 35.)$$

Die entsprechende Entwicklung von:

$$(\sin x)^n = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n$$

ist ziemlich unbequem, denn erstens bewirkt das — Zeichen im Zähler einen Wechsel der Vorzeichen und zweitens haben die Potenzen von i vier verschiedene Werte, je nachdem n durch 4 teilbar ist, oder die Reste 1, 2, 3 läßt. Man halte sich daher lieber an die bereits abgeleitete Gleichung (1), ersetze in ihr zunächst x durch $\frac{\pi}{2} - x$, also $\cos x$ durch $\sin x$ und forme schließlich auch die rechte Seite entsprechend um. So z. B.

$$(\sin x)^7 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^7$$

$$= \frac{\cos\left(7\frac{\pi}{2} - 7x\right) + 7\cos\left(5\frac{\pi}{2} - 5x\right) + 21\cos\left(3\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 35\left(\cos\frac{\pi}{2} - x\right)}{64}$$

$$= \frac{-\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x}{64},$$

$$(\sin x)^8 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^8$$

$$= \frac{\cos\left(8\frac{\pi}{2} - 8x\right) + 8\cos\left(6\frac{\pi}{2} - 6x\right) + 28\cos\left(4\frac{\pi}{2} - 4x\right) + 56\cos\left(2\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 35}{128}$$

$$= \frac{\cos 8x - 8\cos 6x + 28\cos 4x - 56\cos 2x + 35}{128}.$$

Ist das Produkt:

$$(\cos x)^m \cdot (\sin x)^n$$

nach den vielfachen Winkeln zu entwickeln, so kommt man wohl meist am schnellsten zum Ziele, wenn man die Faktoren entwickelt, dann Glied für Glied ausmultipliziert, dabei die Formeln:

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

usw. anwendet und zuletzt zusammenzieht. Beispiel:

$$(\cos x)^4(\sin x)^3 = \frac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8}\cdot\frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}$$

$$= \frac{-\cos 4x\sin 3x - 4\cos 2x\sin 3x - 3\sin 3x + 3\cos 4x\sin x + 12\cos 2x\sin x + 9\sin x}{32}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2},$$

$$(\cos x)^4(\sin x)^3$$

$$= \frac{-\sin 7x + \sin x - 4\sin 5x - 4\sin x - 6\sin 3x + 3\sin 5x - 3\sin 3x + 12\sin 3x - 12\sin x + 18\sin x}{64}$$

$$= \frac{-\sin 7x - \sin 5x + 3\sin 3x + 3\sin x}{64}.$$

Übungen zu § 28.

1. Wenn man in der Formel (5) [233] für $\sin^2\varphi$, $\sin^4\varphi\ldots$ setzt $1-\cos^2\varphi$, $(1-\cos^2\varphi)^2\ldots$ und anders ordnet, so erhält man eine Gleichung von folgender Form:

$$\cos n\varphi = A_n\cos^n\varphi + A_{n-2}\cos^{n-2}\varphi + A_{n-4}\cos^{n-4}\varphi + \cdots$$

Es soll versucht werden $A_n, A_{n-2}, A_{n-4}\ldots$ als Funktionen der ganzen Zahl n zu ermitteln (zweimal differenzieren).

2. Ist n gerade, so kann statt (1) auch entwickelt werden wie folgt:

$$\cos n\varphi = B_n\sin^n\varphi + B_{n-2}\sin^{n-2}\varphi + \cdots + B_2\sin^2\varphi + B_0.$$

Die Koeffizienten $B_n, B_{n-2}, \ldots, B_2, B_0$ sind festzustellen.

3. Ist n ungerade, so kann statt (1) auch entwickelt werden wie folgt:

$$\cos n\varphi = \cos\varphi(C_{n-1}\sin^{n-1}\varphi + C_{n-3}\sin^{n-3}\varphi + \ldots + C_2\sin^2\varphi + C_0).$$

Die Koeffizienten $C_{n-1}, C_{n-3}, \ldots, C_2, C_0$ sind festzustellen.

4. Entsprechende Ausdrücke zu 1. 2. 3. sollen für $\sin n\varphi$ untersucht werden.

5. $\sin(5{,}3462 + 2{,}3467i)$, $\ln(8{,}7654 - 3{,}6483i)$,

$$\operatorname{arc}(\cos = 7),\ \operatorname{arc}(\sin = 8),\ \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = 7i),\ \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = 8i)$$

sind zu berechnen (fünfstellig).

§ 29. Differenzieren von Funktionen komplexer Veränderlicher.

235. Der Begriff eines Differentials wird auf eine komplexe Veränderliche $z = x + iy$ übertragen, indem man den reellen Zahlen x und y Differentiale dx und dy gibt und darauf das Differential von z durch die Gleichung $dz = dx + i\,dy$ bestimmt. Dabei sind allgemein

dx und dy zwar beide unendlich klein, sonst aber ganz unabhängig voneinander. Geometrisch ausgedrückt: Man soll von $P(x, y)$ in der komplexen Ebene zu irgendeinem Nachbarpunkt $P_1(x_1, y_1)$ übergehen, was in allen unzählig vielen Richtungen möglich ist, von denen jede einem anderen Verhältnis von dy zu dx entspricht.

Eine Funktion: $Z = f(z)$ heißt stetig, wenn einem dz ein dZ entspricht, genau wie in § 13. Da Z auch komplex ist, so setze man: $Z = X + iY$ und daher $dZ = dX + idY$, so daß die Bedingung der Stetigkeit auch so ausdrückbar ist: Eine Funktion

$$Z = X + iY = f(z) = f(x + iy)$$

heißt stetig, wenn den Differentialen dx und dy zwei Differentiale dX und dY entsprechen. Es müssen X und Y, betrachtet als Funktionen von x und y, was symbolisch durch die Gleichungen:

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y)$$

angezeigt werden mag, stetig sein und so wird die Frage nach der Stetigkeit einer komplexen Funktion zurückgeführt auf die Frage nach der Stetigkeit zweier reeller Funktionen von zwei reellen Veränderlichen.

Es ist aber doch ein wesentlicher Unterschied zwischen einer reellen und einer komplexen Veränderlichen hinsichtlich einer stetigen Veränderlichkeit vorhanden. Wenn eine reelle Veränderliche x sich von einem Wert x_a stetig zu einem anderen Wert x_b verändert, so muß sie durch alle Zwischenwerte hindurch oder geometrisch: der veränderliche Punkt der x-Achse muß die ganze Strecke von P_a bis P_b durchlaufen. Sein Weg ist „vorgeschrieben“.

Anders bei einer komplexen stetigen, sonst aber willkürlichen Veränderlichen zwischen zwei Werten oder zwischen zwei Punkten der zugehörigen komplexen Ebene. Hier ist der Weg nicht vorgeschrieben, sondern kann auf irgendeiner Kurve von dem einen zum anderen Punkte genommen werden. Eine Folge davon ist, daß man bei komplexen Veränderlichen vereinzelten Unstetigkeitsstellen oder Unstetigkeitspunkten immer aus dem Wege gehen kann, wenn man von einem Punkt zu einem anderen stetig fortschreiten will, was bei reellen Veränderlichen nicht möglich ist, wenn sich die Unstetigkeitspunkte zwischen den beiden Punkten befinden.

Die Mathematiker haben diesen Unterschied bei vertieftem Studium komplexer Funktionen gar sehr zur Geltung zu bringen gewußt; hier mag der Hinweis auf ihn genügen.

236. Hat man den Begriff des Differentials übertragen, so wird man ein gleiches mit dem Begriff des Differentialquotienten tun. Er ist also der Bruch:

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{df(z)}{dz} = \frac{dX + idY}{dx + idy} \tag{1}$$

und hat, da dx, dy, dX, dY alle vier gleichzeitig die 0 zum Limes haben, zunächst eine Form, welche sich nur unendlich wenig von der unbestimmten Form $0:0$ unterscheidet. Mit ihm ist nur dann etwas anzufangen, wenn über die Funktion Z diejenige Voraussetzung gemacht wird, welche in [120] die Voraussetzung ihrer Differenzierbarkeit oder die Existenz einer abgeleiteten Funktion

$$Z' = f'(z) \tag{2}$$

genannt wurde, derart, daß wie in [116] die Gleichung besteht:

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{df(z)}{dz} = f'(z) + \varepsilon, \tag{3}$$

wo ε eine unendlich kleine (komplexe) Zahl bezeichnete.

Die elementaren Funktionen haben sämtlich bei Beschränkung auf reelle Zahlen und nach Ausschluß vereinzelter Unstetigkeitspunkte, die auch zugleich Unendlichkeitspunkte sein können, aber nicht zu sein brauchen, ihre abgeleiteten Funktionen gehabt, deren Werte in § 15 Tafel II gesammelt sind. So liegt die Frage nahe genug: Haben diese Funktionen nach ihrer in § 27 und § 28 vorgenommenen Erweiterung auf komplexes Gebiet auch jetzt noch Ableitungen und sind diese etwa durch dieselben Funktionsausdrücke bestimmt? Mit anderen Worten: Ist Tafel II unverändert auch für komplexe Zahlen richtig?

Sie werde an zwei Beispielen geprüft. Es sei:

$$Z = z^n; \quad \frac{dZ}{dz} = \frac{d(z^n)}{dz} = \frac{(z+dz)^n - z^n}{dz}$$

oder nach Anwendung des binomischen Lehrsatzes, der auch für komplexe Grundzahlen gilt, wenn nur der Exponent n eine ganze Zahl ist:

$$\frac{d(z^n)}{dz} = \frac{z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} dz + \binom{n}{1} z^{n-2}(dz)^2 + \cdots + (dz)^n - z^n}{dz}$$

$$= \binom{n}{1} z^{n-1} + \left[\binom{n}{2} z^{n-2} dz + \binom{n}{3} z^{n-3}(dz)^2 + \cdots + (dz)^{n-1}\right].$$

Die Glieder in der eckigen Klammer sind alle unendlich klein. Ihre Summe ist daher auch eine unendlich kleine Größe ε, also in der Tat:

$$\frac{d(z)^n}{dz} = \binom{n}{1} z^{n-1} + \varepsilon.$$

Es sei ferner:

$$Z = e^z; \quad \frac{dZ}{dz} = \frac{d(e^z)}{dz} = \frac{e^{z+dz} - e^z}{dz},$$

oder da die Gleichung: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ auch für komplexe Exponenten gilt:

$$\frac{d(e^z)}{dz} = \frac{e^z \cdot e^{dz} - e^z}{dz} = e^z \cdot \frac{e^{dz} - 1}{dz},$$

folglich:

$$\frac{d(e^z)}{dz} = e^z \frac{\left(1 + \frac{dz}{1!} + \frac{(dz)^2}{2!} + \cdots\right) - 1}{dz}$$

$$= e^z + e^z\left[\frac{dz}{2!} + \frac{(dz)^2}{3!} + \frac{(dz)^3}{4!} + \cdots\right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist unendlich klein, also auch der zweite Summand. Es folgt daher in der Tat:

$$\frac{de^z}{dz} = e^z + \varepsilon.$$

Es ist keine große Arbeit, in gleicher Weise die übrigen Funktionen auf ihre Ableitungen für den Fall komplexer Veränderlicher zu prüfen. Man wird immer dieselben abgeleiteten Funktionen antreffen, wie bei der Einschränkung auf reelle Veränderliche. Also:

Tafel II ist ohne jede Änderung auch auf komplexe Veränderliche anwendbar. Ein gleiches gilt für Tafel I, wie sich ebenso einfach nachweisen läßt.

237. Die Existenz einer abgeleiteten Funktion ist für reelle Veränderliche analytisch so gedeutet worden, daß die ursprüngliche Funktion in der nächsten Umgebung eines Funktionswertes durch eine ganze Funktion ersten Grades ersetzbar sei, vgl. [132], bis auf Glieder höherer Ordnung. Geometrisch entsprach dieser Deutung, daß die Kurve in dem betreffenden Punkte eine Tangente habe oder daß ein unendlich kleines Stück der Kurve mit unbegrenzter Genauigkeit als geradlinig angesehen werden können.

Bei Übergang auf komplexe Veränderliche bleibt die analytische Deutung ganz unverändert. Wenn bis auf Größen höherer Ordnung:

$$dZ = f'(z)dz$$

ist, so folgt, wenn $dz = z_1 - z$, $dZ = Z_1 - Z$ gesetzt wird:

$$Z_1 - Z = f'(z)(z_1 - z),$$

oder wenn z und Z als gegeben durch z_0 und Z_0 ersetzt und dafür z_1 und Z_1 als veränderlich einfach z und Z geschrieben werden:

$$Z = (Z_0 - z_0 Z_0') + Z_0' z \quad \text{oder} \quad Z = a + bz$$

wo $a = Z_0 - z_0 Z_0'$, $b = Z_0'$ gesetzt wird. Also ganz wie in [132].

Und die geometrische Deutung? Sie allerdings muß ganz anders ausfallen als bei reellen Veränderlichen, wie a priori klar ist, da die Funktion selbst ganz anders gedeutet wird, nämlich als die Abbildung einer komplexen Ebene auf eine andere. Der Existenz der abgeleiteten Funktion wird also eine besondere Eigentümlichkeit dieser Abbildung durch komplexe Funktionen entsprechen müssen.

Welcher Art sie ist, folgt auf der Stelle aus der in [225] nachgewiesenen Eigenschaft jeder komplexen ganzen Funktion ersten Grades, nämlich der vollkommenen Ähnlichkeit. Also wird eine beliebige komplexe Funktion (so lange ihre Ableitung existiert und endlich, d. h. von 0 und ∞ verschieden ist) eine Abbildung ergeben, die zwar nicht im ganzen, aber doch in den kleinsten Teilen ähnlich ist, also eine sogenannte „konforme“ Abbildung, wie sie Gauß genannt hat.

Endliche ebene Figuren werden also bei der Abbildung zwar Verzerrungen erleiden können und nicht ähnlich bleiben. Aber bei unendlicher Kleinheit verschwinden die Verzerrungen und tritt Ähnlichkeit ein. Im besonderen werden daher unendlich kleinen Kreisen wieder unendlich kleine Kreise entsprechen, wie umgekehrt hierin eine erschöpfende Definition einer konformen Abbildung erblickt werden kann.

Erstes Beispiel: Gegeben sei die Funktion

$$Z = \frac{1}{z}.$$

Daß diese Abbildung konform ist, folgt aus ihrer in [225] nachgewiesenen Eigenschaft, eine Kreisverwandtschaft zu sein. Es entsprechen Kreisen wieder Kreise, also unendlich kleinen Kreisen wieder unendlich kleine Kreise.

Zweites Beispiel: Gegeben sei die Funktion

$$Z = z^2; \quad X + iY = (x + iy)^2;$$

also:

$$X = x^2 - y^2, \quad Y = 2xy.$$

Jedem Punkt $P(x, y)$ entspricht in der Abbildung $Q(X, Y)$. Man bezeichne mit ds und ds_1 zwei unendlich kleine Strecken auf der ursprünglichen Ebene und ihrer Abbildung. Es ist:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad ds_1 = \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2},$$

andererseits ist nach totaler Differentiation:

$$dX = 2x dx - 2y dy, \quad dY = 2x dy + 2y dx,$$

$$\begin{aligned} ds_1 &= \sqrt{(2x dx - 2y dy)^2 + (2x dy + 2y dx)^2} \\ &= \sqrt{(dx)^2(4x^2 + 4y^2) + (dy)^2(4y^2 + 4x^2) + dx\,dy(-8xy + 8xy)} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \end{aligned}$$

oder:

$$ds_1 = 2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot ds.$$

Das Verhältnis $ds_1 : ds$ ist also von $dy : dx$ ganz unabhängig, d. h. einem unendlich kleinen Kreis entspricht ein unendlich kleiner Kreis. Die Abbildung ist konform.

Konforme Abbildungen nennt man auch winkeltreu, weil wegen der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen die Winkel, unter denen sich Kurven schneiden, unverändert übertragen werden. Um dies im zweiten Beispiel für die Parallelen zur x-Achse und y-Achse nachzuweisen, eliminiere man erst x, dann y. Es folgt:

$$X = \frac{Y^2}{4y^2} - y^2, \quad (1) \qquad X = x^2 - \frac{Y^2}{4x^2}. \quad (2)$$

Wenn also y bzw. x konstant gesetzt werden, so sind (1) und (2) Parabeln, deren Achsen mit der X-Achse zusammenfallen. Die Parabeln (1) krümmen sich um die $+X$-Achse, die Parabeln (2) krümmen sich um die $-X$-Achse. Für eine Parabel (1) ist der Parameter $p = 2y^2$ und der Abstand des Scheitels von $O(0,0) = y^2 = \frac{p}{2}$; d. h. für alle Parabeln (1) ist $O(0,0)$ der Brennpunkt. Ein gleiches gilt für die Parabeln (2), d. h. (1) und (2) sind zwei Systeme konfokaler Parabeln.

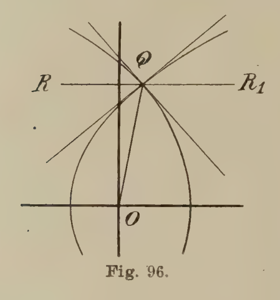


Fig. 96.

Setzt man y konstant, so erhält man in der xy-Ebene Parallelen zur x-Achse, setzt man x konstant, so Parallelen zur y-Achse. Da diese beiden Scharen sich senkrecht schneiden, so müssen es auch die beiden Scharen konfokaler Parabeln tun. Und in der Tat ist es so, denn nach [143] halbiert die Tangente von (1) den Winkel OQR und von (2) den Nebenwinkel OQR_1 (Fig. 96).

Es ließen sich die beiden Beispiele, sowie beliebig herausgegriffene andere noch nach vielen Seiten hin zu schönen geometrischen Untersuchungen verwerten über die betreffenden Abbildungen. Doch die Abbildungslehre ist ein Sondergebiet, in das ein allgemeines Lehrbuch der Differentialrechnung nicht allzutief eindringen kann. Man sieht auch ohnehin, wie überraschend Zusammenhänge in der Mathematik sein können; denn wer würde von vornherein daran denken, daß komplexe Zahlen und konforme Abbildungen in so innigen Beziehungen stehen. Erstere sind analytisch abstrakt und für die Anwendungen nach kurzichtigem Urteil „offenbar" wertlos. Und doch haben sie hier, wie in vielen vielen andern Anwendungen die größten „reellen" Erfolge erzielt. Freilich nicht in der Weise, daß man nur im Vorbeigehen die Hand nach ihnen hätte auszustrecken brauchen.

238. Die Gleichung:

$$\frac{dZ}{dz} = f'(z) \qquad (1)$$

hat noch eine andere Deutung, wenn X und Y nach [235] als Funktionen von x und y angesehen werden. Es folgt dann nach dem Satz vom totalen Differentiale

$$dZ = dX + i\,dY = \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy\right)$$
$$= \left(\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - i\frac{\partial X}{\partial y}\right)i\,dy,$$

also:

$$\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - i\frac{\partial X}{\partial y}\right)i\,dy}{dx + i\,dy} = f'(z).$$

dx und dy sind beide unendlich klein, sonst aber unabhängig voneinander. Man setze z. B. einmal $dy = 0$, das andere mal $dx = 0$, so folgt:

$$f'(z) = \frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} - i\frac{\partial X}{\partial y}, \tag{2}$$

also nach Zerlegung in zwei Gleichungen:

$$\alpha)\ \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{und} \quad \beta)\ \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y}. \tag{3}$$

Diese beiden partiellen Differentialgleichungen drücken also analytisch die Bedingung aus, daß $Z = X + iY$ eine (differenzierbare) Funktion sei von $z = x + iy$.

Erstes Beispiel.

$$Z = \frac{1}{z}$$
$$X + iY = \frac{1}{x+iy} = \frac{x - iy}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2},$$

daher:

$$X = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad Y = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Die partiellen Differentiationen ergeben:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{+2yx}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)\cdot(-1)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Man sieht, die beiden Gleichungen (3) sind identisch erfüllt.

Zweites Beispiel.

$$Z = z^2,$$
$$X = x^2 - y^2, \qquad Y = 2xy,$$
$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -2y,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = 2x.$$

Die Gleichungen (3) sind gleichfalls erfüllt.

Übrigens sind nach (3α) und (3β) nicht nur X und Y aneinandergeknüpft, sondern infolge hiervon ist X selbst und ebenso Y selbst durchaus nicht eine ganz willkürliche Funktion von x und y. Man differenziere etwa (α) nach x und (β) nach y, so folgt:

$$\frac{\partial^2 X}{(\partial x)^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 X}{(\partial y)^2},$$

also:

$$\alpha)\ \frac{\partial^2 X}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 X}{(\partial y)^2} = 0; \quad \text{und ebenso} \quad \beta)\ \frac{\partial^2 Y}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 Y}{(\partial y)^2} = 0. \qquad (4)$$

Im zweiten Beispiel ist:

$$\frac{\partial^2 X}{(\partial x)^2} = +2, \quad \frac{\partial^2 X}{(\partial y)^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 Y}{(\partial x)^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{(\partial y)^2} = 0;$$

man sieht, (4) ist erfüllt. Übrigens vergleiche man die Laplacesche Gleichung in [171 11].

239. In diesem und den beiden vorigen Paragraphen ist ungefähr das über komplexe Funktionen enthalten, was zu wissen allererst nötig sein möchte, so wenig es auch im Vergleich zu dem ist, was der Mathematiker von Fach über sie wissen muß. Aber die Elemente sind doch gebracht, freilich dem Zwecke des Buches entsprechend nicht so ausführlich, wie für die Funktionen reeller Veränderlicher, welche nun wieder ausschließlich oder doch beinahe ausschließlich zugrunde gelegt werden sollen bei Darlegung der Elemente der Integralrechnung.

Im übrigen soll das Komplexe, wo es später noch gelegentlich auftritt, nur wie eine Durchgangsstation sein in dem Sinne, daß von etwas Reellem durch Komplexes hindurch wieder zu Reellem übergegangen wird.

Wie das zu verstehen ist, sei durch das folgende Beispiel erläutert. Es soll die p^{te} Ableitung der Funktion:

$$f(x) = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)$$

bestimmt werden. Es ist:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{i}{2(x+i)} - \frac{i}{2(x-i)}$$
$$= \frac{i}{2}\left((x+i)^{-1} - (x-i)^{-1}\right),$$

also nach $p-1$ maliger Differentiation

$$f^p(x) = \frac{i}{2}(-1)(-2)\ldots\cdot(-(p-1))\cdot\left((x+i)^{-p} - (x-i)^{-p}\right)$$
$$= (-1)^{p-1}(p-1)!\,\frac{i}{2}\left(\frac{1}{(x+i)^p} - \frac{1}{(x-i)^p}\right)$$
$$= (-1)^{p-1}(p-1)!\,\frac{\frac{i}{2}\left((x-i)^p - (x+i)^p\right)}{(x^2+1)^p}.$$

Entwickelt man die Potenzen von $x - i$ und $x + i$ nach dem binomischen Lehrsatz und zieht zusammen, so wird auch der Zähler reell. Man erhält:

$$f^p(x) = (-1)^{p-1}(p-1)!\,\frac{\binom{p}{1}x^{p-1} - \binom{p}{3}x^{p-3} + \binom{p}{5}x^{p-5}\ldots}{(x^2+1)^p}.$$

Die Aufgabe ist gelöst. Das Imaginäre war, wie man sieht, nur „Durchgangsstation"

Übungen zu § 29.

1. Die durch die Gleichung:

$$Z = e^z$$

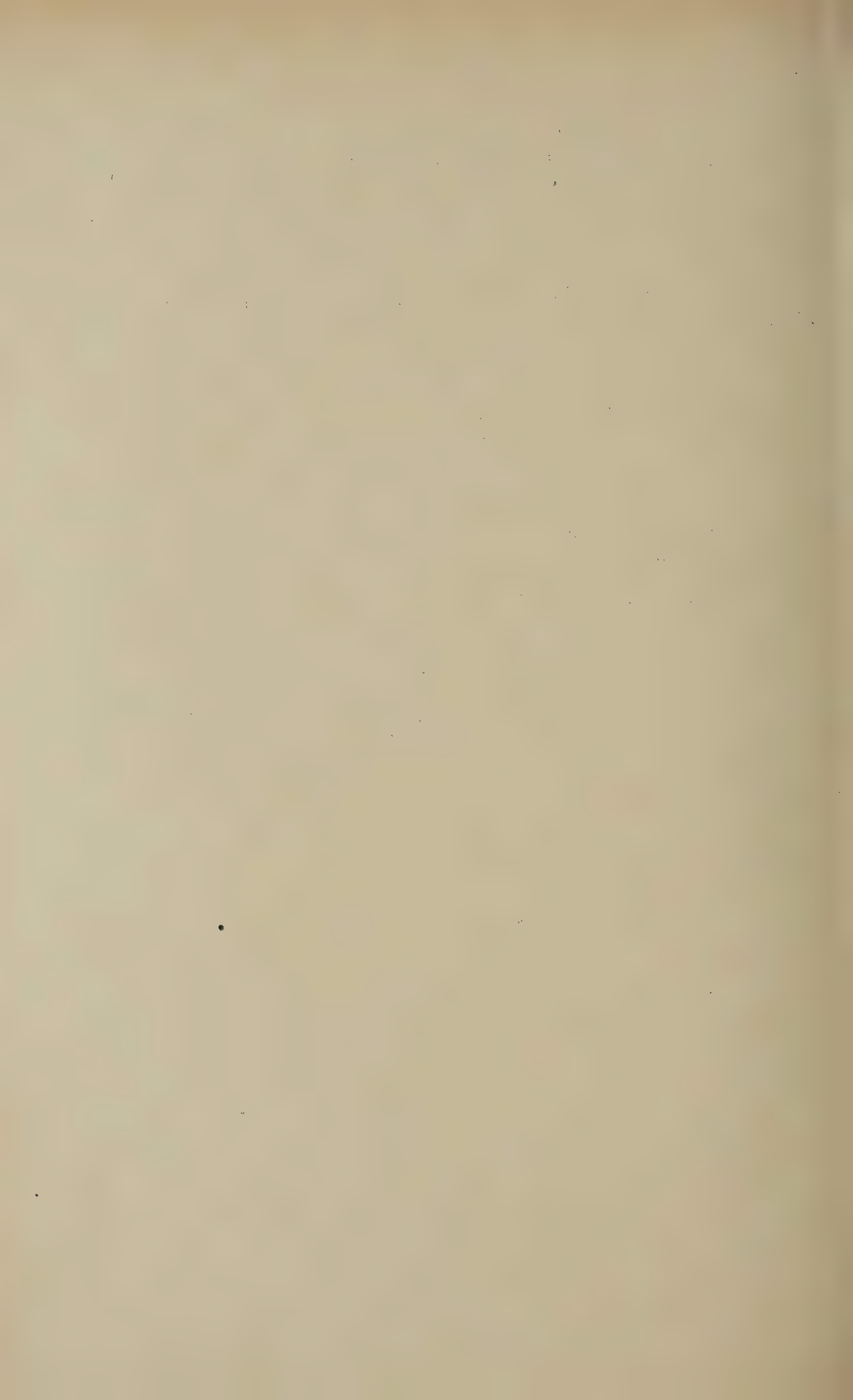
bestimmte Exponentialfunktion der komplexen Veränderlichen z soll als Grundlage für die Abbildung zweier komplexer Ebenen aufeinander untersucht werden.

2. Es ist zu zeigen, daß zu (1) die partiellen Differentialgleichungen (3) und (4) in [238] erfüllt sind.

3. Gegeben die Funktion der reellen Veränderlichen:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}.$$

Es soll für jedes p die p^{te} Ableitung mittelst der komplexen Größen als „Durchgangsstation" bestimmt werden.



DRITTES BUCH

INTEGRALRECHNUNG



Siebenter Abschnitt.

Grundformeln der Integralrechnung.

§ 30. Das bestimmte und das unbestimmte Integral.

240. Nach seiner ursprünglichen Bedeutung ist das Integral der Grenzwert einer Summe. Es soll sein:

$$\int = \lim \sum, \tag{1}$$

wo links das von Leibniz eingeführte Integralzeichen und rechts das Summenzeichen steht.

Der Grenzübergang beruht auf der Annahme, daß die Summanden sämtlich unendlich klein werden, während ihre Anzahl unbegrenzt wächst. Jedes Kontinuum wird ein Integral, wenn man es in unendlich kleine Teile, in seine Differentiale zerlegt denkt. Es sei K ein solches Kontinuum, dK eines seiner unendlich vielen Differentiale, so soll sein:

$$K = \int dK = \lim \sum \Delta K. \tag{2}$$

K wird so ein Ganzes, ein „Integrum", zusammengesetzt aus unbegrenzt vielen Teilen. Diese Auffassung tritt hauptsächlich in Kraft, wo die Formeln und Methoden der Elementarmathematik nicht ausreichen. Zwar kann auch dann die Limesrechnung zuweilen auf andere Weise geführt werden, wie des Archimedes geniale Quadratur der Parabel [91] beweist, aber doch kommen solche Einzelfälle nicht auf gegenüber den umfassenden Methoden der eigentlichen Integralrechnung.

Das Erste, was nach (2) zu geschehen hat, um ein Kontinuum durch Integrieren auszuwerten, ist die Festsetzung und Formbildung von dK. Die folgenden fünf Beispiele sollen zeigen, wie dieses Vorspiel ausgeführt wird.

Fig. 97.

I. Quadratur (Flächenberechnung) einer Kurve (Fig. 97). Wenn die Fläche F gesucht wird, begrenzt durch ein Stück einer Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$, durch das zugehörige Stück der Abszisse und durch Anfangs- und Endordinate, so setze man:

$$dF = y\,dx = f(x)\,dx,$$

also:

$$F = \int dF = \int y\,dx = \int f(x)\,dx. \tag{3}$$

II. Rektifikation (Geradestreckung) einer Kurve. Wenn die Bogenlänge s einer Kurve zwischen zwei ihrer Punkte bestimmt werden soll, so setze man nach [144]

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx,$$

$$s = \int ds = \int \sqrt{1 + (y')^2}\,dx, \tag{4}$$

oder in Polarkoordinaten [170]:

$$s = \int ds = \int \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi. \tag{5}$$

III. Wenn die Fläche eines Sektors gesucht wird (Fig. 98), so ist [170]:

$$dS = \frac{r^2}{2}\,d\varphi,$$

also:

$$S = \int dS = \int \frac{r^2}{2}\,d\varphi = \frac{1}{2}\int r^2\,d\varphi. \tag{6}$$

IV. Kubatur oder Volumenberechnung (Fig. 99). Wenn das Volumen V eines von zwei ebenen parallelen Flächen begrenzten Körpers zu bestimmen ist, so denke man ihn nach dem Prinzip des Cavalieri durch unendlich viele zu den Grenzflächen parallele Ebenen in unend-

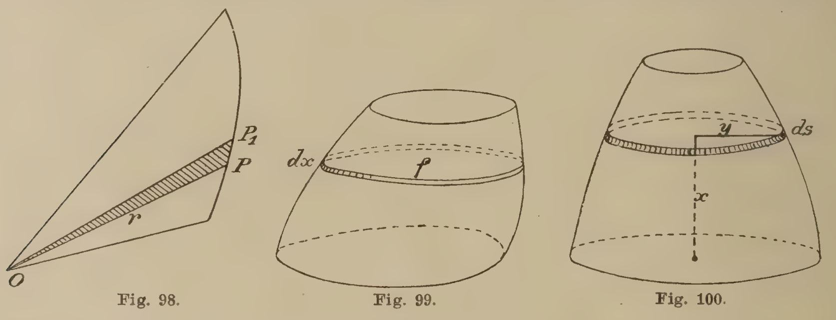


Fig. 98. Fig. 99. Fig. 100.

lich dünne Scheiben zerlegt, bezeichne die Dicke einer Scheibe mit dx und eine ihrer beiden Oberflächen (die bis auf unendlich kleine Größen einander gleich sind, wenn die Querschnitte sich stetig ändern) mit f, so ist:

$$dV = f\,dx,$$

also:

$$V = \int dV = \int f\,dx. \tag{7}$$

IV a. Im besonderen folgt für einen Rotationskörper, da f ein Kreis mit dem Radius y ist:

$$V = \int \pi y^2\,dx = \pi \int y^2\,dx. \tag{8}$$

V. Soll nicht das Volumen, sondern die Oberfläche O eines Rotationskörpers berechnet werden (Fig. 100), so nehme man für dO einen durch

die zu IVa genannte Zerlegung entstehenden unendlich schmalen Ring. Sein Radius ist y, seine Länge also $= 2\pi y$, seine Breite ist ds[1]), also:

$$dO = 2\pi y\, ds = 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx;$$

folglich:

$$O = \int dO = 2\pi \int y\, ds = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (9)$$

241. Das bestimmte Integral. Alle fünf Beispiele haben gemeinsam, daß unter dem Integralzeichen nach Feststellung des Differentials ein Produkt steht. Sein zweiter Faktor ist das Differential nicht der zu bestimmenden Größe selbst, sondern einer andern Größe x oder φ, welche beim Integrieren die Rolle der ursprünglichen Veränderlichen spielen soll. Ehe es seinen Anfang nimmt, muß der erste Faktor, also:

$$y; \;\; \sqrt{1 + (y')^2}; \;\; \sqrt{r^2 + (r')^2}; \;\; r^2; \;\; f; \;\; y^2; \;\; y\sqrt{1 + (y')^2},$$

oder wie er sonst in andern Fällen heißen mag, als Funktion der ursprünglichen Veränderlichen x oder φ bestimmt sein, was selbstverständlich erst bei einer ganz bestimmten Aufgabe möglich ist. So erhält das Integral in allen Fällen die Form:

$$\int f(x)\, dx, \qquad (1)$$

wo die ursprüngliche Veränderliche mit x bezeichnet ist und $f(x)$ eine beliebig gegebene Funktion von x bedeutet. Ferner ist klar, daß x nur zwischen den beiden Grenzen gebraucht wird, innerhalb deren die Differentiale liegen, so weit sie beim Integrieren in Betracht kommen. Bezeichnet man die Grenze, wo das Integrieren anfangen soll, mit a, die Grenze, wo es aufhören soll, mit b, behält sich ferner vor, die Funktion $f(x)$ durch einen Buchstaben, etwa durch y zu ersetzen, so daß:

$$y = f(x) \qquad (2)$$

ist und nennt endlich allgemein J den Wert des Integrals, so schreibt man:

$$J = \int_{x=a}^{x=b} y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (3)$$

Diese Formel stellt völlig analytisch abstrakt ein sogenanntes bestimmtes Integral vor, d. h. ein Integral mit bestimmten Grenzen. Was in einem gegebenen Fall das Integral sonst in der Anwendung auf Geometrie oder Mechanik oder Physik bedeutet, kommt dabei gar nicht in Betracht. Folgende Bezeichnungen knüpfen sich noch an:

[1]) Aber nicht dx! Merkwürdigerweise wird dieser Fehler bei Anfängern fast immer gemacht, besonders wenn IVa vorangegangen ist.

Erstens. Die Funktion $y = f(x)$ heißt die zu integrierende Funktion oder Integrand.

Zweitens. a heißt untere, b heißt obere Grenze des Integrals.

Drittens. Der Spielraum von x zwischen a und b heißt Integrationsweg.

Wie eben gesagt, kommt es in der strengen Analysis auf eine etwaige geometrische Bedeutung des Integrals gar nicht an. Es kann z. B. dasselbe analytische Integral in einem Falle einer Quadratur, in einem zweiten Falle einer Rektifikation und in einem dritten Falle einer Kubatur dienen. Soll aber umgekehrt ein analytisches Integral geometrisch veranschaulicht werden, so zieht man Beispiel I in [240] allen anderen vor. Man deutet das Integral als Fläche, die ursprüngliche Veränderliche als Abszisse, den Integranden $y = f(x)$ als Ordinate und das Abszissenstück $Q_0 Q_1$ als Integrationsweg.

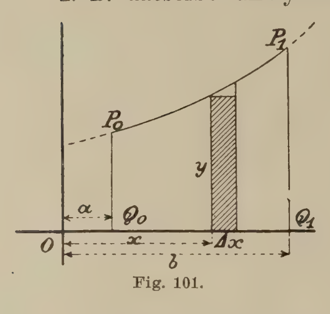


Fig. 101.

Dieser Deutung willen wird das Wort Integration auch oft durch das Wort Quadratur ersetzt. Aber damit wird nur ein sehr einfaches anschauliches Bild bezeichnet, das beinahe ebensogut durch das Bild einer Rektifikation oder Kubatur ersetzt werden könnte.

242. Die Existenz des bestimmten Integrals. Der Analytiker hat nicht auf Anschauung und Anwendung, sondern auf das Wesen der abstrakten Formeln, auf ihre Berechtigung und Strenge sein Hauptaugenmerk zu richten. Für ihn ist durch (3) [241] ein limes ausgedrückt, nämlich:

$$\int_a^b y\,dx = \lim \sum y\,\Delta x = \lim \sum f(x)\,\Delta x, \tag{1}$$

mit der näheren Bestimmung, daß erstens der Integrationsweg in zunächst beliebig viele Teile $\Delta x = (x + \Delta x) - x$ zu zerlegen, daß zweitens zu der Anfangsabszisse x jedes Teiles Δx die Ordinate $y = f(x)$ zu berechnen und diese mit Δx zu multiplizieren ist, daß drittens dann die Summe dieser Produkte zu bilden ist und viertens alle Δx unendlich klein werden sollen.

Der Analytiker hat aber auch zu prüfen, ob und unter welchen Bedingungen der limes, also das Integral überhaupt existiert. Wie ist diese grundlegende kritische Untersuchung zu führen?

Zunächst seien zwei Voraussetzungen, die in [241] stillschweigend gemacht worden sind, ausdrücklich genannt, nämlich:

I) Die Grenzen a und b sind beide endlich, d. h. keine ist unendlich groß.

II) Der Integrand $f(x)$ ist auf dem Integrationswege einschließlich der beiden Grenzen endlich (d. h. nicht unendlich groß) und stetig.

Aus obigen näheren Bestimmungen folgt weiter:

III) Die Δx haben alle gleiche Vorzeichen, nämlich das Vorzeichen von $b - a$.

IV) $$\sum \Delta x = b - a. \tag{2}$$

Nach [11 5] ist daher:

$$\sum f(x) \Delta x = (b - a) \cdot \text{Mittelwert der } f(x).$$

Da nach II) der Integrand stetig ist, so muß der Mittelwert mindestens einmal zwischen den Grenzen wirklich existieren. Nennt man die zugehörige Abszisse x_m, so folgt:

$$\sum f(x) \Delta x = f(x_m) \cdot \sum \Delta x = f(x_m)(b - a). \tag{3}$$

Diese Gleichung bleibt bestehen, wie klein auch die Δx werden. Die Summe, also auch (wenn es existiert) das Integral ist immer zwischen den Grenzen:

$$A(b - a) \quad \text{und} \quad B(b - a)$$

eingeschlossen, wo A und B den größten und kleinsten Wert des Integranden in dem Spielraum (oder an seinen Grenzen) bezeichnen soll. Daß der Integrand stetig ist, kann nach [85 2] durch die Gleichung:

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon_1 \tag{4}$$

ausgedrückt werden, wo ε und ε_1 zugleich unendlich klein werden. Man nehme also zu der Anfangsabszisse x jedes Teiles Δx ein ε an, so folgt:

$$\sum f(x + \varepsilon) \Delta x = \sum (f(x) + \varepsilon_1) \Delta x = \sum f(x) \Delta x + \sum \varepsilon_1 \Delta x.$$

Die zweite Summe ist unendlich klein nach der eben benutzten Mittelwertformel. Daraus folgt, daß das Integral J, falls es überhaupt existiert, statt durch [241 3] auch durch die Gleichung:

$$J = \int f(x + \varepsilon)\, dx \tag{5}$$

definiert werden darf, wo die ε sämtlich unendlich klein, sonst aber beliebig sind.

Erster Hilfssatz. Man nehme an, es sei eine Teilung von $b - a$ vorgelegt und die Δx seien bereits unendlich klein. Teilt man dann jedes Δx noch weiter und bildet so eine zweite Teilung von $b - a$, so ändert sich der Wert der Summe nur noch unendlich wenig.

Beweis. Die Teile von Δx seien nach Ausführung der zweiten Teilung: $\Delta' x, \Delta'' x, \ldots$ Dann entspricht einem einzigen Gliede $f(x) \Delta x$ der ersten Teilung die Summe der Glieder:

$$f(x)\,\Delta' x + f(x')\,\Delta''(x) + \cdots,$$

welche nach dem Mittelwertsatz 3):

$$= f(x_m) \cdot (\Delta' x + \Delta'' x + \cdots) = f(x_m)\,\Delta x$$

ist. Da Δx schon unendlich klein sein sollte, so kann $x_m = x + \varepsilon$ gesetzt werden. Die Gesamtsumme für die zweite Teilung ist daher:

$$= \sum f(x + \varepsilon)\,\Delta x,$$

also, wie oben gezeigt, von der ersten Summe unendlich wenig verschieden.

Zweiter Hilfssatz. Nunmehr nehme man zwei Teilungen des Integrationsweges an, aber beide gänzlich unabhängig voneinander, nur seien beidemale die Teile Δx und $\Delta' x$ schon unendlich klein. Man nenne die beiden zugehörigen Summen:

$$S = \sum f(x)\,\Delta x, \quad S' = \sum f(x')\,\Delta x'.$$

Außerdem bilde man durch Zusammensetzung beider Teilungen, wie Fig. 102 erläutert, eine dritte Teilung des Integrationsweges, nenne die Teile $\Delta x''$ und bilde die dritte Summe:

Fig. 102.

$$S'' = \sum f(x'')\,\Delta x''.$$

Da jedes Δx und auch jedes $\Delta x'$ aus einem oder mehreren $\Delta x''$ besteht, so ist nach dem ersten Hilfssatz S'' sowohl von S als auch von S' unendlich wenig verschieden, d. h. S und S' führen zu demselben limes, obgleich beide Teilungen völlig unabhängig voneinander ausgeführt waren, nur daß beidemale die Teile unendlich klein werden sollten. Mit anderen Worten:

Lehrsatz. Das durch die Formel (1) definierte Integral existiert unter den genannten Voraussetzungen und hat nur einen einzigen, völlig bestimmten Wert.

Sind die Voraussetzungen nicht oder nicht ganz erfüllt, so bedarf es noch einer besonderen Untersuchung, vgl. [253].

243. Aus der vorangegangenen Definition des bestimmten Integrals fließen für die Grenzen folgende einfache Sätze:

$$\int_a^a = 0, \tag{1}$$

das Zusammenfallen der Grenzen. Das Integral verschwindet.

$$\int_b^a = -\int_a^b, \tag{2}$$

Vertauschung der Grenzen. Das Integral wechselt sein Vorzeichen,

weil die Werte des Integranden, wenn auch in umgekehrter Reihenfolge wiederkehren, aber die Differentiale der ursprünglichen Veränderlichen ihre Vorzeichen wechseln.

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b, \tag{3}$$

die Zerlegung des Integrationsweges. Sie hat eine entsprechende Zerlegung des Integrals zur Folge. Übrigens bleibt (3) auch richtig, wenn c nicht zwischen a und b liegt. Denn liegt etwa c jenseits b, so ist zunächst:

$$\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c, \tag{3a}$$

und diese Gleichung geht in (3) über, wenn man auf das letzte Glied (2) anwendet.

Der erste Mittelwertsatz:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,y_m = (b-a)\,f(x_m). \tag{4}$$

Der Wert des Integrals ist gleich dem Produkt aus dem Integrationsweg und einem Mittelwert des Integranden. Man nennt (4) den

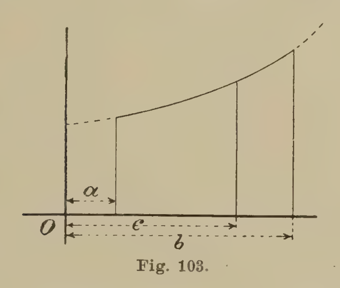


Fig. 103.

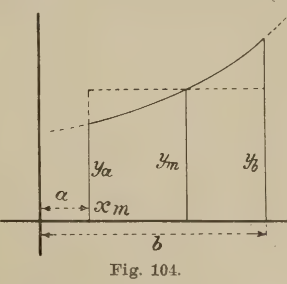


Fig. 104.

ersten Mittelwertsatz über Integrale. Ist die Funktion $f(x)$ konstant, etwa $= 1$, so kann y_m auch keinen anderen Wert haben und man erhält:

$$\int_a^b dx = (b-a). \tag{5}$$

Ist $f(x)$ ganz und vom ersten Grade, so wird x_m das arithmetische Mittel von a und b, und y_m das arithmetische Mittel von y_a und y_b. Im allgemeinen kann man aber nur sagen, daß x_m ein Mittelwert ist aller x und $y_m = f(x_m)$ ein Mittelwert aller y.

Es kann (4) als erste Annäherungsformel zur numerischen Berechnung von bestimmten Integralen gelten, da durch sie sein Wert

in zwei Grenzen eingeschlossen wird. Durch Verknüpfung von (4) mit (3) kann die Annäherung beliebig gesteigert werden, doch gibt es meist bessere Annäherungen (§ 33). Wird das Integral, wie vereinbart, als Fläche gedeutet, so lehrt (4) seine Vergleichung mit einem Rechteck, das auf derselben Grundlinie steht.

Der zweite Mittelwertsatz. Ist der Integrand ein Produkt, dessen einer Faktor $\varphi(x)$ nur positive oder nur negative Werte hat innerhalb des Integrationsweges, so folgt:

$$\int_a^b (f(x)\,\varphi(x))\,dx = f(x_m)\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

Denn man setze etwa $\varphi(x)\,dx = dz$. Da weder die dx noch $\varphi(x)$ (nach der eben gemachten Voraussetzung) ihr Vorzeichen wechseln, so auch dz nicht, daher ist zunächst:

$$\sum f(x)\,\varphi(x)\,\Delta x = \sum f(x)\,\Delta z = f(x_m)\sum \Delta z,$$

und hieraus entsteht sofort (6) durch Grenzübergang.

Der zweite Mittelwertsatz geht in den ersten als einen Sonderfall über, wenn man $\varphi(x) = 1$ setzt. Denn dann wird zunächst:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_m)\int_a^b dx, \tag{7}$$

und hieraus wird nach Anwendung von (5) die Formel (4).

244. Die ursprüngliche Definitionsformel:

$$\int y\,dx = \lim \sum y\,\Delta x \tag{1}$$

kann bereits so, wie sie ist, zur angenäherten Berechnung eines bestimmten Integrales benutzt werden. Denn wenn es auch nicht möglich ist, den Integrationsweg in unendlich viele unendlich kleine Teile, so kann man ihn doch in sehr viele sehr kleine Teile Δx zerlegen. Man setzt dann, um das vereinbarte Bild (Fig. 101) zu gebrauchen, statt der Fläche eine Summe von Rechtecken und muß sich dann überzeugen, daß das, was als Unterschied übrig bleibt, also die Kette von Dreiecken, mit den Δx und Δy als zwei Seiten und dem zugehörigen Kurvenstücke als dritter Seite, innerhalb der erlaubten Fehlergrenze bleibt.

Doch dies ist nur der erste und roheste Gebrauch von (1), den man selbstverständlich im gegebenen Falle so abändern würde, daß statt der Rechtecke Trapeze genommen werden und statt der Dreiecke nur Segmente übrig bleiben. Auch gibt es, wie soeben erwähnt, viel bessere Arten der Annäherung. Wie aber, wenn es möglich wäre eine solche Einteilungsart des Integrationsweges zu finden, daß

die rechtsstehende Summe durch eine „bekannte“ Hilfsformel sich in einen geschlossenen Ausdruck verwandeln läßt? Dann könnte man ja auf diesem Ausdruck die in (1) geforderte Limesrechnung begründen und so den wirklichen, den genauen Wert des Integrals bestimmen!

Am nächsten liegt natürlich, den Integrationsweg in gleiche Teile zu teilen und ihre Anzahl n vorläufig unbestimmt zu lassen. Es werden dann die $\varDelta x$ sämtlich einander gleich: $\varDelta x = (b-a):n$, also:

$$\sum y \varDelta x = \varDelta x \sum y = (b-a) \cdot \frac{\sum y}{n},$$

mithin nach (1):

$$\int_a^b y\,dx = (b-a) \cdot \lim_{n=\infty} \frac{\sum y}{n}. \tag{2}$$

Und nun muß die „Hilfsformel“ einsetzen, das übrige wird dann eine gewöhnliche Limesrechnung.

Erstes Beispiel (Fig. 105). Quadratur der Parabel (vom Scheitel S aus). Die Gleichung der Parabel lautet:

$$y = \frac{x^2}{2p} = \frac{x^2 b}{a^2}.$$

(Da hier nicht p selbst, sondern die Koordinaten a und b des Endpunktes gegeben sind, so folgt zunächst $b = a^2 : 2p$, also $1 : 2p = b : a^2$.) Daher nach (2):

$$\text{Fläche } SQP = \int_0^a y\,dx = a \lim_{n=\infty} \frac{\sum \frac{x^2}{a^2} b}{n}$$

$$= ab \lim_{n=\infty} \frac{\sum \left(\frac{x}{a}\right)^2}{n}.$$

Fig. 105.

Die in Betracht kommenden Abszissen sind:

$$x = 0, \quad \frac{a}{n}, \quad \frac{2a}{n}, \quad \frac{3a}{n}, \quad \frac{4a}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{(n-1)a}{n},$$

folglich:

$$\text{Fläche } SQP = ab \cdot \lim_{(n=\infty)} \frac{0^2 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}}{n}$$

$$= ab \cdot \lim_{(n=\infty)} \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3}.$$

Die „Hilfsformel“ steht in [27 2]. Setzt man sie ein, so folgt:

$$\text{Fläche } SQP = ab \cdot \lim_{(n=\infty)} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{ab}{6} \lim_{(n=\infty)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{2ab}{6} = \frac{ab}{3},$$

oder überaus einfach:

$$\textbf{Fläche } SQP = \tfrac{2}{3} \textbf{ Dreieck } SPQ.$$

Zur Probe sei dieselbe Quadratur mit Hilfe der Quadratur des Parabelsegmentes von Archimedes [91] und des Satzes ausgeführt, daß die Tangente in P durch die Mitte R von SQ hindurchgeht:

$$\text{Fläche } SQP = \triangle SQP - \text{Segment } SP = \triangle SQP - \tfrac{2}{3}\triangle SRP$$
$$= \triangle SQP - \tfrac{1}{3}\triangle SQP = \tfrac{2}{3}\triangle SQP.$$

Zweites Beispiel (Fig. 106). Quadratur der Sinuslinie. Es ist:

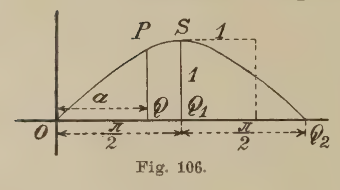


Fig. 106.

$$y = \sin x.$$

Die gebrauchten Abszissen sind der Reihe nach:

$$0, \quad \frac{a}{n}, \quad \frac{2a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n},$$

daher nach (2):

$$\text{Fläche } OQP = \int_0^a \sin x\, dx = a \lim_{(n=\infty)} \frac{\sin 0 + \sin \frac{a}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)a}{n}}{n}.$$

Man setze der Kürze wegen: $a = n \cdot \varepsilon$; $\varepsilon = a : n$ und bezeichne den Zähler mit:

$$s = \sin \varepsilon + \sin 2\varepsilon + \sin 3\varepsilon + \cdots + \sin (n-1)\varepsilon.$$

Jetzt muß die „Hilfsformel" kommen, sonst bleibt man hier elend stecken. Man multipliziere, um sie abzuleiten, beide Seiten mit $2 \sin \frac{\varepsilon}{2}$:

$$2s \sin \frac{\varepsilon}{2} = 2 \sin \varepsilon \sin \frac{\varepsilon}{2} + 2 \sin 2\varepsilon \sin \frac{\varepsilon}{2} + \cdots + 2 \sin (n-1)\varepsilon \sin \frac{\varepsilon}{2}$$

und wende rechts auf jedes Glied die Formel an:

$$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

also:

$$2s \sin \frac{\varepsilon}{2} = \left(\cos \frac{\varepsilon}{2} - \cos \frac{3}{2}\varepsilon\right) + \left(\cos \frac{3}{2}\varepsilon - \cos \frac{5}{2}\varepsilon\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\cos \frac{2n-3}{2}\varepsilon - \cos \frac{2n-1}{2}\varepsilon\right).$$

Es hebt sich das zweite Glied jeder Klammer gegen das erste Glied der folgenden Klammer, also:

$$2s \sin \frac{\varepsilon}{2} = \cos \frac{\varepsilon}{2} - \cos \frac{2n-1}{2}\varepsilon.$$

Es ist erreicht! Der geschlossene Ausdruck für s wird:

$$s = \frac{\cos\frac{\varepsilon}{2} - \cos\frac{2n-1}{2}\varepsilon}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

folglich, wenn noch $n = a : \varepsilon$ gesetzt wird:

$$\text{Fläche } OQP = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{\varepsilon\left(\cos\frac{\varepsilon}{2} - \cos\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}{2\cdot\sin\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$= \left(\lim_{\varepsilon=0}\cos\frac{\varepsilon}{2} - \cos\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\cdot\lim_{(\varepsilon=0)}\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Der erste Faktor ist $= 1 - \cos a$, der zweite ist $= 1$ nach [88 3]. Also:

$$\textbf{Fläche } OQP = 1 - \cos a.$$

Im besonderen: Fläche $OQ_1S = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1^2$, d. h.:

$$\text{a) Fläche } OQ_1S = (Q_1S)^2.$$

Ebenso: Fläche $OPSQ_2 = 1 - \cos\pi = 1 - (-1) = 2\cdot 1^2$, d. h.:

$$\text{b) Fläche } OPSQ_2 = 2\,(Q_1S)^2.$$

a) und b) stimmen zusammen, weil Q_1S Symmetrieachse der Sinuslinie ist. Es mußte b) doppelt so groß werden wie a).

245. Änderung der oberen Grenze. Diese an zwei Beispielen erläuterte und großer Erweiterung fähige Methode schließt sich der ursprünglichen Definition:

$$\int = \lim \sum$$

auf das genaueste an. Es wird die Summe gebildet, darauf der limes genommen und das Integral ist fertig!

Das Bilden der Summe aber heißt doch hier im wesentlichen, die Summe durch eine Hilfsformel in einen geschlossenen Ausdruck verwandeln, wie es in jedem der beiden Beispiele geschehen ist. Und hier liegt die Schwäche der Methode. Denn wenn es eine solche Hilfsformel nicht gibt oder was ja praktisch auf dasselbe hinauskommt, wenn man sie nicht kennt, so geht es eben auf diese Weise nicht.

Da hat denn, wie so oft in der Mathematik, eine Überlegung Hilfe gebracht, welche nicht immer nahe liegt, nämlich die Überlegung, was wohl geschieht, wenn man etwas als veränderlich betrachtet, das man so lange als gegeben hingenommen hatte. Bei dem bestimmten Integral gelten außer dem gegebenen Integranden noch als gegeben:

Erstens: die obere Grenze b; zweitens: die untere Grenze a.

Wie wäre es, wenn man zunächst eine der beiden Grenzen, etwa die obere verändert? Dann würde ja wohl das Integral eine Funktion der oberen Grenze b werden, also eine Funktion von b, die vorläufig mit:

$$F(b) \tag{1}$$

bezeichnet werden mag, so daß:

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

zu setzen wäre. Es soll b veränderlich sein. Man ändere zunächst b nur um unendlich wenig, um db, so wird nach (2):

$$F(b + db) = \int_a^{b+db} f(x)\,dx,$$

also, wenn man subtrahiert:

$$F(b + db) - F(b) = \int_a^{b+db} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx,$$

oder nach [243 3]:

$$F(b + db) - F(b) = \int_b^{b+db} f(x)\,dx,$$

oder auch nach dem Mittelwertsatz [243 4]:

$$F(b + db) - F(b) = ((b + db) - b)\,f(x_m)$$
$$= db \cdot f(x_m).$$

x_m liegt hier zwischen b und $b + db$, kann also $= b + \varepsilon$ gesetzt werden, wo ε mit db unendlich klein wird. Daher:

$$\frac{F(b + db) - F(b)}{db} = f(b + \varepsilon),$$

oder da $f(x)$ eine stetige Funktion sein soll, nach [85 2]:

$$\frac{F(b + db) - F(b)}{db} = f(b) + \varepsilon_1,$$

also endlich nach [116 4], auf die Funktion $F(b)$ angewendet:

$$\boldsymbol{F'(b) = f(b)},$$

d. h.: Wenn man das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze b betrachtet und nach b differenziert, so entsteht der dieser Grenze entsprechende Wert des Integranden. Oder kürzer ausgedrückt: Die Ableitung des bestimmten Integrals nach seiner oberen Grenze ist der zugehörige Wert des Integranden.

Entsprechend ergibt sich, wenn man die untere Grenze als veränderlich ansieht: Die Ableitung des bestimmten Integrals

nach seiner unteren Grenze ist entgegengesetzt gleich dem zugehörigen Wert des Integranden.

So ist mit einem Male aus dem Integrieren eine Aufgabe geworden, die offenbar mit der gänzlichen Umkehrung des Differenzierens zusammenfällt. Denn beim Differenzieren wird zu einer gegebenen Funktion eine zweite Funktion gesucht, welche die Ableitung der ersten ist. Beim Integrieren aber wird, wie eben gezeigt, zu einer gegebenen Funktion eine zweite gesucht, deren Ableitung die erstere ist.

Dieser Gesichtspunkt wandelt das Problem der Integralrechnung vollständig um! Um seinetwillen hat man den Begriff der Integralfunktion aufgestellt, wie folgt:

246. Die Integralfunktion. Eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung mit einer gegebenen Funktion $f(x)$ übereinstimmt, heißt deren Integralfunktion. Es soll sein:

$$F'(x) = f(x), \quad \text{oder:} \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad \text{oder:} \quad dF(x) = f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Nach III [122] ist die Integralfunktion überhaupt nicht vollständig, sondern nur bis auf eine additive Konstante bestimmbar, so daß mit $F(x)$ zugleich:

$$F_1(x) = F(x) + C \qquad (2)$$

eine Integralfunktion vorstellt. Aber auch umgekehrt: Sind $F(x)$ und $F_1(x)$ zwei Integralfunktionen derselben Funktion $f(x)$, so unterscheiden sie sich nur durch eine additive Konstante. Denn aus:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{und} \quad F_1'(x) = f(x)$$

folgt durch Subtrahieren:

$$F_1'(x) - F'(x) = 0, \quad \text{oder} \quad (F_1(x) - F(x))' = 0.$$

Die Differenz der beiden Funktionen ist also konstant VII in [134]. Es ist:

$$F_1(x) - F(x) = C, \quad F_1(x) = F(x) + C.$$

Integrationskonstante. Die willkürliche additive Konstante, welche einer vollständigen Integralfunktion hiernach stets anhaftet, heißt „Integrationskonstante“. Ihre Bestimmung muß gegebenenfalls durch Sonderbedingungen erfolgen. Im übrigen ist in [242] erwiesen, daß die Integralfunktion immer existiert, wenn $f(x)$ (in dem betr. Spielraum) eindeutig und stetig ist.

Eine gegebene Funktion $f(x)$ integrieren, heißt hiernach, ihre Integralfunktion ermitteln. Wie in [241], nennt man auch jetzt die gegebene Funktion $f(x)$ den Integranden. Der Integrand soll also die Ableitung der Integralfunktion sein, das ist der Sinn der für letztere gegebenen Erklärung.

247. Die in [246] erklärte und mit der willkürlichen Integrationskonstante versehene Integralfunktion eines gegebenen Integranden nennt man auch dessen allgemeines oder unbestimmtes oder grenzenloses Integral. Es wird wie ein bestimmtes Integral mit dem Integralzeichen geschrieben, nur werden die Grenzen als „unbestimmt" fortgelassen. Man schreibt „ohne Grenzen".

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{1}$$

Aus [246] folgt:

$$\frac{d\left(\int f(x)\,dx\right)}{dx} = f(x), \tag{2}$$

oder:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx,$$

womit das Integrieren als Umkehrung des Differenzierens auch durch mathematische Symbole kurz und treffend erklärt wird. Es soll durch Differenzieren des Integrals der Integrand wieder herauskommen.

Der nächstliegende Gebrauch, den man von (2) machen kann, ist die Probe auf die Richtigkeit einer Integralformel durch Differenzieren derselben. Man braucht dazu gar nicht zu wissen, wie sie gefunden worden war, sondern nimmt sie, wie sie vorgelegt wird und differenziert nach den Regeln der Differentialrechnung. Ergibt sich, wenn auch vielleicht erst nach längeren Umformungen, Übereinstimmung mit dem Integranden, so ist die Formel richtig, sonst nicht.

Beispiele. Es sollen die Formeln:

$$\text{I.} \quad \int x^{1000} \ln x\,dx = \frac{x^{1001}}{1001} \ln x - \frac{x^{1001}}{1001^2} + C,$$

$$\text{II.} \quad \int \operatorname{arc}(\sin = x)\,dx = x \operatorname{arc}(\sin = x) + \sqrt{1 - x^2} + C,$$

$$\text{III.} \quad \int x^5 \sin x\,dx = -\cos x\,(x^5 - 20x^3 + 120x) \\ \sin x\,(5x^4 - 60x^2 + 120) + C$$

durch Differenzieren geprüft werden.

Probe zu I.

$$\frac{d\left(\frac{x^{1001}}{1001} \ln x - \frac{x^{1001}}{1001^2} + C\right)}{dx} = \frac{x^{1001}}{1001} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{1001\,x^{1000}}{1001} - \frac{1001\,x^{1000}}{(1001)^2}$$
$$= x^{1000} \ln x.$$

Der Integrand hat sich ergeben, also ist I richtig.

Probe zu II.

$$\frac{d\left(x \operatorname{arc}(\sin = x) + \sqrt{1-x^2} + C\right)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arc}(\sin = x) \cdot 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot -2x$$
$$= \operatorname{arc}(\sin = x),$$

also ist II richtig.

Probe zu III.

$$\frac{d(F(x)+C)}{dx} = -\cos x\,(5x^4 - 60x^2 + 120) + (x^5 - 20x^3 + 120x)\sin x$$
$$+ \sin x\,(20x^3 - 120x) + (5x^4 - 60x^2 + 120)\cos x$$
$$= x^5 \sin x,$$

also ist III richtig.

Man könnte auch wohl umgekehrt eine Differentialformel durch Integrieren auf ihre Richtigkeit prüfen. Überhaupt ist an sich die Auffassung des Integrierens als Umkehrung des Differenzierens nicht berechtigter als die Auffassung des Differenzierens als Umkehrung des Integrierens. Denn die Verhältnisse liegen durchaus nicht so wie z. B. bei Addieren und Subtrahieren, wo selbstverständlich erst das Addieren und dann das Subtrahieren als Umkehrung des Addierens kommt. Ja, genau betrachtet, ist das Integrieren die ursprünglichere Rechnungsart, wie ja auch die Geschichte lehrt. Denn integriert hat bereits Archimedes, zu differenzieren dagegen hat man erst zu den Zeiten Leibniz und Newtons begonnen. Auch ist ja das Integral der limes einer Summe und das Differential eine unendlich kleine Differenz.

Also wäre es keineswegs eine Entscheidung zu Ungunsten des Differenzierens, wenn man Differenzieren und Integrieren neben- statt hintereinander stellte und sich durch die Wendung, „sie sind Umkehrungen voneinander", die Freiheit wahrte, ob man das Integrieren als Umkehrung des Differenzierens oder das Differenzieren als Umkehrung des Integrierens ansehen wolle. Und doch hat man alle Veranlassung, lieber das erstere als das letztere zu tun, weil sich das Differenzieren als einfacher, als leichter herausgestellt hat als das Integrieren (aus in [252] angedeuteten Gründen).

248. Das Einsetzen der Grenzen. Gesetzt die Formel:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{1}$$

sei hergestellt, d. h. die Integralfunktion $F(x)$ sei durch (unbestimmtes) Integrieren gefunden. Nach [245] muß dann sein:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) + C, \tag{2}$$

wenn man b vorläufig als veränderlich und das Integral als Funktion der oberen Grenze ansieht. Zur Bestimmung von C nehme man den-

jenigen Wert von b, für den der Wert des bestimmten Integrals immer bekannt, nämlich $= 0$ ist, d. h. man setze im besonderen $b = a$. Es wird:

$$\int_a^a = 0 = F(a) + C, \quad \text{also} \quad C = -F(a),$$

daher nach Einsetzen in die vorige Formel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

oder auch, wenn man zu Minuendus und Subtrahendus dieselbe Zahl addiert und diese wieder C nennt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (F(b) + C) - (F(a) + C). \tag{4}$$

Um ein unbestimmtes Integral in irgend ein bestimmtes zu verwandeln, setze man in die Integralfunktion statt x erst die obere Grenze b, dann die untere Grenze a ein und subtrahiere die Ergebnisse.

Die Integrationskonstante hebt sich dabei fort, also daß für das bestimmte Integral ein bestimmter Wert herauskommt, wie es ja auch sein muß. Man schreibt (4) auch zur Andeutung, daß die Grenzen eingesetzt werden sollen, so:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_{x=a}^{x=b} (F(x) + C) \tag{5}$$

und nennt dann den geraden senkrechten Strich den Integrationsstrich.

Hiernach geschieht also die Auswertung eines bestimmten Integrals wie folgt: Man läßt erst die Grenzen weg und integriert unbestimmt, d. h. man ermittelt (nach demnächst zu erläuternden Methoden) die Integralfunktion. Dann setzt man in diese die Grenzen ein, subtrahiert und der Wert des Integrals ist da!

Erstes Beispiel. Der Wert des bestimmten Integrals $\int_1^5 x^3\,dx$ ist zu finden. Man integriere erst unbestimmt. Es wird:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

(Man mache die Probe durch Differenzieren.) Dann setze man die Grenzen ein.

$$\int_1^5 x^3\,dx = \Big|_1^5 \frac{x^4}{4} + C = \frac{5^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{624}{4} = +156.$$

Zweites Beispiel. Quadratur der Parabel; vgl. [244].

$$\text{Fläche } SQP = \int_0^a \frac{x^2}{2p}\,dx.$$

Das unbestimmte Integral ist:

$$\int \frac{x^2}{2p}\,dx = \frac{x^3}{6p} + C, \text{ also:}$$

$$\text{Fläche } SQP = \Big|_0^a \frac{x^3}{6p} + C = \frac{a^3}{6p} - \frac{0^3}{6p} = \frac{a^3}{6p}$$

oder nach Einsetzen des Wertes von p:

$$\text{Fläche } SQP = \frac{ab}{3}.$$

Drittes Beispiel. Quadratur der Sinuslinie, vgl. [244].

$$\text{Fläche } OQP = \int_0^a \sin x\,dx.$$

Das unbestimmte Integral ist:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \text{ also:}$$

$$\text{Fläche } OQP = \Big|_0^a -\cos x + C = -\cos a - (-\cos 0) = 1 - \cos a.$$

Wie unvergleichlich einfacher sind doch die jetzigen Lösungen des zweiten und dritten Beispiels gegen die früheren in [244]!

249. Hiernach ist, da das Einsetzen der Grenzen und das Subtrahieren der Ergebnisse doch schlechterdings nicht zur höheren Mathematik gerechnet werden kann, soviel klar geworden:

Die wesentlichste und nächstliegende Aufgabe der Integralrechnung sind nicht die bestimmten, sondern die unbestimmten Integrale. Zu möglichst vielen Integranden die zugehörigen Integralfunktionen aufzufinden, darauf kommt es zuerst an.

Übungen zu § 30.

1. Das bestimmte Integral

$$\int_1^a \frac{dx}{x}$$

soll als limes einer Summe berechnet werden, indem man zwischen

1 und a Werte von x in geometrischer Reihe einschaltet, ihre Anzahl unbegrenzt wachsen läßt und zuletzt die Formel [111 7] anwendet:

$$\lim_{(n=\infty)} n \cdot \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a .$$

2. Das bestimmte Integral

$$\int_1^a \frac{dx}{x^2}$$

soll als limes einer Summe berechnet werden, indem man zwischen 1 und a Werte von x in arithmetischer Reihe einschaltet, aber alsdann statt $x^2 = xx$ immer das Produkt zweier Nachbarwerte von x setzt.

3. Das bestimmte Integral

$$\int_a^b x^p \, dx$$

soll als limes einer Summe berechnet werden, mit Anwendung der Formel für $\sum_{z=0}^{z=n} z^p$.

4. Das bestimmte Integral

$$\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

soll als limes einer Summe berechnet werden durch Einschaltung von Werten von x in arithmetischer Reihe, aber indem man alsdann statt $\sqrt{x}$ immer das arithmetische Mittel der Quadratwurzeln aus zwei Nachbarwerten von x setzt.

§ 31. Zwei Tafeln zur Integralrechnung.

250. Tafel I

zur Integralrechnung, enthaltend die wichtigsten allgemeinen Formeln:

Nr.	Formel
1	$K = \int dK = \lim \sum \Delta K.$
2	$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,y_m = (b-a)\,f(x_m)\cdot$
3	$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(x_m)\cdot\int_a^b \varphi(x)\,dx,$ wenn $\varphi(x)$ zwischen a und b nicht sein Vorzeichen wechselt.

Nr.	Formel
4	$\int_b^a = -\int_a^b; \int_a^a = 0.$
5	$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b; \int_a^b = \int_a^c - \int_b^c.$
6	$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$ $\frac{d(F(x)+C)}{dx} = f(x).$
7	$\frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x); \quad d(\int f(x)\,dx) = f(x)\,dx.$
8	$\int_a^b f(x)\,dx = (F(b)+c) - (F(a)+C)$ $= \Big\vert_{x=a}^{x=b} (F(x)+C).$
9	$\int (f(x) \pm \varphi(x) \pm \cdots)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx \pm \cdots$
10	$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx.$
10a	$\int \frac{f(x)}{a}\,dx = \frac{1}{a} \int f(x)\,dx.$
11	$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$ (Satz von der teilweisen Integration.)
12	$\int f(x)\,dx = \int_{x=\varphi(z)} f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz.$ (Einführung einer neuen Veränderlichen.)

251. Tafel II
zur Integralrechnung, enthaltend die Integralfunktionen der wichtigsten Integranden:

Nr.	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$
1	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$
2	$\int e^x\,dx = e^x + C.$
2a	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

Nr.	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$
3	$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
4	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
5	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
5a	$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x - x + C.$
6	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C.$
6a	$\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x - x + C.$
7	$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C.$
8	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$
9	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \frac{\log_a x}{M} + C, \quad (x > 0).$
9a	$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C = \frac{\log_a(-x)}{M} + C, \quad (x < 0).$
10 und 10a	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}(\sin = x) + C = -\operatorname{arc}(\cos = x) + C'.$
11 und 11a	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) + C = -\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) + C'.$
12	$\int \mathfrak{Kof}\, x\,dx = \mathfrak{Sin}\, x + C.$
13	$\int \mathfrak{Sin}\, x\,dx = \mathfrak{Kof}\, x + C.$
14	$\int \frac{dx}{\mathfrak{Kof}^2 x} = \mathfrak{Tg}\, x + C.$
15	$\int \mathfrak{Tg}^2 x\,dx = -\mathfrak{Tg}\, x + x + C.$
16	$\int \frac{dx}{\mathfrak{Sin}^2 x} = -\mathfrak{Kotg}\, x + C.$
17	$\int \mathfrak{Kotg}^2 x\,dx = -\mathfrak{Kotg}\, x + x + C.$
18	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$

Nr.	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$
19 und 19a	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = +\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Cos} = x) + C = +\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C\ (x > 1).$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Cos} = (-x)) + C = -\ln((-x)+\sqrt{x^2-1}) + C, (x < 1).$
20 und 20a	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Tg} = x) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C \quad (\lvert x\rvert < 1).$ $= -\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Cotg} = x) + C = -\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C \quad (\lvert x\rvert > 1).$

252. Bemerkungen zu Tafel I.

Die Formeln (1) bis (8) sind § 30 entnommen. Die übrigen Formeln entstehen durch Umkehrung einiger Formeln aus Tafel I der Differentialrechnung und nehmen keine Rücksicht auf die Integrationskonstante, weil sie in den Integralen implizite enthalten ist.

Formel (9) lehrt, daß eine Summe integriert wird, indem man jeden Summanden integriert und die Integrale addiert. Wird an Stelle der Summe eine unendliche Reihe gesetzt, so ist ganz entsprechend zur Differentialrechnung von Fall zu Fall zu entscheiden, ob die Reihe der Integrale mit dem Integral der Reihe übereinstimmt. Bei Potenzreihen ist es so, vgl. [116]. Es ist:

$$\int (a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)\,dx = C + ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + \ldots,$$

in andern Fällen kann es aber anders sein.

Formel (10) und (10a) zeigen, daß ein konstanter Faktor bzw. Divisor des Integranden vor das Integralzeichen gesetzt werden darf.

Formel (11), der sogenannte Satz von der teilweisen Integration, entsteht durch Umkehrung der Formel für das Differenzieren eines Produktes. Es ist:

$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$

also wenn man integriert:

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv$$

und hieraus entsteht durch Umstellung der Glieder Formel (11). Bei ihrer Anwendung hat man sich das Integral links als das zu lösende Integral zu denken und muß u und v, wenn irgendmöglich, so zu bestimmen suchen, daß das Integral rechts einfacher wird. Wie man dabei zu verfahren hat, möge vorläufig folgendes Beispiel erläutern:

Es sei zu lösen das Integral:

$$\int x e^x\,dx.$$

Erster Versuch: Man setze:

$$u = xe^x, \quad dv = dx,$$

also einerseits durch Differentiation, andererseits durch Integration:

$$du = xe^x dx + e^x dx, \quad v = x.$$

Daher nach der Formel für die teilweise Integration:

$$\int xe^x dx = x^2 e^x - \int x(xe^x + e^x) dx = x^2 e^x - \int x^2 e^x dx - \int xe^x dx.$$

Das letzte Glied rechts ist auf die linke Seite zu bringen. Man erhält nach Division durch 2

$$\int xe^x dx = \frac{x^2 e^x}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx.$$

Was ist erreicht? Offenbar gerade das Gegenteil von dem, was man wollte, denn das neue Integral ist schwieriger als das alte. Der erste Versuch ist nicht geglückt.

Zweiter Versuch: Man setze:

$$u = e^x, \quad dv = x\,dx,$$

also:

$$du = e^x dx, \quad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$ [1]

Daher:

$$\int e^x x\,dx = \frac{e^x x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx.$$

Dieselbe unbrauchbare Formel wie vorhin! Nur auf etwas kürzerem Wege. Also:

Dritter Versuch:

$$u = x, \quad dv = e^x dx,$$

$$du = dx, \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

Daher:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx,$$

oder:

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Erst der dritte Versuch hat zur Lösung geführt! Wer einige Übung im Integrieren hat, überschlägt sehr schnell, daß die beiden ersten Versuche fehlschlagen müssen und steuert sofort auf den dritten los. Doch soll keineswegs behauptet werden, daß die teilweise Integration immer glücken müsse. Oft wäre der größte Scharfsinn umsonst verschwendet, weil das neue Integral niemals einfacher werden würde, als das alte.

1) Die Integrationskonstante schon hier hinzuzusetzen wäre überflüssig. Sie erscheint am besten erst am Ende der Rechnung.

Nun, dann hilft eben die teilweise Integration nicht. Daß sie aber in vielen Fällen hilft, wird sich bald zeigen.

Formel (12) zeigt, wie man eine ursprüngliche Veränderliche x durch eine andere z ersetzen kann. Der Integrand wird davon in zwei verschiedenen Weisen betroffen, denn erstens wird $f(x)$ in eine Funktion von einer Funktion $f(\varphi(z))$ verwandelt und zweitens tritt der Faktor $\varphi'(z)$ hinzu.

Man kann (12) ansehen als eine Umkehrung der Differentialformel (10) Tafel I § 15:

$$df(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx.$$

Man schreibe links $\varphi(x) = z$, also

$$df(\varphi(x)) = df(z) = f'(z)\,dz,$$

oder

$$f'(z)\,dz = f'(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \qquad (z = \varphi(x))$$

oder auch, wenn links und rechts statt der Funktion f' jetzt wieder f geschrieben und die Buchstaben x und z vertauscht werden:

$$f(x)\,dx = f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)\,dz. \qquad (x = \varphi(z))$$

daher auch:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)\,dz \qquad (x = \varphi(z))$$

womit (12) hergeleitet ist. Bei der Anwendung wird man versuchen, die Funktion φ so zu wählen, daß sich der Integrand vereinfacht. Nachher steht nichts im Wege, die neue Veränderliche z, nachdem sie ihre „Arbeit“ getan, wieder zu entfernen, indem man sie umgekehrt durch x ausdrückt und diesen Ausdruck einsetzt.

Beispiel: Es sei zu lösen das Integral:

$$\int \frac{dx}{3 + 4x}.$$

Ein Blick auf die zweite Tafel zeigt eine große Verwandtschaft mit dem Integral:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Man setze also:

$$3 + 4x = z, \quad x = \frac{z - 3}{4}, \quad dx = \frac{dz}{4},$$

daher:

$$\int \frac{dx}{3 + 4x} = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{4} \ln z + C,$$

oder nach Wiedereinsetzung von x:

$$\int \frac{dx}{3 + 4x} = \frac{1}{4} \ln (3 + 4x) + C.$$

Da x erst durch z und nach vollendeter Integration z wieder durch x ersetzt werden soll, so verkürzt man in einfacheren Fällen, wie dieser war, die Rechnung sehr erheblich, wenn man sich z nur denkt, aber nicht hinschreibt, genau entsprechend zu der Bemerkung in [123]. Also.

$$\text{I. } \int \frac{dx}{3+4x} = \frac{1}{4}\int \frac{d(3+4x)}{(3+4x)} = \frac{1}{4}\ln(3+4x) + C, \; (z = 3+4x)$$

$$\text{II. } \int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x \, d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C, \; (z = \sin x)$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x \, dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C, (z=\cos x).$$

II. und III. haben im Gegensatz zu I. vor der Einführung der neuen Veränderlichen noch kleine, aber für den Anfang vielleicht nicht ganz nahe liegende Umformungen nötig gehabt. In II. mußte $\cos x \, dx$ in $d(\sin x)$ zusammengezogen werden und in III. mußte sogar dreierlei gemacht werden, nämlich erstens Zähler und Nenner mit $\sin x$ multipliziert, zweitens $\sin^2 x$ durch $1 - \cos^2 x$ ersetzt und drittens $\sin x dx$ in $-d(\cos x)$ zusammengezogen werden.

Solche Umformungen bringen die Integralrechnung bei manchen, welche sie nur halb kennen, in den Verruf, daß sie mit allerhand Kniffen und Kunstgriffen arbeite und in der Tat scheint es so, wenn man z. B. die erste Umformung in III. betrachtet, da gar kein zureichender Grund ersichtlich scheint, Zähler und Nenner mit $\sin x$ zu multiplizieren. Doch bei genauerer Kenntnis des inneren Getriebes der Differential- und Integralrechnung verliert sich sehr bald dieser Schein.

Er steht im Zusammenhange mit der in [247] enthaltenen Bemerkung, daß Integrieren „schwerer" ist als Differenzieren. Jetzt kann auch der Grund hierfür bestimmt angegeben werden. Es fehlen nämlich in Tafel I der Integralrechnung Formeln über das Integrieren eines Produkts, eines Quotienten, einer Funktion von einer Funktion, einer implizite gegebenen Funktion usw., während die Differentialrechnung solche Formeln in aller Vollständigkeit besitzt. Wenn man also z. B. $f(x)$ und $\varphi(x)$ integrieren kann, so kann man deshalb noch lange nicht $f(x) \cdot \varphi(x)$ oder $f(x) : \varphi(x)$ oder $f(\varphi(x))$ integrieren, wenigstens nicht allgemein, weil eben die zugehörigen allgemeinen Formeln überhaupt nicht vorhanden sind, weder in Tafel I noch irgendwo in der Mathematik. So ist die Integralrechnung zur Auffindung einer Integralfunktion zuweilen auf allerhand „Umwege" angewiesen, welche die Differentialrechnung zur Auffindung einer abgeleiteten Funktion nicht zu machen braucht. Es kann nichts schaden, wenn der Anfänger hierauf nachdrücklich aufmerksam gemacht wird.

253. Bemerkungen zu Tafel II.

Tafel II ist Umkehrung von Tafel II der Differentialrechnung bis auf kleine Änderungen, welche sich als zweckmäßig herausstellen. So lautet die direkte Umkehrung von (1) in Tafel II, § 15

$$\int n x^{n-1}\, dx = x^n + C,$$

oder nach Division durch n, wenn $C:n$ wieder durch C ersetzt wird:

$$\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} + C.$$

Da der Integrand als gegebene Funktion gilt, so wird man gut tun, $n-1$ durch n, also n durch $n+1$ zu ersetzen. Tut man dies, so folgt Formel (1). Sie gilt, wie die entsprechende Formel der Differentialrechnung, auch für negative und gebrochene Exponenten, so daß (7) und (8) auch fehlen könnten, wenn es darauf ankäme, in der Zahl der Formeln sich möglichst einzuschränken. Ein Exponent aber macht eine Ausnahme, nämlich $n = -1$. Dieser Wert würde in (1) ergeben:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \frac{x^0}{0} + C = \frac{1}{0} + C = \infty + C,$$

d. h. die Formel versagt. In der Tat tritt dann an ihre Stelle die Formel (9), welche auf einen Logarithmus führt.

Was in [129] über die Mehrdeutigkeit der Funktionen und ihrer abgeleiteten Funktionen, über ihre Unstetigkeitsstellen, insbesondere Unendlichkeitsstellen ausgeführt worden ist, gilt selbstverständlich entsprechend verändert über Integranden und ihre Integralfunktionen. Im besondern sei erwähnt:

In Formel (9) wird x als positiv vorausgesetzt, denn negative numeri haben keine (reellen) Logarithmen. Ist x negativ, so ist $(-x)$ positiv und

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{d(-x)}{(-x)} = \ln(-x) + C,$$

d. h. wenn x negativ sein sollte, so hat man x als numerus durch seinen absoluten Wert zu ersetzen, wie (9a) anzeigt. Ebenso ergänzen sich (19) und (19a) und (20) und (20a). Für (18) ist es bei einer Formel geblieben, weil der numerus gar nicht negativ werden kann (vorausgesetzt, daß die Wurzel positiv genommen wird wie bei (19) und (19a)).

Ist eine Unstetigkeitsstelle des Integranden zugleich eine Unstetigkeitsstelle des Integrals, so darf der Integrationsweg nicht über diese Stelle gehen, ja sie nicht einmal an den Grenzen haben.

Beispiel:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{+1} x^{-2}dx = \Big|_{-1}^{+1} \frac{x^{-1}}{-1} + C = \Big|_{-1}^{+1} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2.$$

Die Rechnung ist nach den zugehörigen Formeln ohne Fehler ausgeführt. Und doch ist sie unsinnig, denn zwischen -1 und $+1$ liegt 0, und 0 ist eine Unendlichkeitsstelle des Integranden und des Integrals. Übrigens zeigt auch das Ergebnis ganz offen den Widersinn an dem negativen Vorzeichen. Denn der Integrand kann nur positiv sein und dx ist auch positiv, da x von -1 bis $+1$ geht. Negativ kann also das Integral überhaupt nicht sein, sondern wenn es einen Wert hätte, so wäre es positiv. Es hat aber gar keinen „Wert". Man darf eben über eine Unendlichkeitsstelle des Integrals nicht drüberweg integrieren.

Ist aber eine Unstetigkeitsstelle des Integranden keine Unstetigkeitsstelle des Integrals, so darf der Integrationsweg über sie gehen oder sie an einer Grenze haben. Beispiel:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{+1} dx\cdot x^{-\frac{2}{3}} = \Big|_{-1}^{+1} 3\sqrt[3]{x} + C$$

$$= +3-(-3) = +6.$$

Dieser Wert ist rechnerisch ohne Fehler und auch wirklich richtig. Denn wenn auch die zwischen -1 und $+1$ liegende 0 eine Unendlichkeitsstelle des Integranden ist, so ist sie doch keine Unendlichkeitsstelle, ja überhaupt keine Unstetigkeitsstelle des Integrals.

Geometrisch betrachtet liegt die Sache so, daß beide Kurven:

$$y = \frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

für $x = 0$ eine positive unendliche Ordinate haben (Fig. 107). Aber im ersten Falle ist die Fläche unendlich, im letzten Falle endlich.

Fig. 107.

Gleiche Vorsicht ist anzuwenden, wenn man etwa eine Grenze oder gar beide unendlich setzt. Hat das Integral dann einen limes, so darf man es tun; wenn nicht, dann nicht. So hat z. B. das Integral:

$$\int_0^{+\infty} \sin x\, dx = \Big|_0^{+\infty} - \cos x + C$$

überhaupt gar keinen Wert, weil die Integralfunktion für $\lim x = \infty$ keinen limes hat. Das Integral:

$$\int_{+1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \Big|_{+1}^{+\infty} \ln x + C = \ln(+\infty) - \ln 0 = +\infty$$

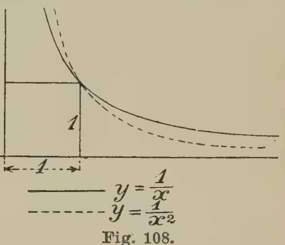


Fig. 108.

ist unendlich, obgleich der Integrand an der oberen Grenze verschwindet. Da $y = 1 : x$ die Asymptotengleichung der Hyperbel vorstellt, so folgt hieraus, daß die Fläche zwischen einer Hyperbel und ihren Asymptoten unendlich groß ist. Dagegen ist:

$$\int_{+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \Big|_{+1}^{+\infty} - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-1} = +1,$$

also nicht unendlich, sondern endlich.

Übungen zu § 31.

1. $\int e^x (f(x) + f'(x))\, dx.$

2. $\int (\sin x\, f(x) - \cos x\, f'(x))\, dx.$

3. Wird der Integrand $f(x)$ an einer Stelle a so unendlich, daß $\lim (x - a) f(x)$ endlich (und von 0 verschieden) bleibt, so wird auch das Integral unendlich. Ist aber $\lim (x - a) f(x) = 0$, so kann das Integral an dieser Stelle unendlich, aber auch endlich werden.

4. $\int (\cos x\, f(x) + \sin x\, f'(x))\, dx.$

5. $\int \left(\frac{\operatorname{arc}(\sin = x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx.$

§ 32. Einfache Beispiele ausgeführter Integrationen.

254. Ein Teil der folgenden Beispiele, welche zeigen sollen, wieviel man schon mit den einfacheren Formeln des vorigen Paragraphen erreichen kann, läßt sich auf elementare Weise ohne Integration erledigen und führt auf bekannte Formeln, wie es sein muß. Ein anderer Teil aber geht darüber hinaus. Die Bedeutung der Buchstaben und der Vorzeichen, wo solche in Frage kommen, ergibt sich aus den Figuren.

I. Inhalt eines Dreiecks (Fig. 109) [a ist Grundlinie].

$$\Delta = \int y\,dx; \quad y : a = h - x : h$$

$$\Delta = \frac{a}{h}\int_0^h (h - x)\,dx = \frac{a}{h}\Big|_0^h \left(hx - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{a}{h}\cdot\frac{h^2}{2} = \frac{ah}{2}.$$

II. Volumen einer Pyramide (Fig. 110).

$$V = \int f\,dx; \quad f : G = x^2 : h^2$$

$$V = \frac{G}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{G}{h^2}\Big|_0^h \left(\frac{x^3}{3} + C\right) = \frac{G}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{Gh}{3}.$$

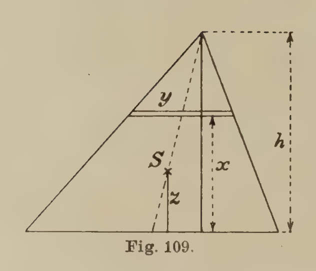


Fig. 109.

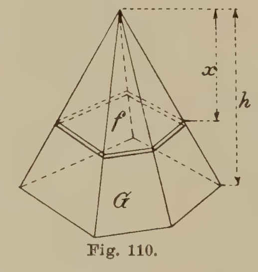


Fig. 110.

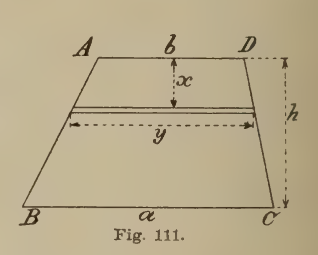


Fig. 111.

III. Flächeninhalt eines Trapezes (Fig. 111).

$$F = \int y\,dx; \quad y - b : a - b = x : h, \quad y = b + \frac{a-b}{h}x$$

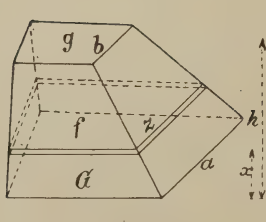
$$F = \int_0^h \left(b + \frac{a-b}{h}x\right)dx = \Big|_0^h bx + \frac{a-b}{h}\frac{x^2}{2} + C$$

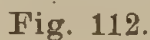
$$F = bh + \frac{a-b}{h}\cdot\frac{h^2}{2} = h\left(b + \frac{a-b}{2}\right) = h\frac{a+b}{2}.$$

IV. Volumen eines Pyramidenstumpfes (Fig. 112).

$$V = \int f\,dx; \quad a - z : a - b = x : h, \quad z = a - \frac{a-b}{h}x$$

$$G : g : f = a^2 : b^2 : z^2; \quad a : b : z = \sqrt{G} : \sqrt{g} : \sqrt{f},$$




Fig. 112.

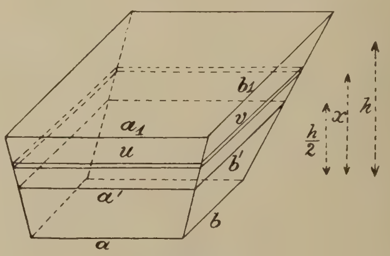


Fig. 113.

daher:

$$\sqrt{f} = \sqrt{G} - \frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{h} x; \quad f = \left(\sqrt{G} - \frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{h} x\right)^2$$

$$V = \int_0^h \left(G - 2\frac{\sqrt{G}(\sqrt{G} - \sqrt{G})}{h} x + \frac{(\sqrt{G} - \sqrt{g})^2}{h^2} x^2\right) dx$$

$$= \Big|_{x=0}^{x=h} Gx - 2\sqrt{G}\frac{(\sqrt{G} - \sqrt{g})}{h}\frac{x^2}{2} + \frac{(\sqrt{G} - \sqrt{g})^2}{h^2}\frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{h}{3}[3G - 3(G - \sqrt{Gg}) + G + g - 2\sqrt{Gg}]$$

$$= \frac{h}{3}(G + g + \sqrt{Gg}).$$

V. Volumen des nebenstehenden Prismatoids (Fig. 113).

$$V = \int uv\,dx$$

$$u = a + \frac{a_1 - a}{h} x, \quad v = b + \frac{b_1 - b}{h} x,$$

$$V = \int_0^h \left(ab + \frac{b(a_1 - a) + a(b_1 - b)}{h} x + \frac{(a_1 - a)(b_1 - b)}{h^2} x^2\right) dx,$$

$$V = \Big|_{x=0}^{x=h} abx + \frac{b(a_1 - a) + a(b_1 - b)}{h}\frac{x^2}{2} + \frac{(a_1 - a)(b_1 - b)}{h^2}\frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{h}{6}\Big[6ab + 3(b(a_1 - a) + a(b_1 - b)) + 2(a_1 - a)(b_1 - b)\Big]$$

$$= \frac{h}{6}[6ab + 3a_1b - 3ab + 3ab_1 - 3ab + 2a_1b_1 - 2ab_1 - 2a_1b + 2ab]$$

$$= \frac{h}{6}[2ab + 2a_1b_1 + ab_1 + ba_1].$$

Diese Formel wird sehr einfach, wenn man die beiden Grundflächen G und g und die Mittelfläche m, welche von G und g gleichen Abstand hat, einführt. Es ist

$$G = ab, \quad g = a_1b_1, \quad m = a'b' = \frac{a + a_1}{2} \cdot \frac{b + b_1}{2},$$

$$4m = ab + ab_1 + ba_1 + a_1b_1; \quad ab_1 + ba_1 = 4m - G - g.$$

$$V = \frac{h}{6}[2G + 2g + (4m - G - g)],$$

oder

$$V = \frac{h}{6}[G + g + 4m] \quad \text{vgl. [258].}$$

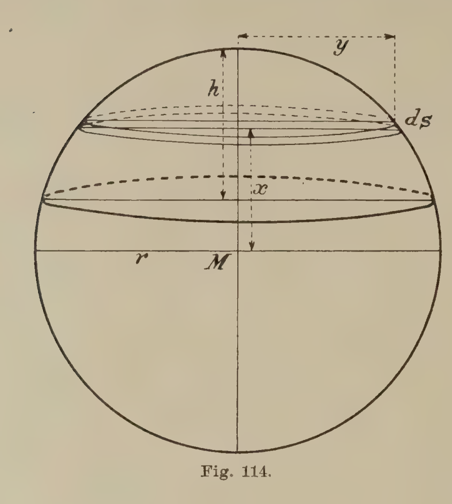


Fig. 114.

VI. Volumen der Kugel und eines Kugelabschnittes (Fig. 114).

$$V = \pi \int y^2 dx = \pi \int (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \Big| _{x=-r}^{x=+r} r^2 x - \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - (-r^3) + \frac{(-r)^3}{3} \right]$$

$$= \pi \left[2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right]$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Für den Kugelabschnitt sind die Grenzen $r - h$ und r; also:

$$V = \pi \Big| _{r-h}^{r} r^2 x - \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2 (r - h) + \frac{(r-h)^3}{3} \right]$$

$$= \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - r^3 + r^2 h + \frac{r^3}{3} - r^2 h + r h^2 - \frac{h^3}{3} \right]$$

$$= \pi \frac{h^2}{3} (3r - h).$$

Zur Probe setze man $h = 0$, $h = r$, $h = 2r$. Man erhält:

$$V = 0, \quad V = \frac{2\pi r^3}{3}, \quad V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Alle drei Werte stimmen.

VII. Oberfläche der Kugel und eines Kugelabschnittes.

$$O = 2\pi \int y ds = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx \quad [240]$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad 1 + (y')^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

$$y \cdot \sqrt{1 + y'^2} = r \text{ (äußerst einfach!)}$$

$$O = 2\pi r \int_{x=-r}^{x=+r} dx = 2\pi r \Big| _{-r}^{+r} x + C = 4\pi r^2.$$

Für den Kugelabschnitt sind die Grenzen $r - h$ und r, also:

$$O = 2\pi r \Big| _{r-h}^{r} x + C = 2\pi r [r - (r - h)] = 2\pi r h.$$

VIII. Flächeninhalt eines Kreises und eines Kreisabschnittes (Fig. 115).

$$F = \int 2x\,dy.$$

Man führe φ als Hilfsgröße ein:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$
$$dy = r\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$F = 2r^2 \int \cos^2\varphi\, d\varphi = r^2 \int (1 + \cos 2\varphi\, d\varphi)$$

$$= r^2\left(\varphi + \frac{1}{2}\int \cos 2\varphi\, d(2\varphi)\right) = r^2\Big[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + C\Big]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=+\frac{\pi}{2}}$$

$$= r^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\sin(-\pi)}{2}\right) = \pi r^2.$$

Fig. 115.

Für den Kreisabschnitt sind die Grenzen φ und $\frac{\pi}{2}$, daher:

$$F = r^2 \Big|_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} = r^2\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]$$

$$= r^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right) = r^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right).$$

IX. Gesamtflächeninhalt der Bernoullischen Lemniskate [182 (Fig. 70 u. 71)]:

$$F = 2\int dS = \int r^2 d\varphi, \qquad [140_{\text{III}}]$$

Grenzen für $\varphi: -\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$; Polargleichung: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$,

$$F = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d2\varphi = \frac{a^2}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} (\sin 2\varphi + C)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{a^2}{2}(1+1) = a^2.$$

X. Länge eines vollen Zykloidenbogens. Es ist [144]:

$$ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

(Die rechte Seite ist positiv, wenn φ von 0 bis 2π geht).

$$s = 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4r\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2}$$

$$= \Big|_0^{2\pi} - 4r\cos\frac{\varphi}{2} + C = -4r\cos\pi + 4r\cos 0,$$

das heißt:

$$s = 8r.$$

Diese äußerst einfache Formel folgt auch ohne Integration aus [202]. Der größte Krümmungsradius $= 4r$ legt sich bei der Aufwicklung ganz auf eine halbe Backe der Evolute, welche daher dieselbe Länge $= 4r$ haben muß. Nun ist [182] die Evolute der Zykloide eine kongruente Zykloide, also ist die Länge eines vollen Zykloidenbogens $= 8r$.

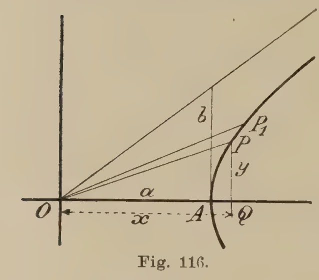


Fig. 116.

XI. Sektor einer Hyperbel (Fig. 116):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Sektor $AOP = S = \frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx)$:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad dy = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx,$$

$$S = \frac{b}{2a}\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx = \frac{ab}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \frac{ab}{2}\int\frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} = \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) = \frac{ab}{2}\,\mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Cof} = \frac{x}{a}\right).$$

Die Integrationskonstante ist hier $= 0$ zu setzen, da der Sektor verschwinden soll für $x = a$, welcher Wert in der Tat $S = 0$ ergibt. Wird unter Bezugnahme auf [63] $a = 1$, $b = 1$ angenommen und die Bezeichnung so abgeändert, daß $2S$ durch x, dagegen x durch u ersetzt wird, so folgt:

$$x = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Cof} = u),$$

also umgekehrt:

$$u = OQ = \mathfrak{Cof}\, x,$$

d. h. das x in [63] wird in der Tat veranschaulicht durch das Doppelte des Sektors AOP, wie dort vorweggenommen worden war.

XII. Quadratur der gemeinen Zykloide [60]:

$$F = \int y\,dx = \int r(1-\cos\varphi)\cdot r(1-\cos\varphi)\,d\varphi$$
$$= r^2\int(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi$$
$$= r^2\int\left(\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi\right)$$
$$= r^2(\tfrac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\tfrac{1}{4}\sin 2\varphi)+C.$$

Für eine ganze Zykloidenfläche sind die Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$

$$F = r^2\tfrac{3}{2}2\pi = 3r^2\pi,$$
$$= 3\cdot\text{Fläche des rollenden Kreises.}$$

XIII. Volumen des Umdrehungsparaboloids (Fig. 117):

$$V = \pi\int y^2 dx,\quad x = \frac{y^2}{2p},\quad h = \frac{a^2}{2p},\quad x = \frac{y^2}{a^2}h,\quad dx = \frac{2y\,dy}{a^2}h,$$

$$V = \frac{2\pi h}{a^2}\int_{y=0}^{y=a} y^3\,dy = \frac{2\pi h}{a^2}\left(\frac{y^4}{4}+C\right) = \frac{\pi a^2 h}{2},$$

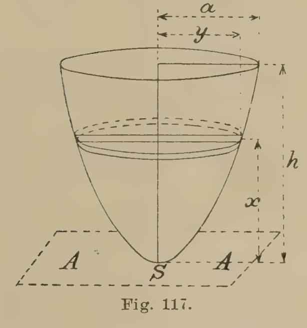


Fig. 117.

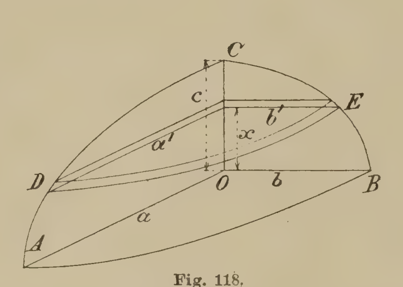


Fig. 118.

also halb so groß, wie das des Zylinders mit derselben Grundfläche und derselben Höhe.

XIV. Volumen eines dreiachsigen Ellipsoides (Fig. 118):

$$V = \int f\,dx = \pi\int a'b'\,dx,$$

$$\frac{a'^2}{a^2}+\frac{x^2}{c^2} = 1,\quad \frac{b'^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2} = 1,$$

$$a' = a\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}},\quad b' = b\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}.$$

$$V = \pi ab\int\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)dx = \Big|_{-c}^{+c}\pi ab\left(x-\frac{x^3}{3c^2}\right)+C$$

$$= \pi ab\left(c-\frac{c^3}{3c^2}-(-c)+\frac{(-c)^3}{3c^2}\right) = \tfrac{4}{3}\pi abc.$$

255. Die vorigen 14 Beispiele sind der Geometrie entnommen. Jetzt folgen einige aus der Mechanik.

I. Die Geschwindigkeit v eines freifallenden Körpers sei der Fallzeit proportional und ihre Zunahme in der Zeiteinheit betrage g Geschwindigkeitseinheiten (oder die Fallbeschleunigung sei konstant $= g$). Wie groß ist die Falltiefe s nach der Fallzeit t.

Es sei x eine beliebige Fallzeit zwischen 0 und t. Es soll sein:

$$v = \frac{ds}{dx} = gx; \quad ds = gx\,dx,$$

$$s = \int gx\,dx = \Big|_0^t g\frac{x^2}{2} + C,$$

$$s = \frac{g}{2}t^2 \text{ (Galileische Fallformel).}$$

II. Schwerpunkt eines Dreiecks.[1])

Es sei BC die Achse (Fig. 119), M das Moment und z der Abstand des Schwerpunktes.

Fig. 119.

$$M = \int_0^h y(h-x)\,dx = \frac{a}{h}\int_0^h x(h-x)\,dx$$

$$= \Big|_0^h \frac{a}{h}\left(h\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C = \frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{ah^2}{6},$$

$$\triangle \cdot z = M; \quad z = \frac{M}{\triangle} = \frac{ah^2 \cdot 2}{6 \cdot ah} = \frac{h}{3}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes des Dreiecks von einer Grundlinie ist = dem dritten Teil der zugehörigen Höhe.

III. Schwerpunkt einer Pyramide (Fig. 110). Man nehme G als Ebene des Momentes, so folgt:

$$M = \int f(h-x)\,dx = \frac{G}{h^2}\int x^2(h-x)\,dx,$$

1) Schwerpunkte werden berechnet nach dem Momentensatz, welcher bis auf Archimedes zurückgeht. Moment eines Körpers in bezug auf einen Punkt, oder eine Gerade, oder eine Ebene ist gleich dem Integral der Produkte aus den Massenteilchen und ihren Abständen von dem Punkte oder der Geraden oder der Ebene, welche nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ zu nehmen sind. Handelt es sich, wie in den folgenden Aufgaben, um geometrische Schwerpunkte, so hat man statt Masse zu setzen Länge, oder Fläche, oder Volumen, die gleichmäßig mit Masse belegt sein könnten. Der Momentensatz lautet:

Das Moment ist gleich dem Produkt aus der Gesamtmasse und dem Abstand des Schwerpunktes (von dem gewählten Punkt, oder Achse, oder Ebene).

$$M = \Big|_{x=0}^{x=h} \frac{G}{h^2}\left(h\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + C = \frac{G}{h}\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4}\right) = \frac{Gh^2}{12},$$

$$z = \frac{M}{V} = \frac{Gh^2 3}{12 \cdot Gh},$$

$$z = \frac{h}{4}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes einer Pyramide von der Grundfläche ist = dem vierten Teile der zugehörigen Höhe.

IV. Schwerpunkt eines Paralleltrapezes (Fig. 111). Man nehme $AD = b$ als Momentenachse.

$$M = \int yx\,dx = \int\left(bx + \frac{a-b}{h}x^2\right)dx$$

$$= \Big|_0^h b\frac{x^2}{2} + \left(\frac{a-b}{h}\right)\frac{x^3}{3} + C = \frac{bh^2}{2} + \frac{a-b}{3}h^2$$

$$= \frac{h^2}{6}(3b + 2a - 2b) = \frac{h^2}{6}(2a + b),$$

$$z = \frac{M}{F} = \frac{h^2(2a+b)\cdot 2}{6\cdot h(a+b)} = \frac{h}{3}\,\frac{b+2a}{a+b}.$$

V. Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes (Fig. 112). Man nehme G als Ebene des Momentes.

$$M = \int f\cdot x\,dx = \int\left(\sqrt{G} - \frac{\sqrt{G}-\sqrt{g}}{h}x\right)^2 x\,dx$$

$$= \int\left(Gx - 2\sqrt{G}\,\frac{\sqrt{G}-\sqrt{g}}{h}x^2 + \frac{(\sqrt{G}-\sqrt{g})^2}{h^2}x^3\right)dx$$

$$= \Big|_{x=0}^{x=h} G\frac{x^2}{2} - 2\sqrt{G}\,\frac{\sqrt{G}-\sqrt{g}}{h}\,\frac{x^3}{3} + \frac{(\sqrt{G}-\sqrt{g})^2}{h^2}\,\frac{x^4}{4} + C$$

$$= \frac{h^2}{12}\left(6G - 8\sqrt{G}(\sqrt{G}-\sqrt{g}) + 3(G + g - 2\sqrt{Gg})\right)$$

$$= \frac{h^2}{12}(G + 2\sqrt{Gg} + 3g),$$

$$z = \frac{M}{V} = \frac{h^2}{12}\,\frac{(G + 2\sqrt{Gg} + 3g)3}{h(G + \sqrt{Gg} + g)},$$

$$z = \frac{h}{4}\left(\frac{G + 2\sqrt{Gg} + 3g}{G + \sqrt{Gg} + g}\right).$$

VI. Schwerpunkt des Prismatoids (Fig. 113). Man nehme ab als Momentenebene.

$$M=\int uvx\,dx=\int\left(abx+\frac{b(a_1-a)+a(b_1-b)}{h}x^2+\frac{(a_1-a)(b_1-b)}{h^2}x^3\right)dx$$

$$=ab\frac{x^2}{2}+\frac{b(a_1-a)+a(b_1-b)}{h}\frac{x^3}{3}+\frac{(a_1-a)(b_1-b)}{h^2}\frac{x^4}{4}+C$$

$$=\frac{h^2}{12}(6ab+4(b(a_1-a)+a(b_1-b))+3(a_1-a)(b_1-b))$$

$$=\frac{h^2}{12}(ab+ab_1+ba_1+3a_1b_1),$$

oder nach Einführung von G, g und m:

$$M=\frac{h^2}{6}\cdot(2m+g),$$

$$z=\frac{M}{V}=\frac{h^2(2m+g)6}{6(G+g+4m)h}=h\frac{2m+g}{G+g+4m}.$$

VII. Schwerpunkt des Volumens einer Kugelkalotte (Fig. 114). Man nehme den Grundkreis durch Kugelmittelpunkt als Momentenebene.

$$M=\pi\int y^2x\,dx=\pi\int(r^2x-x^3)\,dx$$

$$=\Big|_{x=r-h}^{x=r}\pi\left(\frac{r^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)+C$$

$$=\pi\left(\frac{r^4}{2}-\frac{r^4}{4}-\frac{r^2(r-h)^2}{2}+\frac{(r-h)^4}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}(2r^4-r^4-2r^4+4r^3h-2r^2h^2+r^4-4r^3h+6r^2h^2-4rh^3+h^4)$$

$$=\frac{\pi}{4}h^2(4r^2-4rh+h^2)=\frac{\pi}{4}h^2(2r-h)^2,$$

$$z=\frac{M}{V}=\frac{\pi}{4}\frac{h^2(2r-h)^2\cdot 3}{\pi h^2(3r-h)},$$

$$z=\frac{3(2r-h)^2}{4(3r-h)}.$$

Für $h=0$ ergibt sich $z=r$ (stimmt). Für $h=2r$ ergibt sich $z=0$ (stimmt, da dann Kugelabschnitt = ganze Kugel). Für $h=r$ ergibt sich der Schwerpunkt der Halbkugel.

$$z=\tfrac{3}{8}r.$$

VIII. Schwerpunkt des Kreisabschnittes (Fig. 115). Man nehme A_1A als Achse.

$$M=2\int yx\,dy=\int x\,d(y^2).$$

Hier behalte man x als ursprüngliche Veränderliche:

$$y^2=r^2-x^2,\quad d(y^2)=-d(x^2)=-2x\,dx,$$

$$M=-2\int x^2dx=\Big|_{x=r\cos\varphi}^{x=0}-2\frac{x^3}{3}+C.$$

$$M = \tfrac{2}{3} r^3 \cos^3 \varphi.$$

$$z = \frac{M}{F} = \frac{2 r^3 \cos^3 \varphi}{3 r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \sin\varphi \cos\varphi\right)} = \frac{2 r \cos^3 \varphi}{3\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \sin\varphi \cos\varphi\right)}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ gibt $z = r$ vgl. [189]; $\varphi = 0$ gibt: $z = \frac{4r}{3\pi}$ (Schwerpunkt des Halbkreises); $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ gibt $z = 0$ (stimmt).

IX. Schwerpunkt eines vollen Zykloidenbogens [60] (Fig. 21). Man nehme OA als Achse.

$$\begin{aligned}
M &= \int y\,ds = \int r(1-\cos\varphi)\, 2r \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi \\
&= 2r^2 \int \left(\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi \sin\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi \\
&= 2r^2 \int \left(\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}\varphi + \frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi \\
&= r^2 \left[3\int \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi - \int \sin\frac{3}{2}\varphi\, d\varphi\right] \\
&= r^2 \left[6\int \sin\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2} - \frac{2}{3}\int \sin\frac{3}{2}\varphi\, d\frac{3}{2}\varphi\right] \\
&= \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^2\left(-6\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}\varphi\right) + C \\
&= r^2\left(-6\cos\pi + \frac{2}{3}\cos 3\pi + 6\cos 0 - \frac{2}{3}\cos 0\right) = \frac{32}{3} r^2
\end{aligned}$$

$$z = \frac{M}{s} = \frac{32 r^2}{3 \cdot 8r} = \frac{4}{3} r.$$

X. Schwerpunkt einer vollen Zykloidenfläche. Man nehme OA als Achse.

Der Schwerpunkt jedes Streifens $y\,dx$ liegt in der Mitte, hat also von OA den Abstand $\frac{y}{2}$. Daher:

$$\begin{aligned}
M &= \int \frac{y^2}{2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int r^2(1-\cos\varphi)^2 r(1-\cos\varphi)\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2} r^3 \int (1 - 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi)\, d\varphi; \\
&= \frac{1}{2} r^3 \int \left(1 - 3\cos\varphi + 3\,\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - \frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}\right) d\varphi \\
&= \frac{1}{2} r^3 \int \left(\frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos\varphi + \frac{3}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\cos 3\varphi\right) d\varphi \\
&= \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{1}{2} r^3 \cdot \left(\frac{5}{2}\varphi - \frac{15}{4}\sin\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{12}\sin 3\varphi\right) + C = \frac{5}{2}\pi r^3
\end{aligned}$$

$$z = \frac{M}{F} = \frac{5\pi r^3}{2 \cdot 3\pi r^2} = \frac{5}{6} r.$$

XI. Schwerpunkt des Volumens eines Umdrehungs-Paraboloides (Fig. 117). Man nehme AA als Grundebene.

$$M = \pi \int y^2 x\,dx = \pi \frac{a^2}{h} \int x^2 dx$$

$$= \pi \frac{a^2}{h} \Big|_0^h \frac{x^3}{3} + C = \pi \frac{a^2 h^2}{3}.$$

$$z = \frac{M}{V} = \frac{2\pi a^2 h^2}{3\pi a^2 h} = \frac{2}{3} h. \quad \text{(also wie beim Dreieck.)}$$

XII. Die Regel des Guldin oder des Pappus.[1])

1. Der Inhalt eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der ebenen Fläche, durch deren Umdrehung der Körper entsteht und dem Weg des Schwerpunkts der Fläche.

2. Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Umfang, durch dessen Umdrehung die Oberfläche entsteht und dem Weg des Schwerpunktes des Umfanges.

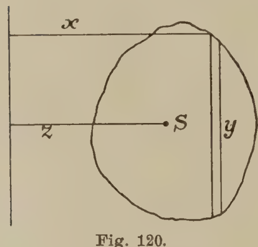


Fig. 120.

Beweis zu 1. Es ist:

$$dV = 2\pi xy\,dx,$$

$$V = 2\pi \int xy\,dx = 2\pi \int x\,df,$$

$$= 2\pi M,$$

M bezogen auf die Rotationsachse. Also nach dem Momentensatz:

$$V = 2\pi F \cdot z = F \cdot 2\pi z,$$

womit der Satz bewiesen ist, denn F ist der Inhalt der Fläche und $2\pi z$ ist der Weg ihres Schwerpunktes. Entsprechend wird 2. bewiesen.

Die Berechnung der Volumina und Oberflächen von Umdrehungskörpern ist somit auf das engste mit der Berechnung von Schwerpunkten verknüpft. Mit dem einen ist das andere sofort mitbestimmt und umgekehrt.

Beispiele: Oberfläche des durch Drehung der Zykloide [60] (Fig. 21) um OA entstehenden Körpers:

$$O = 8r \cdot 2\pi \frac{4}{3} r = \frac{64}{3} \pi r^2.$$

Volumen desselben Körpers:

$$V = 3\pi r^2 \cdot 2\pi \frac{5}{6} r = 5\pi^2 r^3.$$

1) Lange Zeit hielt man Guldin für den ersten Entdecker. Doch hat schon Pappus aus Alexandria diese Regel gekannt.

Schwerpunkt der Halbkreisfläche:

$$z = \frac{V(\text{Kugel})}{2\pi F} = \frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{\pi \cdot \pi r^2} = \frac{4r}{3\pi} \quad \text{(vgl. VIII)}.$$

Schwerpunkt des Umfanges des Halbkreises:

$$z = \frac{F(\text{Kugel})}{2\pi \cdot s} = \frac{4\pi r^2}{2\pi \cdot \pi r} = \frac{2r}{\pi}.$$

256. Trägheitsmomente. Diese Hilfsgrößen spielen in der Mechanik eine sehr große Rolle. Unter dem Trägheitsmoment eines Körpers (oder Länge, Fläche, Volumen) bezogen auf einen Punkt (oder Achse, Ebene) versteht man das Integral über das Produkt aller Teilchen des Körpers (Länge, Fläche, Volumen) mit den Quadraten der Abstände von dem Punkte (Achse, Ebene).

I. Trägheitsmoment eines Rechtecks, bezogen auf eine zur Seite b parallele Schwerpunktsachse (Fig. 121).

$$T = b\int x^2 dx = \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b\frac{x^3}{3} + C = \frac{bh^3}{24} + \frac{bh^3}{24}$$

$$T = \frac{bh^3}{12}.$$

Fig. 121.

II. Trägheitsmoment eines Dreiecks, bezogen auf eine Seite (Fig. 119).

$$T = \int y\,dx(h-x)^2 = \frac{a}{h}\int x\,dx(h-x)^2$$

$$= \frac{a}{h}\int (xh^2 - 2x^2h + x^3)dx$$

$$= \Big|_0^h \frac{a}{h}\left(\frac{x^2h^2}{2} - \frac{2x^3h}{3} + \frac{x^4}{4}\right) + C = a\left(\frac{h^3}{2} - \frac{2h^3}{3} + \frac{h^3}{4}\right)$$

$$= \frac{ah^3}{12}.$$

III. Trägheitsmoment eines Kreises, bezogen auf seinen Mittelpunkt (Fig. 122):

$$T = \int 2\pi\varrho\,d\varrho\,\varrho^2 = 2\pi\int \varrho^3 d\varrho = \Big|_0^r 2\pi\frac{\varrho^4}{4} + C$$

$$T = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Fig. 122.

IV. Trägheitsmoment eines Kreises, bezogen auf einen Durchmesser $A_1 A$, (Fig. 115):

$$T = \int 2x\,dy\,y^2 = 2r^4 \int \cos^2\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi$$
$$= \frac{r^4}{2}\int \sin^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{r^4}{4}\int (1-\cos 4\varphi)\,d\varphi$$
$$= \frac{r^4}{4}\int \left(d\varphi - \frac{\cos 4\varphi\, d(4\varphi)}{4}\right)$$
$$= \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right) + C = \frac{r^4}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} - \frac{-\pi}{2} - \frac{\sin(-2\pi)}{4}\right)$$
$$T = \frac{\pi r^4}{4}.$$

V. Trägheitsmoment eines Kreiszylinders, bezogen auf seine Achse. Man denke sich den Zylinder auf dem Kreise stehend (Fig. 122). Dann ist das Volumenelement $= 2\pi\varrho\, d\varrho \cdot h$, wo h die Höhe des Zylinders bezeichnet. Also:

$$T = 2\pi h \cdot \int \varrho\, d\varrho \cdot \varrho^2 = 2\pi h \int \varrho^3 d\varrho = \Big|_{\varrho=0}^{\varrho=r} 2\pi h\left(\frac{\varrho^4}{4} + C\right)$$
$$T = \frac{\pi r^4 h}{2}.$$

VI. Trägheitsmoment einer Kugel, bezogen auf einen Durchmesser (Fig. 114). Man betrachte eine Scheibe als Zylinder von der Höhe dx und dem Radius y. Daher nach V:

$$T = \int \frac{\pi y^4}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\int (r^2 - x^2)^2 dx$$
$$= \frac{\pi}{2}\int (r^4 - 2r^2x^2 + x^4)\,dx = \Big|_{-r}^{+r} \frac{\pi}{2}\left(r^4 x - \frac{2r^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + C$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(r^5 - \frac{2}{3}r^5 + \frac{1}{5}r^5 + r^5 - \frac{2}{3}r^5 + \frac{1}{5}r^5\right)$$
$$T = \frac{8}{15}\pi r^5.$$

257. Die folgenden Beispiele beziehen sich auf Massenanziehungen nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz:

$$K = \frac{k^2 M \cdot m}{r^2}. \tag{1}$$

K = Anziehungskraft, M und m die beiden Massen, r der Abstand der beiden Körper (oder besser Massenpunkte); k^2 die von den gewählten Einheiten der Länge, Zeit und Masse abhängende Gravitationskonstante.

I. Anziehung einer unendlich langen, gleichmäßig mit Masse belegten Geraden auf einen äußeren Punkt mit der Masse m (Fig. 123). Es sei γ die Dichte oder die Masse, welche auf die Längeneinheit kommt. Die Anziehung eines Massenelements γdx auf m ist nach (1):

$$= \frac{k^2 \gamma m\, dx}{r^2}$$

und die Komponente in der Richung des Lotes:

$$= \frac{k^2 \gamma m\, dx}{r^2} \cdot \cos\alpha = \frac{k^2 \gamma m\, dx\, a}{r^3}.$$

Fig. 123.

Die Resultante aller Anziehungen hat offenbar die Richtung des Lotes a. Daher:

$$K = k^2 \gamma m a \int \frac{dx}{r^3}.$$

Man führe α als Integrationsveränderliche ein:

$$r = \frac{a}{\cos\alpha}, \quad x = a \operatorname{tg}\alpha, \quad dx = \frac{a}{\cos^2\alpha}\, d\alpha$$

$$K = k^2 \gamma m a \int \frac{\frac{a}{\cos^2\alpha}\, d\alpha}{\frac{a^3}{\cos^3\alpha}} = \frac{k^2 \gamma m}{a} \int \cos\alpha\, d\alpha = \left| \frac{k^2 \gamma m}{a^2} \sin\alpha \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$K = \frac{2 k^2 \gamma m}{a}.$$

II. Anziehung einer homogenen Kreislinie auf einen beliebigen Punkt P mit der Masse m in der Ebene des Kreises (Fig. 124). Es ist das Massenelement der Kreislinie

$$ds\gamma = \varrho\, d\varphi\, \gamma,$$

also die Anziehung auf m:

$$\frac{k^2 \varrho\, d\varphi\, \gamma \cdot m}{r^2}$$

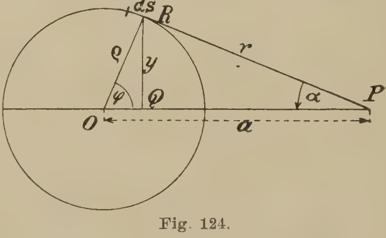


Fig. 124.

und die Projektion auf OP, welche hier allein in Betracht kommt:

$$= \frac{k^2 \varrho\, d\varphi\, \gamma \cdot m \cdot \cos\alpha}{r^2}.$$

Mithin die Gesamtanziehung:

$$K = k^2 \varrho \gamma m \int \frac{d\varphi \cos\alpha}{r^2}.$$

Hier sind zunächst drei Veränderliche φ, r, α. Welche soll man für die Integration behalten? Oder soll man gar alle drei fortschaffen zu

Gunsten einer vierten? Am nächsten liegt wohl, φ zu behalten, wegen der einfachen Grenzen 0 und 2π. Es ist:

$$r = \sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\varphi}, \quad \cos\alpha = \frac{a - \varrho\cos\varphi}{r} = \frac{a - \varrho\cos\varphi}{\sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\varphi}},$$

daher:

$$K = k^2\gamma\varrho m \cdot \int_0^{2\pi} \frac{a - \varrho\cos\varphi}{\sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\varphi}^3} \cdot d\varphi.$$

Die Integration stößt auf Schwierigkeiten. Man könnte also versuchen r beizubehalten, oder α, aber ohne Erfolg, denn der Integrand wird nicht einfacher. In der Tat ist das Integral ein sogenanntes elliptisches Integral und muß nach besonderer Methode behandelt werden. (Vgl. § 33.)

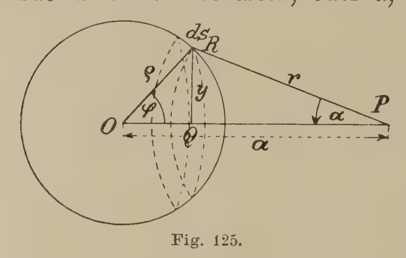


Fig. 125.

III. Anziehung einer homogenen Kugelfläche auf einen Punkt P mit der Masse m (Fig. 125). Man behalte die Bezeichnungen von II bei, nur sei γ die Masse der Flächeneinheit.

Statt γds ist zu setzen nach V in [240]:

$$2\pi\gamma ds \cdot y = 2\pi\gamma\varrho d\varphi y,$$

sonst bleibt alles wie in II. Also:

$$K = k^2 2\pi\gamma\varrho m \cdot \int \frac{d\varphi \cdot y\cos\alpha}{r^2}.$$

Es tritt also in das Integral noch der Faktor $y = \varrho\sin\varphi$ hinein. Daher, wenn man φ beibehält:

$$K = k^2 2\pi\gamma\varrho^2 m \int_0^{\pi} \frac{a - \varrho\cos\varphi}{\sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\varphi}^3} \cdot \sin\varphi\, d\varphi.$$

Die Grenzen sind 0 und π, während sie in II 0 und 2π waren.

Zunächst scheinen sich die Schwierigkeiten gegen die vorige Aufgabe wegen des neuen Faktors $\sin\varphi$ vermehrt zu haben. Aber bei näherer Betrachtung erkennt man in ihm umgekehrt eine wesentliche Erleichterung für die Integration, die sich sofort zu erkennen gibt, wenn man nicht φ, sondern r beibehält und entsprechend transformiert. Es ist:

$$r = \sqrt{a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\varphi}, \quad \cos\varphi = \frac{a^2 + \varrho^2 - r^2}{2a\varrho}$$

$$\sin\varphi\, d\varphi = \frac{r\,dr}{a\varrho}, \quad a - \varrho\cos\varphi = \frac{a^2 - \varrho^2 + r^2}{2a}.$$

Daher nach der Umformung:

$$K = k^2 2\pi\gamma\varrho^2 m \int \frac{a^2 - \varrho^2 + r^2}{r^3 \cdot 2a} \cdot \frac{r\,dr}{a\varrho}$$

$$= \frac{k^2\pi\gamma\varrho m}{a^2}\left[(a^2 - \varrho^2)\int\frac{dr}{r^2} + \int dr\right]$$

$$= \frac{k^2\pi\gamma\varrho m}{a^2}\left[\frac{\varrho^2 - a^2}{r} + r + C\right].$$

Bei der Einsetzung der Grenzen hat man zu unterscheiden, ob P außerhalb oder innerhalb liegt. Ist ersteres der Fall, so sind die Grenzen für r:

$$a - \varrho \quad \text{und} \quad a + \varrho .$$

Daher:

$$K = \frac{k^2\pi\gamma\varrho m}{a^2}\left[\frac{\varrho^2 - a^2}{a + \varrho} + a + \varrho - \frac{\varrho^2 - a^2}{a - \varrho} - (a - \varrho)\right]$$

$$= \frac{k^2\pi\gamma\varrho m}{a^2}\left[\varrho - a + \varrho + a + \varrho + a + \varrho - a\right]$$

$$= \frac{k^2 4\pi\gamma\varrho^2 m}{a^2}$$

oder (Gesamtmasse der Kugelfläche $M = 4\pi\varrho^2\gamma$):

$$K = \frac{k^2 M \cdot m}{a^2},$$

d. h. eine homogene Kugelschale zieht einen äußeren Punkt so an, als ob ihre Gesamtmasse im Mittelpunkt vereinigt wäre.

Liegt aber P innerhalb, so sind die Grenzen für r:

$$\varrho - a \quad \text{und} \quad \varrho + a,$$

also:

$$K = \frac{k^2\pi\gamma\varrho m}{a^2}\cdot\left[\frac{\varrho^2 - a^2}{\varrho + a} + \varrho + a - \frac{\varrho^2 - a^2}{\varrho - a} - (\varrho - a)\right]$$

$$= \frac{k^2\gamma\pi\varrho m}{a^2}\cdot\left[\varrho - a + \varrho + a - \varrho - a - \varrho + a\right],$$

$$K = 0,$$

d. h.: die Gesamtanziehung einer homogenen Kugelschale auf einen im Innern befindlichen Punkt verschwindet. Für den Mittelpunkt ist dieser Satz selbstverständlich, aber für andere Punkte innerhalb mußte er bewiesen werden. Auch gilt er für sie nur unter Zugrundelegung des Newtonschen Gravitationsgesetzes.

Aufgaben zu § 32.

1. Mantel des Umdrehungsparaboloids (Fig. 117). Probe für $h = 0$.

2. Oberfläche eines abgeplatteten Umdrehungsellipsoides, entstanden durch Drehung einer Ellipse um die kleinere Hauptachse $2b$. Probe für $a = b$ und $b = 0$.

3. Oberfläche eines verlängerten Umdrehungsellipsoides, entstanden durch Drehung einer Ellipse um die größere Hauptachse $2a$. Probe für $a = b$.

4. Rektifikation und Quadratur der Kettenlinie

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Sie dreht sich um die x-Achse. Berechnung des Mantels und des Volumens des Umdrehungskörpers, wenn er begrenzt wird durch zwei Kreisflächen in den Abständen $x = a$ und $x = b$.

5. Trägheitsmoment eines homogenen Kreiskegels (Radius $= r$, Höhe $= h$), erstens bezogen auf die Umdrehungsachse, zweitens bezogen auf eine zu ihr senkrechte Achse durch die Kegelspitze, drittens bezogen auf eine zur Umdrehungsachse senkrechte Achse durch den Schwerpunkt.

§ 33. Die Simpsonsche Regel. Die mechanische Quadratur. Integration durch unendliche Ausdrücke.

258. Die Simpsonsche Regel. Wenn der Integrand eine ganze Funktion bis höchstens dritten Grades

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \tag{1}$$

der Integrationsveränderlichen ist und man mit y_0, y_1, y_2 den Anfangswert, den Wert in der Mitte des Integrationsweges und den Endwert von y bezeichnet, ferner

$$b - a = h = 2\Delta \tag{2}$$

setzt, so gilt die Gleichung:

$$\begin{aligned} J = \int_a^b y\,dx &= \frac{h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) \\ &= \frac{\Delta}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Beweis. Es sei statt (1) zuerst nur angenommen, daß y nebst seinen vier ersten Ableitungen innerhalb des Integrationsweges endlich und stetig sei. Die mittlere Abszisse werde x_1 genannt und die Transformation:

$$x = x_1 + \xi, \quad dx = d\xi$$

eingeführt, welche die neuen Grenzen $-\Delta$ und $+\Delta$ zur Folge hat. Daher:

$$J = \int_a^b y\,dx = \int_{\xi=-\Delta}^{\xi=+\Delta} f(x_1 + \xi)\,d\xi. \tag{4}$$

Fig. 126.

Nach **Taylor** ist, wenn man die **Lagrange**sche Restform nimmt:

$$y = f(x) = f(x_1 + \xi)$$
$$= f(x_1) + \frac{\xi}{1!}f'(x_1) + \frac{\xi^2}{2!}f''(x_1) + \frac{\xi^3}{3!}f'''(x_1) + \frac{\xi^4}{4!}f''''(x_1 + \lambda\xi), \quad (5)$$

also:

$$J = \int_{-\varDelta}^{+\varDelta} y\,d\xi = \Big|_{\xi=-\varDelta}^{\xi=+\varDelta}\left(\xi f(x_1) + \frac{\xi^2}{2!}f'(x_1) + \frac{\xi^3}{3!}f''(x_1) + \frac{\xi^4}{4!}f'''(x_1)\right) +$$
$$+ \int_{-\varDelta}^{+\varDelta} \frac{\xi^4}{4!}f''''(x_1 + \lambda\xi)\,d\xi.$$

Bei Einsetzen der Grenzen fallen das zweite und vierte Glied fort. Das Zusatzintegral kann nach dem zweiten Mittelwertsatz [243 6] abgeschätzt werden:

$$\int_{-\varDelta}^{+\varDelta} \frac{\xi^4}{4!}f''''(x_1 + \lambda\xi)\,d\xi = f''''(x_m)\int_{-\varDelta}^{+\varDelta}\frac{\xi^4}{4!}d\xi = f''''(x_m)\Big|_{-\varDelta}^{+\varDelta}\frac{\xi^5}{5!}$$

(x_m ist ein Mittelwert zwischen a und b). Man erhält:

$$J = 2\varDelta f(x_1) + \frac{2\varDelta^3}{3!}f''(x_1) + \frac{2\varDelta^5}{5!}f''''(x_m). \quad (6)$$

Andererseits folgt aus (5), wenn für ξ der Reihe nach $-\varDelta$, 0, $+\varDelta$ gesetzt wird:

$$y_0 = f(x_1) - \varDelta f'(x_1) + \frac{\varDelta^2}{2!}f''(x_1) - \frac{\varDelta^3}{3!}f'''(x_1) + \frac{\varDelta^4}{4!}f''''(x_1 - \lambda_1\varDelta),$$
$$y_1 = f(x_1),$$
$$y_2 = f(x_1) + \varDelta f'(x_1) + \frac{\varDelta^2}{2!}f''(x_1) + \frac{\varDelta^3}{3!}f'''(x_1) + \frac{\varDelta^4}{4!}f''''(x_1 + \lambda_2\varDelta),$$

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 6f(x_1) + \frac{2\varDelta^2}{2!}f''(x) + \frac{2\varDelta^4}{4!}\left[\frac{f''''(x_1 - \lambda_1\varDelta) + f''''(x_1 + \lambda_2\varDelta)}{2}\right].$$

Der Wert in der eckigen Klammer ist als arithmetisches Mittel zweier Werte von $f''''(x)$ wieder ein Wert von $f''''(x)$, also etwa $f''''(x_n)$, folglich:

$$\frac{\varDelta}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = 2\varDelta f(x_1) + \frac{2\varDelta^3}{3!}f''(x_1) + \frac{2\varDelta^5}{4!\,3}f''''(x_n). \quad (7)$$

Also gibt die Vergleichung von (6) und (7):

$$J = \frac{\varDelta}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{\varDelta^5}{12}\left(\frac{f''''(x_m)}{5} - \frac{f''''(x_n)}{3}\right) \quad (8)$$

oder auch:

$$J = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h^5}{384}\left(\frac{f''''(x_m)}{5} - \frac{f''''(x_n)}{3}\right). \quad (9)$$

Ist y eine ganze Funktion höchstens dritten Grades von x, also auch von ξ, so verschwindet die vierte Ableitung identisch, d. h. für jeden Wert von x, und man erhält (3). Die dem Simpson zugeschriebene Regel stimmt also. Über ihre Entdeckung scheint nichts näheres bekannt zu sein, möglicherweise hat man sie zuerst an der Formel für den Inhalt des Prismatoids oder anderen Beispielen [254] durch Induktion gefunden. Sie macht, sobald man die Gewißheit gewonnen hat, daß der Integrand die geforderte Voraussetzung erfüllt, die Integration selbst überflüssig, wie folgende Beispiele bestätigen sollen.

Inhalt des Dreiecks:

$$y_0 = a, \quad y_1 = \frac{a}{2}, \quad y_2 = 0,$$

$$F = \frac{h}{6}\left(a + 4\,\frac{a}{2} + 0\right) = \frac{ah}{2}.$$

Volumen der Pyramide:

$$y_0 = G, \quad y_1 = \frac{G}{4}, \quad y_2 = 0,$$

$$V = \frac{h}{6}\left(G + 4\,\frac{G}{4} + 0\right) = \frac{Gh}{3}.$$

Volumen der Kugel:

$$h = 2r, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = \pi r^2, \quad y_2 = 0,$$

$$V = \frac{r}{3}(0 + 4\pi r^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Moment des Prismatoides (hier ist $y = u \cdot v \cdot x$):

$$y_0 = 0, \quad y_1 = m\frac{h}{2}, \quad y_2 = g \cdot h,$$

$$M = \frac{h}{6}(0 + 2mh + gh) = \frac{h^2}{6}(2m + g).$$

Die Formeln stimmen mit § 32. Es muß so sein, da im ersten Beispiele der Integrand bis zum ersten, im zweiten und dritten Beispiel bis zum zweiten und im vierten Beispiel bis zum dritten Grade ansteigt. Verkehrt aber wäre die Anwendung auf VI in [256], da der Integrand:

$$(r^2 - x^2)^2 = r^4 - 2r^2x^2 + x^4$$

bis zum vierten Grade ansteigt. Es wäre für h zu setzen $2r$, für y_0, y_1, y_2 zu setzen $0, r^4, 0$, also:

$$T = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{3}(0 + 4r^4 + 0) = \frac{2}{3}\pi r^5 = \frac{10}{15}\pi r^5.$$

Dieser Wert ist falsch, da statt $\frac{10}{15}$ stehen müßte $\frac{8}{15}$. Es war auch

gar nicht zu erwarten, daß er richtig sei; im Gegenteil, er mußte falsch sein und zwar nach (9), da $f''''(x_m) = f''''(x_n) = 24$ ist, um:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^5}{12} \cdot \left(\frac{24}{5} - \frac{24}{3}\right) = -\frac{2}{15}\pi r^5$$

zu klein, wie es ja auch wirklich ist.

259. Mechanische Quadratur. Sie stellt sich die Aufgabe, durch verhältnismäßig einfache Formeln die numerische Auswertung eines bestimmten Integrals möglich zu machen, ohne Kenntnis der Integralfunktion, also auch ohne Einsetzen der Grenzen in sie.

Solche Formeln können allgemein nur Annäherungsformeln sein, welche bei gehöriger Abwägung des Verlaufes des Integranden eine gegebene Ziffernzahl des Integralwertes richtig verbürgen. Eine von ihnen ist die Simpsonsche Formel, der keine andere gleichkommt oder gar sie übertrifft an Einfachheit, ohne daß zugleich die Genauigkeit ganz außerordentlich herabgesetzt würde. Sie vermittelt in den meisten Fällen die beste Ausgleichung der beiden widerstrebenden Wünsche, möglichst wenig zu rechnen und doch möglichst genau zu verfahren.

Die Formel (9) zeigt, daß bei drei Ordinaten, Anfangsordinate, Mittelordinate und Endordinate, der Fehler die Form hat:

$$\frac{h^5}{384}\left(\frac{f''''(x_m)}{5} - \frac{f''''(x_n)}{3}\right). \tag{1}$$

Hier sind x_m und x_n nicht näher bekannte Mittelwerte von a und b, was aber kein Hindernis zu sein braucht, den Fehler, für dessen Kleinheit der große Nenner sehr ins Gewicht fällt, wenigstens abzuschätzen. Es kommt, wie man sieht, auf die fünfte Potenz von h und auf den größten und kleinsten Wert der vierten Ableitung des Integranden an.

Stellt sich heraus oder vermutet man aus dem Verlauf des Integranden, daß mit drei Ordinaten nicht die gewünschte Genauigkeit erreicht werden kann, so steht nichts im Wege, nach [243 3] den Integrationsweg in Teile zu zerlegen und auf jeden Teil die Simpsonsche Formel anzuwenden, da durch Verkleinerung von h der Fehler, wie seine Form zeigt, meist in einem viel stärkeren Verhältnis verkleinert wird. Wenn es geht, wird man der Einfachheit wegen den Integrationsweg etwa in n gleiche Teile oder vielmehr, da jeder Teil seine Mittelordinate haben muß, in $2n$ gleiche Teile teilen, so daß im ganzen $2n + 1$ Ordinaten

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \cdots, y_{2n}, \quad y_{2n+1}$$

in Betracht kommen. Setzt man der Einfachheit wegen $h = 2n\varDelta$ und wendet auf jeden Spielraum $= 2\varDelta$ die Simpsonsche Formel an, so folgt:

$$J = J_1 + J_2 + \cdots + J_n$$
$$= \frac{\varDelta}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{\varDelta}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{\varDelta}{3}(y_{2n-1} + 4y_{2n} + y_{2n+1})$$

oder in vereinfachter Form:

$$J = \frac{\varDelta}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2n-1} + 4y_{2n} + y_{2n+1}). \quad (2)$$

Diese Gleichung ist die von 3 auf $2n+1$ Ordinaten verallgemeinerte Simpsonsche Formel. Bei ihrer Anwendung wird man n eben groß genug zu nehmen suchen, daß der Fehler die gestellte Genauigkeitsgrenze noch nicht erreicht. Nimmt man weniger, so leidet die Genauigkeit, nimmt man mehr, so erschwert man unnötigerweise die Rechnung. Wünschenswert ist, wie gesagt, die durch (1) angezeigte Abschätzung des Fehlers, wenn sie überhaupt ausgeführt werden kann, was allerdings oft nicht möglich ist, z. B. dann nicht, wenn die Werte des Integranden nur empirisch oder graphisch gegeben sind. Aber in solchen Fällen können ja die Ansprüche an Genauigkeit überhaupt nicht sehr groß sein.

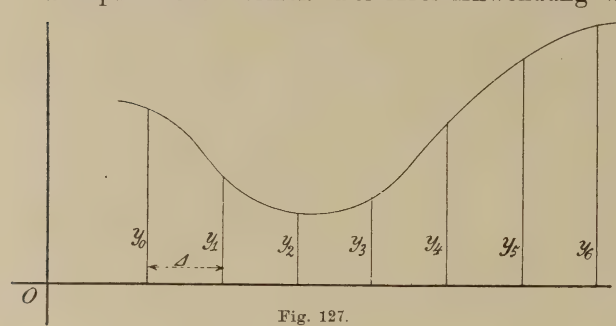


Fig. 127.

260. Beispiel. Zu berechnen der Umfang U der Ellipse mit den Halbachsen $a = 5$, $b = 3$. Zunächst eine Schätzung. Es liegt U zwischen den Umfängen des großen und des kleinen Scheitelkreises

$$U < 10\pi, \qquad U > 6\pi.$$

Als erste Annäherung wird man das arithmetische Mittel betrachten:

$$U = 8\pi = 25{,}13\ldots.$$

Es ist aber dieser Wert sehr wahrscheinlich zu klein. Allerdings für $a = b$ würde er selbstverständlich stimmen, weil dann die beiden Kreise und die Ellipse zusammenfallen. Aber für $b = 0$ ist $U = 4a$, weil die Ellipse sich zu einer doppelt zu zählenden Strecke von der Länge $2a$ abplattet, während die obige Annäherung geben würde $U = \pi a$, also zu wenig. Nach [144] ist:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx = \sqrt{\frac{a^4 - e^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx.$$

Daher, wenn man sich auf einen Quadranten beschränkt und darauf mit 4 multipliziert:

$$U = \frac{4}{a} \int_0^a \sqrt{\frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx. \tag{1}$$

Aber auf dieses Integral kann man die Simpsonsche Formel überhaupt nicht anwenden, weil der Integrand an der Grenze $x = a$ unendlich groß wird, also ein unendlich großer Wert herauskommen würde, während der Umfang doch offenbar endlich ist. Es muß also eine Umformung vorangehen. Man setze $e = a \cdot \varepsilon$ und:

$$x = a \sin\varphi, \quad dx = a \cos\varphi\, d\varphi, \quad \sqrt{a^4 - e^2 x^2} = a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi},$$
$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = a \cos\varphi;$$

$x = 0$ entspricht $\varphi = 0$, $x = a$ entspricht $\varphi = \frac{\pi}{2}$; geht φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so geht x von 0 bis a, wie es sein soll, also nach Fortheben von $\cos\varphi$ im Zähler und Nenner:

$$U = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi. \tag{2}$$

Nun wird auch der Integrand nicht mehr unendlich, vielmehr ist sein größter Wert $= 1$ und sein kleinster Wert $= \sqrt{1 - \varepsilon^2} = b : a$. Es sollte sein:

$$a = 5, \quad b = 3, \quad \text{also} \quad e = 4, \quad \varepsilon = 0{,}8,$$

$$U = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0{,}64 \sin^2\varphi}\, d\varphi. \tag{3}$$

Bei der Anwendung der Simpsonschen Formel muß mithin:

$$y = \sqrt{1 - 0{,}64 \sin^2\varphi} = \sqrt{0{,}36 + 0{,}64 \cos^2\varphi}; \quad h = \frac{\pi}{2}$$

gesetzt werden. Um eine gute Annäherung zu erzielen, nehme man ferner $n = 3$, d. h. sieben Ordinaten, den Werten entsprechend:

$$\varphi = 0,\ 15^0,\ 30^0,\ 45^0,\ 60^0,\ 75^0,\ 90^0$$

und berechne mittelst einer fünfstelligen Logarithmentafel.

$$\begin{aligned}
y_0 &= \sqrt{1{,}00000} = 1{,}0000, & y_0 &= 1{,}00000 \\
y_1 &= \sqrt{0{,}95713} = 0{,}97832; & 4\,y_1 &= 3{,}91328 \\
y_2 &= \sqrt{0{,}84000} = 0{,}91652; & 2y_2 &= 1{,}83304 \\
y_3 &= \sqrt{0{,}68000} = 0{,}82463; & 4y_3 &= 3{,}29852 \\
y_4 &= \sqrt{0{,}52000} = 0{,}72110; & 2y_4 &= 1{,}44220 \\
y_5 &= \sqrt{0{,}40287} = 0{,}63471; & 4y_5 &= 2{,}53884 \\
y_6 &= \sqrt{0{,}36000} = 0{,}6000; & y_6 &= 0{,}60000 \\
& & \sum &= 14{,}62588.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\triangle = h : 2n = \frac{\pi}{2} : 6 = \frac{\pi}{12},$$

also:

$$U = \frac{10\pi}{18} \cdot \sum = 10\pi \cdot 0{,}81255\,.$$

$$\left.\begin{array}{r} \log 10\pi = 1{,}49715 \\ \log 0{,}81255 = 9{,}90985 \\ \hline \log U = 1{,}40700 \end{array}\right\} \; \boldsymbol{U = 25{,}527}.$$

Das Ergebnis ist einschließlich der letzten Stelle richtig. Vgl. [262].

261. Die Simpsonsche Formel ist nicht die einzige zur Ausführung mechanischer Quadraturen geblieben, sondern hat eine große Anzahl von Gefährten erhalten. Man hat z. B. nach weiteren Formeln Umschau gehalten, so daß der Fehler bei noch höheren Potenzen von x anfangen möchte, indem man mehr als drei, also vier, fünf, sechs ... Koordinaten nimmt und dementsprechend den Integrationsweg in drei, vier, fünf ..., jedoch immer in gleiche Teile teilt.

Die entsprechenden Formeln nennt man nach ihrem ersten Entdecker die Formeln des Cotesius. Sie haben die Eigentümlichkeit, daß man allgemein mit $2p-1$ Ordinaten beinahe gleiche Genauigkeit erreicht, wie mit $2p$ Ordinaten, und daß in dieser Hinsicht erst eine wesentliche Verbesserung eintritt bei dem Übergang von $2p$ auf $2p+1$. Die Simpsonsche Formel braucht (in ihrer ursprünglichen Form) drei Ordinaten und der Fehler beginnt erst bei der vierten Potenz. Die nächstfolgende Formel des Cotesius:

$$J = \frac{h}{10}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 3y_3)$$

braucht vier Ordinaten und der Fehler beginnt auch erst bei der vierten Potenz. Dagegen braucht die dann folgende Formel:

$$J = \frac{h}{90}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$$

fünf Ordinaten, während der Fehler erst bei der sechsten (nicht bei der fünften!) Potenz von x beginnt usw.

Ferner hat man untersucht, was etwa bei einer anderen Verteilung der Ordinaten herauskommen könnte. Insbesondere sei hier eine klassische Arbeit von Gauß erwähnt über diejenige Verteilung, welche bei gegebener Anzahl von Ordinaten die größtmögliche Genauigkeit erzielt. Dazu kommen noch andere Formeln und Methoden, welche für hohe Ansprüche an Genauigkeit, wie sie z. B. bei astronomischen Rechnungen, etwa der sog. Störungen gestellt werden, bestimmt sind.

Das Kapitel von der mechanischen Quadratur könnte also recht umfangreich werden. Doch für die meisten Fälle der Technik reicht die Simpsonsche Formel völlig aus.

262. Außer der mechanischen Quadratur gibt es noch viele weitere Mittel und Wege ein bestimmtes Integral auszuwerten, wenn man es nicht durch die Integralfunktion und Einsetzen der Grenzen kann oder will. Hierher gehört die Integration mittels eines unendlichen und konvergenten Verfahrens und insbesondere die so häufig verwendbare Integration mittels unendlicher Reihen. Man entwickelt den Integranden in eine solche Reihe und integriert jedes Glied.

Dabei muß selbstverständlich beidemale Konvergenz vorhanden sein, d. h. nicht allein die Reihe für den Integranden, sondern auch die Reihe der Integrale muß konvergieren.

Erstes Beispiel: Vorgelegt sei das Integral:

$$J = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

Man setze:

$$\ln x = y, \; x = e^y, \; dx = e^y dy,$$

also

$$J = \int \frac{e^y\, dy}{y}$$

und nehme die Reihe für e^y (§ 12), welche stets konvergent ist, so folgt:

$$J = \int \frac{dy}{y} + \frac{1}{1!}\int dy + \frac{1}{2!}\int y\, dy + \frac{1}{3!}\int y^2\, dy + \cdots + C$$

$$= \ln y + \frac{y}{1!\,1} + \frac{1}{2!\,2} y^2 + \frac{1}{3!\,3} y^3 + \cdots + C$$

$$J = \ln(\ln x) + \frac{\ln x}{1!\,1} + \frac{(\ln x)^2}{2!\,2} + \frac{(\ln x)^3}{3!\,3} + \cdots + C.$$

Auch diese Reihe ist konvergent.

Zweites Beispiel: Rektifikation der Ellipse (zum zweiten male [260]). Der Umfang war in die Form gebracht worden:

$$U = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Man könnte den Integranden schon so, wie er ist, nach dem binomischen Lehrsatz in eine Reihe entwickeln. Doch zur erheblichen Beschleunigung der Konvergenz sei er erst noch umgeformt durch Einführung des doppelten Winkels:

$$2\varphi = \psi, \; d\varphi = \frac{d\psi}{2}, \; \sin^2\varphi = \frac{1 - \cos\psi}{2}; \; \frac{\varepsilon^2}{2 - \varepsilon^2} = k.$$

Die neuen Grenzen sind 0 und π. Man erhält:

$$U = 2a\sqrt{\frac{2 - \varepsilon^2}{2}} \int_0^{\pi} d\psi \sqrt{1 + k\cos\psi}.$$

Nun erst entwickle man nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\sqrt{1+k\cos\psi} = (1+k\cos\psi)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} k\cos\psi + \binom{\frac{1}{2}}{2} k^2\cos^2\psi + \binom{\frac{1}{2}}{3} k^3\cos^3\psi + \binom{\frac{1}{2}}{4} k^4\cos^4\psi + \cdots$$

und integriere jedes Glied. Dabei zeigt sich dann sofort, daß nach Einsetzen der Grenzen das zweite, vierte, sechste ... Integral verschwinden muß, da $\cos\psi$, also auch seine ungeraden Potenzen, von $\psi = 0$ bis $\psi = +\frac{\pi}{2}$ positiv und von $\psi = +\frac{\pi}{2}$ bis $\psi = +\pi$ in genau umgekehrter Weise negativ werden. Daher:

$$U = 2a\sqrt{\frac{2-\varepsilon^2}{2}}\left(\int_0^\pi d\psi + \binom{\frac{1}{2}}{2}k^2\int_0^\pi \cos^2\psi\, d\psi + \binom{\frac{1}{2}}{4}k^4\int_0^\pi \cos^4\psi\, d\psi + \cdots\right)$$

Nach [291 3] ist:

$$\int_0^\pi d\psi = \pi.$$

$$\int_0^\pi \cos^2\psi\, d\psi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi = \pi\cdot\frac{1}{2}.$$

$$\int_0^\pi \cos^4\psi\, d\psi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\psi\, d\psi = \pi\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}.$$

. . . .

Ferner ist:

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1\cdot 2} = \frac{(+1)(-1)}{2\cdot 4} = -\frac{1}{2\cdot 4}.$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}.$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{6} = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}.$$

. . . .

Endlich ist:

$$\sqrt{\frac{2-\varepsilon^2}{2}} = \sqrt{\frac{2-\frac{a^2-b^2}{a^2}}{2}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$k = \frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} : \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Daher, wenn eingesetzt wird:

$$U = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\left[1 - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\right.$$
$$\left. - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6\cdots\right],$$

also im besondern wie in [260] für $a = 5$, $b = 3$:

$$U = 2\pi\sqrt{17}\left(1 - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{17}\right)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\left(\frac{8}{17}\right)^4\right.$$
$$\left. - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{8}{17}\right)^6\cdots\right.$$

$$= 2\pi\sqrt{17}\,(1 - 0{,}013841 - 0{,}000720 - 0{,}000069$$
$$- 0{,}000008 - 0{,}000001)$$
$$= 2\pi\sqrt{17}\cdot 0{,}985361.$$

$$l\,2\pi = 0{,}79818$$
$$\tfrac{1}{2}l\,17 = 0{,}61522_5$$
$$l\,0{,}98536 = 9{,}99359$$
$$l\,U = 1{,}40699_5$$

$\mathbf{U = 25{,}527}$ [vgl. 260].

263. Noch seien zwei Methoden zur Lösung von Integralen genannt, aber ohne näher auf sie einzugehen. Sie sind so sehr voneinander verschieden, wie nur irgend möglich, denn die eine führt in die höchsten Spitzen der Analysis und die andere verzichtet ganz und gar nicht nur auf analytische Entwicklungen, sondern auch auf numerische Rechnungen und geht mit Hilfe eines Werkzeugs oder Mechanismus, also wirklich rein „mechanisch" vor.

Wegen der ersten Methode sei vorbemerkt, daß es oft gar nicht möglich ist, eine gegebene, irgendwie aus elementaren Funktionen zusammengesetzte Funktion zu integrieren in dem Sinne, daß die Integralfunktion auch aus elementaren Funktionen zusammengesetzt sei. Ersetzt man hier das Wort „elementar" durch das Wort „bekannt", was ja oft beinahe einerlei ist, so liegt die Frage nahe, ob es nicht noch unbekannte Funktionen gebe, durch welche die Integration sich bewerkstelligen lasse. Man betrachte z. B. die Formel

$$\int\frac{1}{x}\,dx = \ln x + C,$$

links steht als Integrand die bekannte Funktion $1:x$ und rechts steht die auch bekannte Funktion $\ln x$. Wenn aber die Integralrechnung geschichtlich der Lehre von den Logarithmen vorangegangen wäre, so würde man zunächst von dem linksstehenden Integral nur haben erklären können, es ließe sich durch „bekannte" Funktionen nicht lösen, bis eben die Logarithmen „entdeckt" worden wären.

So wie es hier hätte sein können, so ist es wirklich gewesen bei anderen Integralen, bei den sog. elliptischen Integralen, wie z. B. die Formel für die Länge eines Ellipsenbogens:

$$s = \frac{4}{a}\int\sqrt{\frac{a^4 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\,dx$$

eines enthält, nach welcher Formel sie ihren Namen erhalten haben. Solche Integrale auf die Integrale in der Tafel zurückzubringen ist ganz und gar unmöglich; es hat der Einführung neuer Funktionen, der elliptischen Funktionen und der Thetafunktionen bedurft, um die Lösung möglich zu machen. Weil aber die Thorie dieser Funktionen nicht hierher gehört, so muß es bei dieser Andeutung sein Bewenden haben. Nur sei noch hinzugefügt, daß man bei den elliptischen Funktionen, welche die Exponentialfunktion einerseits und die trigonometrischen Funktionen anderseits als sehr einfache Grenzfälle umfassen, nicht stehen geblieben ist, sondern im weiteren Fortschreiten einen herrlichen Schatz von Funktionen aufgefunden hat, der zur Lösung mathematisch sehr schwieriger Aufgaben gedient hat und noch dienen wird.

Die zweite Methode ist wie gesagt, rein mechanisch und beruht auf dem Gebrauch eines Mechanismus, des sog. Integraphen, dem folgende Idee zugrunde liegt: Man stelle sich die Kurve für den Integranden (1α) und die Kurve für das unbestimmte Integral (1β):

$$\alpha)\ y = f(x) \text{ und } \beta)\ Y = \int f(x)\,dx \tag{1}$$

vor. Es soll sein:

$$\frac{dY}{dx} = y \text{ und } \frac{dY}{dx} = \operatorname{tg}\tau, \tag{2}$$

wo τ den Richtungswinkel für die Tangente von (1β) bezeichnet. Also

$$\operatorname{tg}\tau = y, \tag{3}$$

d. h. dieser Richtungswinkel von (1β) ist unmittelbar durch die Ordinate von (1α) bestimmt. Der Integraph löst eben die Aufgabe, durch Verbindung von Gleiten und freien Rollen zu der gegebenen Kurve (1α) eine zweite Kurve (1β) gemäß der Formel (3) zu finden. Die Ordinate Y der Kurve (1β) ist dann das unbestimmte Integral für die Kurve (1α).

Weiteres muß man aus einer ausführlichen Beschreibung eines Integraphen oder noch besser aus der Vorführung eines solchen entnehmen. Es soll jetzt gelungen sein, den Fehler auf wenige Prozente des Wertes herabzudrücken, was für viele Fälle der Technik völlig ausreicht. Man führt den Integraphen über die Kurve und liest dann das Integral unmittelbar am Apparate ab.

Übungen zu § 33.

1. Die Schwingungsdauer t des mathematischen Pendels von der Länge l und dem Ausschlagswinkel $+\alpha$ bzw. $-\alpha$ wird durch die Integralformel bestimmt:

$$t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\varphi)}}.$$

Weshalb ist die Auswertung des Integrals weder nach der Formel von Simpson noch durch Reihenentwicklung nach dem Binomischen Lehrsatz möglich? Weshalb wird sie aber möglich, wenn das Integral durch die Substitution

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\psi \sin\frac{\alpha}{2}$$

umgerechnet wird. Berechnung von t durch eine unendliche Reihe unter Benutzung der allgemeinen Formel [291 3]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}.$$

2. Die in [261] genannten Formeln des Cotesius sind abzuleiten und Formeln für ihre Fehler zu ermitteln.

3. Die Ellipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$$

dreht sich um die y-Achse. Die Oberfläche des abgeplatteten Umdrehungsellipsoids soll nach der Simpsonschen Formel berechnet werden, nachdem ein Hilfswinkel φ durch die Gleichungen

$$x = 5\cos\varphi,\quad y = 3\sin\varphi$$

eingeführt worden ist. Probe durch Berechnung mittels der genauen Formel (2. Aufgabe in § 32).

§ 34. Mehrfache Integrale.

264. Wie das gewöhnliche oder einfache Integral erklärt wird als ein Grenzfall einer gewöhnlichen Summe, so ist das Doppelintegral ein Grenzfall einer Doppelsumme [15], das dreifache Integral ein Grenzfall einer dreifachen Summe usw. Die Summanden sollen in allen Fällen unendlich klein werden, aber bei dem einfachen Integral schon durch eine Integration, bei dem Doppelintegral erst durch zwei Integrationen, bei dem dreifachen Integral erst durch drei Integrationen usw. den gesuchten wirklichen Wert geben.

Wie das gemeint ist, läßt sich sehr klar geometrisch erläutern. Die Länge s eines Kurvenbogens hat nur eine Dimension, sie wird durch das einfache Integral

$$s = \int ds \tag{1}$$

bestimmt. Der Inhalt F einer gegebenen Fläche, gleichgültig ob eben oder krumm, hat zwei Dimensionen; er wird durch das Doppelintegral:

$$F = \iint dF \tag{2}$$

bestimmt, wenn dF nach allen Richtungen auf der Fläche unendlich klein ist. Das Volumen V eines Körpers wird durch das dreifache Integral:

$$V = \iiint dV \tag{3}$$

bestimmt; wenn dV nach allen Richtungen des Raumes unendlich klein ist.

Allerdings werden, wie in § 32 ausführlich gezeigt, auch Flächen und Volumina häufig durch einfache Integrale bestimmt:

$$F = \int dF, \quad V = \int dV,$$

aber dann sind die dF oder dV zwar immer noch unendlich klein, aber nicht nach allen Richtungen, sondern nur noch nach einer Richtung. So z. B. in der Formel I [240]

$$F = \int y\,dx.$$

Hier ist das Differential von F oder $y\,dx$ ein Streifen von der unendlich kleinen Breite dx aber der beliebigen endlichen Länge y, welche ja auch noch in Differentiale geteilt werden könnte. Oder in der Formel V [240]

$$O = \int 2\pi y\,ds.$$

Hier ist das Differential von O oder $2\pi y\,ds$ ein Ring von der unendlich kleinen Breite ds, aber dem beliebigen endlichen Umfang $2\pi y$, welche ja auch noch in Differentiale geteilt werden könnte. Oder in der Formel IV [240]

$$V = \int f\,dx.$$

Hier ist das Differential von V eine Scheibe von unendlich kleiner Dicke dx, aber der beliebigen endlichen Grundfläche f, welche ja auch noch in Differentiale geteilt werden könnte.

In diesen drei Beispielen ist die eine Integration oder sind zwei der Integrationen bereits ausgeführt gedacht, so daß nur noch eine einfache Integration zu leisten übrig bleibt. Umgekehrt wird sich als-

bald herausstellen, daß ein $n$faches Integral in der Regel durch aufeinander folgende einfache Integrationen in ein $n-1$faches, dann in ein $n-2$faches ... und zuletzt in ein einfaches Integral verwandelt wird, wenn man es auswerten will.

Für die Folge soll die Betrachtung auf Doppelintegrale beschränkt werden, nicht allein der Einfachheit wegen, sondern weil bei dem Übergang auf dreifache, vierfache usw. Integrale wesentlich Neues nicht hinzukommt.

265. Wie das einfache bestimmte Integral immer geometrisch als eine Fläche gedeutet werden kann, welche begrenzt wird durch eine Strecke auf der Abszissenachse, durch Anfangs- und Endordinate und durch die Kurve, welche den Integranden bestimmt, so ist es möglich auch das Doppelintegral, mag es an sich sein, was es wolle, zu veranschaulichen wie folgt. Man nehme ein rechtwinkliges Koordinatensystem der xyz an und stelle sich z als Integranden vor, der durch eine Gleichung von der Form:

$$z = F(x, y) \tag{1}$$

bestimmt sei. Alsdann denke man sich aus der xy-Ebene durch eine beliebige geschlossene Linie eine völlig begrenzte Fläche, das sogenannte Integrationsgebiet f, ausgeschnitten und in allen Punkten der Grenzlinie Grenzordinaten errichtet. So entsteht ein Körper, der begrenzt wird erstens durch die ebene Fläche f, zweitens durch die Grenzordinaten, welche in ihrer Gesamtheit einen Zylinder bilden, der einerseits durch die xy-Ebene, andererseits durch die Fläche mit der Gleichung (1) vollständig abgegrenzt ist und drittens durch den entsprechenden innerhalb des Zylinders liegenden Teil dieser Fläche. Das Volumen V dieses Körpers wird augenscheinlich durch die Formel:

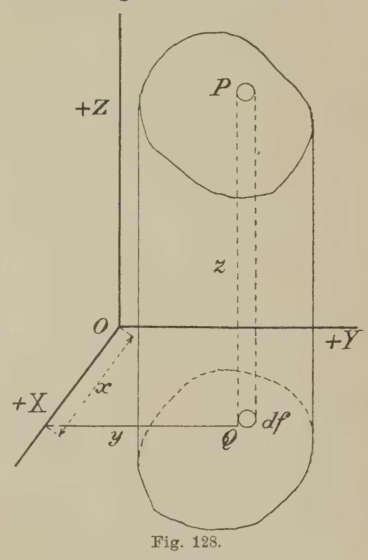


Fig. 128.

$$V = \iint z\,df = \iint F(x, y)\,df \tag{2}$$

bestimmt, wobei vorausgesetzt wird, daß f in unendlich viele nach allen Richtungen in der xy-Ebene unendlich kleine, sonst aber beliebige df geteilt worden sei.

Hierzu sei noch bemerkt: Erstens: Im allgemeinen werden f und seine Differentiale df absolut oder positiv vorausgesetzt, anderenfalls müßte das Gegenteil ausdrücklich erst kenntlich gemacht werden.

Zweitens: die Ordinaten z werden algebraisch angenommen, können also gegebenenfalls ebenso gut positiv wie negativ sein. Drittens: Das Integrationsgebiet f entspricht dem früheren Integrationsweg. Während damals aber nur zwei Grenzen, die untere und die obere Grenze existierten, sind hier unzählig viele Grenzen vorhanden, welche in ihrer Gesamtheit die Grenzlinie bilden und es geht nicht an, von einer oberen und von einer unteren Grenze zu reden. Viertens: Statt einer Grenzlinie kann es auch mehrere geben, denn das Integrationsgebiet f braucht nicht „einfach", sondern kann auch „mehrfach" zusammenhängend sein.[1]) Fünftens: Ist der Integrand z innerhalb des Integrationsgebietes und an seinen Grenzen eindeutig und stetig, so hat das Integral einen bestimmten endlichen Wert. Sind aber Unstetigkeitsstellen, insbesondere Unendlichkeitsstellen für den Integranden vorhanden, so ist wie in [253] von Fall zu Fall auszumachen, ob sie auch Unstetigkeitsstellen für das Integral werden. Sechstens: Die geometrische Veranschaulichung des Doppelintegrals ist nicht mit seiner analytisch abstrakten Bedeutung zu verwechseln.

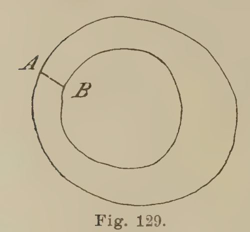


Fig. 129.

Auch sind folgende Sätze aus der Theorie einfacher Integrale sofort übertragbar:

$$\iint z\,df = f \cdot z_m. \tag{3}$$

Mittelwertsatz. Es soll z_m ein Mittelwert aller z sein.

Teilt man das Integrationsgebiet beliebig in Teile, so wird das Doppelintegral (3) in entsprechende Teile zerlegt.

$$\iint az\,df = a\iint z\,df. \tag{4}$$

Ein konstanter Faktor kann vor die Integralzeichen gesetzt werden.

$$\iint (z_1 + z_2 + \cdots)\,df = \iint z_1\,df + \iint z_2\,df + \cdots \tag{5}$$

Eine Summe kann integriert werden, indem man die Summanden einzeln integriert und die entstandenen Integrale addiert.

266. Wenn es nicht darauf ankommt, begnügt man sich auch bei mehrfachen Integralen der Einfachheit und besseren Übersichtlichkeit wegen mit einem Integralzeichen. Als Beispiel hierfür werden

1) Eine Kreisfläche, allgemein eine von einer einzigen geschlossenen Linie begrenzte ebene Fläche heißt einfach zusammenhängend. Sie wird durch jeden innerhalb der Fläche verlaufenden, von einem Grenzpunkt zu irgend einem anderen gehenden „Schnitt" in zwei Teile geteilt. Eine ebene, von mehreren Linien begrenzte Fläche heißt mehrfach zusammenhängend (Fig. 129). Der Schnitt AB der Ringfläche teilt diese nicht in zwei Teile.

die allgemeinen Theorien der statischen Momente, der Trägheitsmomente und der Zentrifugalmomente unter Beschränkung auf ebene (gleichmäßig mit Masse belegte) Flächen entwickelt. Es sei f eine solche ebene Fläche, welche in Elemente df zerlegt gedacht wird, so daß

$$f = \int df \tag{1}$$

gesetzt werden muß. Sodann lege man irgend ein Koordinatensystem zugrunde und bestimme die statischen Momente:

$$\alpha)\ M_x = \int y\,df, \quad \beta)\ M_y = \int x\,df \tag{2}$$

ferner die beiden Trägheitsmomente:

$$\alpha)\ T_x = \int y^2 df, \quad \beta)\ T_y = \int x^2 df \tag{3}$$

und endlich das sogenannte Zentrifugalmoment.

$$C_{xy} = \int xy\,df. \tag{4}$$

Dann gilt der folgende Satz: Sind die sechs Größen

$$f, \quad M_x, \quad M_y, \quad T_x, \quad T_y, \quad C_{xy} \tag{5}$$

für irgend ein Koordinatensystem durch (doppelte) Integration berechnet, so lassen sich die entsprechenden Größen für jedes andere Koordinatensystem ermitteln, ohne weitere Integration.

Von der ersten Größe f ist dies selbstverständlich, denn f hängt vom Koordinatensystem überhaupt nicht ab und ist also in diesem Sinne konstant oder invariant. Was die Transformation der anderen fünf Größen betrifft, so halte man sich an die Transformation der Koordinaten nach den Formeln der analytischen Geometrie:

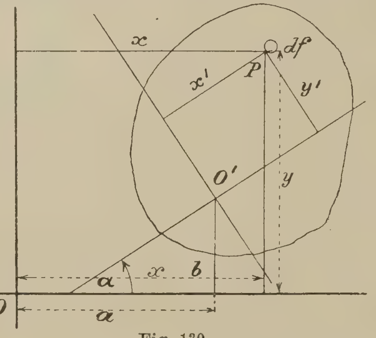


Fig. 130.

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + a \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{aligned} \tag{6}$$

daher:

$$M_{x'} = \int y'\,df = \int(-x\sin\alpha + y\cos\alpha + b)\,df$$

also nach Anwendung von (4) und (5) in [265]

$$M_{x'} = -\sin\alpha \int x\,df + \cos\alpha \int y\,df + b\int df,$$

oder:

$$M_{x'} = -\sin\alpha\, M_y + \cos\alpha\, M_x + bf,$$

und ebenso:

$$M_{y'} = \cos\alpha\, M_y + \sin\alpha\, M_x + af. \tag{7}$$

Ferner ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_{x'} = \int (y')^2 df = \int (-x \sin\alpha + y \cos\alpha + b)^2 df \\ = \sin^2\alpha \int x^2 df + \cos^2\alpha \int y^2 df - 2\sin\alpha\cos\alpha \int xy\,df \\ - 2b\sin\alpha \int x\,df + 2b\cos\alpha \int y\,df + b^2 \int df \end{aligned} \tag{8}$$

d. h.

$$\begin{aligned} T_{x'} = \sin^2\alpha\, T_y + \cos^2\alpha\, T_x - 2\sin\alpha\cos\alpha\, C_{xy} \\ - 2b\sin\alpha\, M_y + 2b\cos\alpha\, M_x + b^2 f \end{aligned} \tag{9}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} T_{y'} = \cos^2\alpha\, T_y + \sin^2\alpha\, T_x + 2\sin\alpha\cos\alpha\, C_{xy} \\ + 2a\cos\alpha\, M_y + 2a\sin\alpha\, M_x + a^2 f, \end{aligned} \tag{10}$$

endlich folgt:

$$C_{x'y'} = \int x'y'\,df = \int (x\cos\alpha + y\sin\alpha + a)(-x\sin\alpha + y\cos\alpha + b)\,df$$

$$\begin{aligned} C_{x'y'} = + \sin\alpha\cos\alpha\,(T_x - T_y) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\, C_{xy} \\ + (b\sin\alpha + a\cos\alpha)\, M_x + (-a\sin\alpha + b\cos\alpha)\, M_y + abf. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Formeln (7) bis (11) beweisen den Satz. Sie vereinfachen sich sehr erheblich, wenn $M_x = M_y = 0$ gesetzt wird, also O mit dem Schwerpunkt von f zusammenfällt. Man erhält dann, wenn auch noch $\alpha = 0$ angenommen, d. h. nur parallel verschoben wird:

$$\begin{gathered} M_{x'} = bf; \quad M_{y'} = af. \\ T_{x'} = T_x + b^2 f; \quad T_{y'} = T_y + a^2 f. \\ C_{x'y'} = C_{xy} + abf. \end{gathered} \tag{12}$$

Die beiden ersten Formeln drücken dann den bekannten Momentensatz aus: Statisches Moment = Fläche (in der rationellen Mechanik Masse) $\times$ Abstand des Schwerpunktes, der umgekehrt in § 32 zu mehreren Schwerpunktsberechnungen gedient hat. Die dritte und vierte Formel führt in sehr einfacher Weise Trägheitsmomente auf parallele Schwerpunktsachsen zurück und die fünfte leistet dasselbe für Zentrifugalmomente.

Setzt man dagegen $a = 0$, $b = 0$, α beliebig, d. h. dreht man um O, so folgt:

$$\begin{aligned} T_{x'} &= \cos^2\alpha\, T_x + \sin^2\alpha\, T_y - 2\sin\alpha\cos\alpha\, C_{xy}, \\ T_{y'} &= \sin^2\alpha\, T_x + \cos^2\alpha\, T_y + 2\sin\alpha\cos\alpha\, C_{xy}, \\ C_{x'y'} &= \sin\alpha\cos\alpha\,(T_x - T_y) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\, C_{xy}. \end{aligned}$$

Aus der letzten Formel geht hervor, daß es stets zwei durch O gehende senkrechte Achsen gibt, für welche das Zentrifugalmoment verschwindet. Denn die Bedingung $C_{x'y'} = 0$ ergibt

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2C_{xy}}{T_x - T_y}.$$

Man nennt diese Achsen (bekanntlich) freie Achsen und die zugehörigen Trägheitsmomente Hauptträgheitsmomente, wenn O der Schwerpunkt ist. Wählt man sie zur x- und y-Achse, so wird $C_{xy} = 0$ und die Formeln vereinfachen sich in:

$$\begin{aligned} T_{x'} &= \cos^2\alpha\, T_x + \sin^2\alpha\, T_y, \\ T_{y'} &= \sin^2\alpha\, T_x + \cos^2\alpha\, T_y, \\ C_{x'y'} &= \sin\alpha\cos\alpha\,(T_x - T_y). \end{aligned} \tag{13}$$

Die beiden ersten Formeln finden ihre geometrische Deutung durch die sogen. Trägheitsellipse, welche entsteht, wenn man auf jeder Achse von O aus nach beiden Seiten eine Strecke abträgt, deren Länge der Quadratwurzel aus dem zugehörigen Trägheitsmoment umgekehrt proportional ist. Darnach sind nach Einführung irgendeines Proportionalitätsfaktors λ auf den freien Achsen die Strecken:

$$a' = \frac{\lambda}{\sqrt{T_x}}, \quad b' = \frac{\lambda}{\sqrt{T_y}}$$

und auf der beliebigen Achse x' mit dem Richtungswinkel α die Strecke:

$$\varrho = \frac{\lambda}{\sqrt{T_{x'}}}$$

aufzutragen. Die Umkehrungen ergeben:

$$T_x = \frac{\lambda^2}{a'^2}, \quad T_y = \frac{\lambda^2}{b'^2}, \quad T_{x'} = \frac{\lambda^2}{\varrho^2},$$

womit die erste der drei Gleichungen (13) nach Fortlassen des Faktors λ^2 und Multiplikation mit ϱ^2 die Gestalt annimmt:

$$1 = \frac{(\varrho\cos\alpha)^2}{a'^2} + \frac{(\varrho\sin\alpha)^2}{b'^2} \quad \text{oder:} \quad 1 = \frac{\xi^2}{a'^2} + \frac{\eta^2}{b'^2},$$

wenn $\xi = \varrho\cos\alpha$, $\eta = \varrho\sin\alpha$ gesetzt wird. Es sind ξ und η die Koordinaten des Endpunktes der auf der x'-Achse nach obiger Festsetzung aufzutragenden Strecke ϱ. Dieser Endpunkt beschreibt also bei der Drehung der x'-Achse eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, die sogen. Trägheitsellipse.

Ist $a = b$, also auch $T_x = T_y$, so wird aus der Ellipse ein Kreis. Alle Trägheitsmomente, bezogen auf irgendwelche Schwerpunktsachsen werden einander gleich; jede Schwerpunktsachse ist eine Hauptträgheitsachse (und alle Zentrifugalmomente verschwinden).

Schließlich sei noch die einfache Beziehung zwischen polaren und achsialen Trägheitsmomenten entwickelt. Es sind die beiden achsialen Momente für die x-Achse und die y-Achse:

$$T_x = \int y^2 df, \quad T_y = \int x^2 df.$$

Dagegen ist das polare Moment bezogen auf den Punkt O:

$$T_0 = \int r^2 df.$$

also gemäß der Gleichung $r^2 = x^2 + y^2$

$$T_0 = \int (x^2 + y^2)\, df = \int x^2 df + \int y^2 df,$$

d. h.

$$T_0 = T_x + T_y,$$

d. h. jedes polare Trägheitsmoment ist gleich der Summe zweier achsialer Trägheitsmomente, bezogen auf zwei zueinander senkrechte, durch den Pol gehende Achsen. Ist im besonderen: $T_x = T_y$, so folgt:

$$T_0 = 2\,T_x = 2\,T_y; \quad T_x = T_y = \frac{T_0}{2}.$$

In der Tat war in [256] gefunden worden für den Kreis, bezogen auf den Mittelpunkt als Pol und auf einen Durchmesser:

$$T_0 = \frac{\pi r^4}{2}, \quad T_x = \frac{\pi r^4}{4},$$

also das erstere doppelt so groß wie das letztere.

Entsprechende Formeln lassen sich entwickeln für statische Momente und Trägheitsmomente räumlich ausgedehnter Körper bezogen auf Punkte, Gerade und Ebenen. Sie sind selbstverständlich viel reichhaltiger, sonst aber von derselben Art. Die Dynamik starrer Körper macht von ihnen seit Euler immerfort Gebrauch

267. Ist ein Doppelintegral:

$$J = \iint z\, df = \iint F(x, y)\, df \tag{1}$$

wirklich auszuwerten, so entscheide man sich zu allererst, wie das Integrationsgebiet f in unendlich kleine Teile geteilt werden solle. Am nächsten liegt, Parallelen zur x-Achse und Parallelen zur y-Achse zu ziehen und so f in unendlich viele Rechtecke zu zerlegen, d. h.

$$df = dx \cdot dy \tag{2}$$

zu setzen. Es wird dann:

$$J = \iint z\, df = \iint z\, dx\, dy = \iint F(x, y)\, dx\, dy. \tag{3}$$

Selbstverständlich sind nur solche Rechtecke $dx\,dy$ zu nehmen, welche innerhalb von f liegen. Freilich sind an der Grenzlinie l auch Rechtecke gelegen, welche sich teils innerhalb, teils außerhalb von f befinden; aber der Bestandteil, den sie zum Doppelintegral geben, verschwindet offenbar beim Übergang zum limes, d. h. bei wirklicher Integration.

Die $dx\,dy$ bilden keine einfache Reihe, doch können sie in Reihen von Reihen geordnet werden. Man setze zunächst y und dy als gegeben an, dann bilden die $dx\,dy$ einen unendlich schmalen Streifen AB von der Breite dy, der von $x = x_0$ bis $x = x_1$ sich ausdehnt. Und die zugehörigen Elemente des Integrals J bilden eine unendlich dünne Scheibe von der Dicke dy und der Oberfläche:

$$O = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y)\, dx, \qquad (4)$$

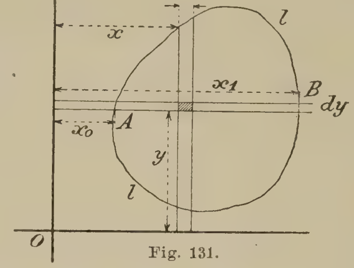


Fig. 131.

welche also durch ein einfaches Integral bestimmt wird, in welchem $F(x, y)$ der Integrand und x die Integrationsveränderliche ist, während y wie ein gegebener konstanter Parameter betrachtet werden soll. Nach Ausführung dieser „ersten" Integration wird O eine Funktion von y und zwar, wohlbemerkt, aus zwei ganz verschiedenen Gründen. Einmal, weil y von vornherein im Integrand vorkommt, und das zweitemal, weil x_0 und x_1 (im allgemeinen) von y abhängen. Es werde also gesetzt:

$$O = O(y) \qquad (5)$$

um O als Funktion von y anzudeuten.

Nunmehr sind die Scheiben $O(y)dy$ selbst wieder zu integrieren.

$$J = \int O(y)dy, \qquad (6)$$

und hier hat man nach vollbrachter (unbestimmter) Integration die äußersten Werte für y als Grenzen einzusetzen. Dann erst ist die Auswertung des Doppelintegrales vollendet.

Man integriere also erst „nach" x, was durch die Formel:

$$J = \iint F(x, y)\, dx\, dy = \int \Big[\int_{x_0}^{x_1} F(x, y)\, dx\Big] dy \qquad (7)$$

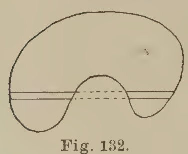
angedeutet sein mag, setze nach dieser ersten Integration für x die Grenzen x_0 und x_1 ein, welche im allgemeinen von y abhängen; integriere dann „nach" y und setze die äußersten Werte von y als Grenzen ein.

Das also ist es! Man integriert zweimal aber beide Male einfach.

Statt erst nach x und dann nach y kann man auch erst nach y und dann nach x integrieren. Das Endergebnis ist dasselbe und insofern kommt es auf die Reihenfolge des Integrierens nicht an. Doch können sehr wohl in der einen Reihenfolge die Integrationen leicht und glatt vonstatten gehen, während vielleicht in der anderen

Reihenfolge Schwierigkeiten auftreten, wie sich mehrfach herausgestellt hat. Oft aber ist auch in dieser Hinsicht die Reihenfolge gleichgültig.

Noch ist zu erwähnen, daß, falls die Grenzlinie Einbuchtungen besitzt (Fig. 132) oder mehrere Grenzlinien vorhanden sind, also f mehrfach zusammenhängt, bei der ersten Integration statt eines Streifens deren mehrere auftreten können, worauf man gegebenen falls natürlich ganz gehörig acht geben muß.


Fig. 132.

268. Erstes Beispiel. Der Integrand sei:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

(Gleichung eines elliptischen Paraboloids). f sei ein Rechteck, Seiten $= 2a$ und $= 2b$ parallel zur x-Achse und zur y-Achse. Mittelpunkt $M(\alpha, \beta)$.

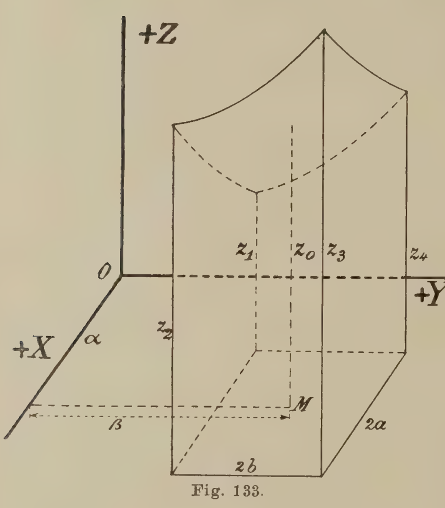


Fig. 133.

Der wirklichen Integration gehe eine Schätzung voran. Nach dem Mittelwertsatz ist:

$$J = f \cdot z_m = 4abz_m.$$

z_m soll ein Mittelwert aller z sein. In Ermangelung seiner genauen Kenntnis wird man zunächst statt z_m das z für die Mitte M des Rechtecks nehmen, also:

$$z_0 = \frac{\alpha^2}{2p} + \frac{\beta^2}{2q}.$$

Doch ist dieses z_0 sicherlich zu klein, wie sich aus der Krümmung des elliptischen Paraboloids nach oben ergibt. Also:

$$J > fz_0; \quad J > 4ab\left(\frac{\alpha^2}{2p} + \frac{\beta^2}{2q}\right). \tag{1}$$

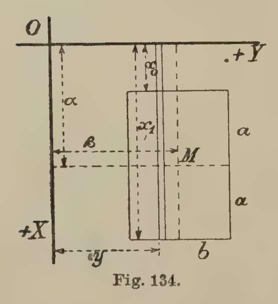


Fig. 134.

Andererseits ist z_m offenbar aus demselben Grunde kleiner als das arithmetische Mittel der vier den Endpunkten des Rechtecks entsprechenden Werten von z, nämlich:

$$z_1 = \frac{(\alpha + a)^2}{2p} + \frac{(\beta + b)^2}{2q}, \quad z_2 = \frac{(\alpha - a)^2}{2p} + \frac{(\beta + b)^2}{2q},$$

$$z_3 = \frac{(\alpha + a)^2}{2p} + \frac{(\beta - b)^2}{2q}, \quad z_4 = \frac{(\alpha - a)^2}{2p} + \frac{(\beta - b)^2}{2q}.$$

Das arithmetische Mittel dieser Werte ist:

$$z_5 = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} = \frac{\alpha^2}{2p} + \frac{\beta^2}{2q} + \frac{a^2}{2p} + \frac{b^2}{2q},$$

mithin:

$$J < f\, z_5; \quad J < 4ab\left[\left(\frac{\alpha^2}{2p} + \frac{\beta^2}{2q}\right) + \left(\frac{a^2}{2p} + \frac{b^2}{2q}\right)\right]. \tag{2}$$

So ist J in zwei Grenzen eingeschlossen ohne Integration. Um aber seinen Wert mathematisch genau zu berechnen, bleibt nichts übrig, als zu integrieren. Also „erst nach x“:

$$J = \int\left[\int\left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dx\right] dy = \int \Big|_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x^3}{6p} + \frac{y^2 x}{2q}\right) dy.$$

x_0 und x_1 sind konstant, nämlich: $x_0 = \alpha - a$, $x_1 = \alpha + a$.

$$J = \int\left(\frac{(\alpha + a)^3 - (\alpha - a)^3}{6p} + y^2\,\frac{(\alpha + a) - (\alpha - a)}{2q}\right) dy$$

$$= \int\left(\frac{6\alpha^2 a + 2a^3}{6p} + \frac{2y^2 a}{2q}\right) dy.$$

Nun integriere man „nach“ y. Es folgt:

$$J = \Big|_{y_0}^{y_1} \frac{6\alpha^2 a + 2a^3}{6p}\, y + \frac{2y^3 a}{6q}.$$

Hier ist: $y_0 = \beta - b$, $y_1 = \beta + b$, daher:

$$J = \frac{6\alpha^2 a + 2a^3}{6p}((\beta + b) - (\beta - b)) + \frac{2a}{6q}((\beta + b)^3 - (\beta - b)^3)$$

$$= \frac{6\alpha^2 a + 2a^3}{6p}\, 2b + \frac{2a}{6q}(6\beta^2 b + 2b^3)$$

$$= 4ab\left[\left(\frac{\alpha^2}{2p} + \frac{\beta^2}{2q}\right) + \left(\frac{a^2}{6p} + \frac{b^2}{6q}\right)\right]. \tag{3}$$

Man sieht, der wahre Wert von J liegt in der Tat zwischen den beiden in (1) und (2) angegebenen Werten, wie es sein muß.

Zweites Beispiel. Dieselbe Aufgabe, nur soll f eine Ellipse mit den Halbachsen a und b sein (Fig. 135). Man integriere „erst nach x“.

$$J = \iint\left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dx\, dy = \int\left[\int\left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dx\right] dy$$

$$= \int \Big|_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x^3}{6p} + \frac{y^2 x}{2q}\right) dy.$$

Die Grenzen x_0 und x_1 sind nicht konstant, sondern:

$$x_0 = \alpha - \xi, \quad x_1 = \alpha + \xi.$$

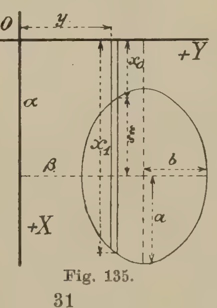


Fig. 135.

Man erhält wie vorhin:

$$J = \int \left(\frac{6\alpha^2 \xi + 2\xi^3}{6p} + \frac{2y^2 \xi}{2q} \right) dy.$$

Doch muß noch ξ berechnet werden. Es ist:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1; \qquad \eta = y - \beta, \quad \xi = \left| \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (y-\beta)^2} \right.$$

(ξ wurde stillschweigend als positiv vorausgesetzt). Mithin:

$$J = \int \left(\frac{6\alpha^2 \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (y-\beta)^2} + 2 \frac{a^3}{b^3} \sqrt{b^2 - (y-\beta)^2}^3}{6p} + \frac{2y^2 \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (y-\beta)^2}}{2q} \right) dy.$$

Die zweite Integration ist wegen der jetzt auftretenden Wurzel, welche durch Einsetzen der Grenzen für x hineingekommen ist, lange nicht so einfach wie im vorigen Beispiel. Aber sie läßt sich durchführen, wenn man integrieren kann (vgl. § 36). Zunächst eine kleine Vereinfachung: Man setze:

$$y - \beta = bu, \quad y = \beta + bu, \quad u = \frac{y - \beta}{b}, \quad dy = b\,du.$$

$$\sqrt{b^2 - (y-\beta)^2} = b\sqrt{1 - u^2}.$$

Die Grenzen für y sind $\beta - b$ und $\beta + b$, also sind die Grenzen für u: -1 und $+1$, folglich:

$$J = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{6\alpha^2 a \sqrt{1-u^2} + 2a^3 \sqrt{1-u^2}^3}{6p} + \frac{2(\beta + bu)^2 a \sqrt{1-u^2}}{2q} \right) b\,du$$

oder nach Zerlegung von $\sqrt{1-u^2}^3$ in $(1-u^2)\sqrt{1-u^2}$

$$J = ab\left[\left(\frac{6\alpha^2 + 2a^2}{6p} + \frac{2\beta^2}{2q} \right) \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2}\, du + \frac{4\beta b}{2q} \int_{-1}^{+1} u\,du \sqrt{1-u^2} + \left(-\frac{2a^2}{6p} + \frac{2b^2}{2q} \right) \int_{-1}^{+1} u^2\,du \sqrt{1-u^2} \right].$$

Es sind also noch drei Integrale zu lösen. Das erste wird nach der Rekursionsformel [284 4] behandelt:

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2}\, du = \left| \frac{u\sqrt{1-u^2}}{2} \right._{-1}^{+1} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \Big|_{-1}^{+1} \left(\frac{u\sqrt{1-u^2}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc}(\sin = u) + C \right)$$

$$= 0 + \tfrac{1}{2} \operatorname{arc}(\sin = 1) - 0 - \tfrac{1}{2} \operatorname{arc}(\sin = -1) = \frac{\pi}{2}.$$

Das zweite ist

$$\int_{-1}^{+1} u\,du\sqrt{1-u^2} = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-u^2}\cdot d(1-u^2) = -\left|\frac{\sqrt{1-u^2}^3}{3}\right|_{-1}^{+1} = 0.$$

Im dritten Integral wird zunächst der Integrand umgeformt in:

$$(u^2-1+1)\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-u^2} - \sqrt{1-u^2}^3$$

und dann abermals die Rekursionsformel [284 4] angewendet:

$$\int_{-1}^{+1} u^2 du\sqrt{1-u^2} = \int_{-1}^{+1} du\sqrt{1-u^2} - \int_{-1}^{+1} du\sqrt{1-u^2}^3$$

$$= \int_{-1}^{+1} du\sqrt{1-u^2} - \left|\frac{u\sqrt{1-u^2}^3}{4}\right|_{-1}^{+1} - \frac{3}{4}\int_{-1}^{+1} du\sqrt{1-u^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{8}.$$

Daher endlich:

$$J = ab\left[\left(\frac{6\alpha^2+2a^2}{6p}+\frac{2\beta^2}{2q}\right)\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{2a^2}{6p}+\frac{2b^2}{2q}\right)\frac{\pi}{8}\right]$$

$$= \pi ab\left[\left(\frac{\alpha^2}{2p}+\frac{\beta^2}{2q}\right)+\left(\frac{a^2}{8p}+\frac{b^2}{8q}\right)\right]. \tag{4}$$

Diese Formel entspricht durchaus der Formel (3) im ersten Beispiel. An Stelle von $4ab$, d. h. der Fläche des Rechteckes, steht πab, d. h. die Fläche der Ellipse. Das erste Glied der eckigen Klammer ist bei beiden dasselbe und nur im zweiten Glied der eckigen Klammer steht einmal 6, das andere mal 8 in den Nennern.

269. Transformation von Doppelintegralen. Die Zerlegung des Integrationsgebietes f in Elemente kann aber auch anders geschehen, als durch Parallelen zur x-Achse und zur y-Achse. Man ersetze etwa die erste Schar Parallelen durch irgend eine Kurvenschar und bezeichne den Parameter dieser Schar mit u. Desgleichen ersetze man die zweite Schar Parallelen durch eine andere Kurvenschar und bezeichne den Parameter mit v. Dabei wird aber vorausgesetzt, erstens, daß durch jeden Punkt P von f eine und nur eine Kurve u und ebenso eine und nur eine Kurve v geht und zweitens, daß sich beide Kurven in P auch wirklich schneiden (nicht etwa berühren).

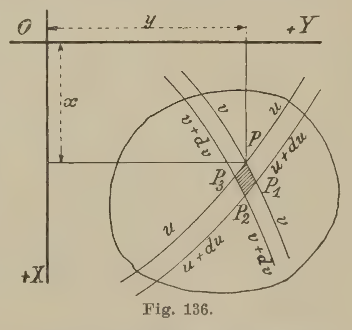


Fig. 136.

Alsdann wird f durch die Scharen u und v augenscheinlich auch in Elemente df zerlegt, in Vierecke $PP_1P_2P_3$. Was u und v geometrisch bedeuten ist dabei ganz gleichgültig, es genügt, daß P durch

u und v eindeutig bestimmt wird, daß man u und v, wie man sagt, als „krummlinige“ Koordinaten von P betrachten darf. In diesem Sinne sind die vier Ecken

$$P(u, v) \quad P_3(u, v+dv) \quad P_1(u+du, v) \quad P_2(u+du, v+dv). \tag{1}$$

Andererseits wird jeder Punkt auch durch seine rechtwinkligen Koordinaten x und y bestimmt. Folglich muß es möglich sein, x und y durch u und v auszudrücken oder umgekehrt. Es sei also:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \tag{2}$$

wo φ und ψ zwei gegebene Funktionen von u und v bezeichnen.

Die totale Differentiation ergibt:

$$dx_2 = \varphi_u' du + \varphi_v' dv, \quad dy_2 = \psi_u' du + \psi_v' dv. \tag{3}$$

Dies gilt bei dem Übergang von P auf P_2, was der Index 2 anzeigen soll. Will man von P auf P_3 oder auf P_1 übergehen, so hat man du oder dv gleich 0 zu setzen, d. h. es ist:

$$\left.\begin{aligned} dx_3 &= \varphi_v' dv, \quad dy_3 = \psi_v' dv \\ dx_1 &= \varphi_u' du, \quad dy_1 = \psi_u' du \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und die vier Punkte sind in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\begin{gathered} P(x, y), \quad P_1(x_1 = x + dx_1, y_1 = y + dy_1), \\ P_2(x_2 = x + dx_2, y_2 = y + dy_2), \quad P_3(x_3 = x + dx_3, y_3 = y + dy_3) \end{gathered} \tag{5}$$

Die Mitte von P und P_2 und die Mitte von P_1 und P_3 haben bekanntlich die Koordinaten:

$$\frac{x + x_2}{2}, \quad \frac{y + y_2}{2} \text{ bzw. } \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad \frac{y_1 + y_3}{2}.$$

Beide Wertepaare werden identisch, wenn man die obigen Formeln einsetzt, d. h. das unendlich kleine Flächenelement ist ein Parallelogramm. Daher:

$$\begin{aligned} df &= \text{Parallelogramm } PP_1P_2P_3 = 2\triangle PP_1P_3 \\ &= \pm[(x_3 - x)(y_1 - y) - (y_3 - y)(x_1 - x)] \\ &= \pm(dx_3 \cdot dy_1 - dy_3 \cdot dx_1), \text{ oder nach (4)} \\ df &= \pm du \cdot dv \cdot (\varphi_u' \cdot \psi_v' - \psi_u' \cdot \varphi_v'). \end{aligned} \tag{6}$$

Dies ist der Ausdruck des Flächenelementes. Den Faktor:

$$\varphi_u' \cdot \psi_v' - \psi_u' \cdot \varphi_v' = \begin{vmatrix} \varphi_u', & \varphi_v' \\ \psi_u', & \psi_v' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}, & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{7}$$

nennt man (nach Jacobi) die „Funktionaldeterminante“ der beiden Funktionen φ und ψ. Das Vorzeichen ist so zu wählen, daß df positiv wird. Das Integral

$$J = \iint F(x, y)\, dx\, dy \tag{8}$$

nimmt daher durch die Substitution (2) die Gestalt an:

$$J = \iint F(\varphi(u, v),\ \psi(u, v)) \cdot (\varphi_u' \cdot \psi_v' - \psi_u' \cdot \varphi_v') \cdot du \cdot dv. \tag{9}$$

Diese Formel ist die Erweiterung von (12) in Tafel I [250] auf Doppelintegrale. Selbstverständlich müssen bei der Vornahme der Integrationen auch die Grenzen entsprechend transformiert werden, und gerade dieser Umstand bedingt häufig den Erfolg, da, wie das zweite Beispiel in [268] gezeigt hat, die zweite Integration gar sehr durch die Beschaffenheit der Grenzen bedingt wird. Man wird die Transformation in der Regel dem Integrationsgebiet so anzupassen suchen, daß die neuen Grenzen möglichst einfach, womöglich konstant werden.

Beispiel (Fig. 137). Man gehe zu Polarkoordinaten über, d. h. setze $u = \varrho$, $v = \varphi$, also:

$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi.$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varrho} = \sin\varphi; \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\varrho \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \varrho \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \varrho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \varrho,$$

also nach (6)

$$df = \varrho\, d\varrho\, d\varphi,$$

was auch unmittelbar aus der Figur 137 ersichtlich ist, denn df ist ein unendlich kleines Rechteck, dessen eine Seite $PP_1 = d\varrho$ und dessen andere Seite $PP_3 = \varrho\, d\varphi$ ist.

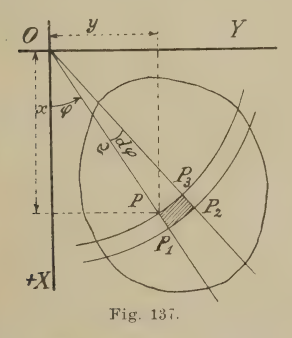


Fig. 137.

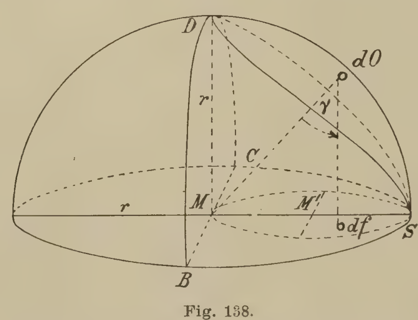


Fig. 138.

270. Zwei Beispiele zur Erläuterung der Transformation von Doppelintegralen.

Erstes Beispiel. Man berechne das Volumen V und den von der Kugel ausgeschnittenen Teil O der Oberfläche des sog. Vivianischen Körpers, welcher entsteht, wenn über einem Radius der Grundfläche einer Halbkugel als Durchmesser ein Kreis gezeichnet und dieser zur

Grundfläche eines senkrechten Zylinders gemacht wird. Der Teil des Zylinders, welcher begrenzt wird von dem Grundkreis mit dem Radius $\frac{r}{2}$ und von dem Teil der Halbkugel innerhalb des Zylinders, ist der Vivianische Körper. Es ist:

$$V = \iint z\,df = \iint \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,df, \tag{1}$$

denn die Gleichung der Kugel ist:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad \text{oder} \quad z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}. \tag{2}$$

Bleibt man bei rechtwinkligen Koordinaten, so ist zwar die erste Integration nach § 36 nicht allzuschwer; aber die zweite würde sehr erhebliche Schwierigkeiten bieten. Es liegt der Versuch nahe, Polarkoordinaten zu nehmen, doch stehen zwei Punkte zur engeren Wahl, nämlich M, der Mittelpunkt des großen Kreises, und M', der Mittelpunkt des kleinen Kreises. Der Erfolg heftet sich an die Wahl des ersteren, wie sich zeigen wird. Man setze also:

$$x = \varrho\cos\varphi,\ y = \varrho\sin\varphi,\ z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{r^2 - \varrho^2};\ df = \varrho\,d\varrho\,d\varphi. \tag{3}$$

$$V = \iint \sqrt{r^2 - \varrho^2} \cdot \varrho\,d\varrho\,d\varphi. \tag{4}$$

Nun steht man abermals vor einer Wahl. Soll man erst nach ϱ oder erst nach φ integrieren. Der Erfolg entscheidet (wegen der Einfachheit der Grenzen) für ϱ. Man setze also zunächst φ und $d\varphi$ konstant, also daß die erste Integration einen keilförmigen Körper ergibt. Es wird:

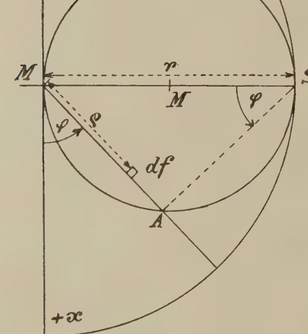


Fig. 139.

$$V = -\tfrac{1}{2}\iint \sqrt{r^2 - \varrho^2} \cdot d(r^2 - \varrho^2)\,d\varphi$$

$$= -\tfrac{1}{3}\int \Big|_{\varrho_0}^{\varrho_1} \sqrt{r^2 - \varrho^2}^{\,3} \cdot d\varphi.$$

Die untere Grenze für ϱ ist: $\varrho_0 = 0$, die obere Grenze für ϱ ist: $\varrho_1 = MA = r\sin\varphi$, also

$$V = -\tfrac{1}{3}\int [\sqrt{r^2 - r^2\sin^2\varphi}^{\,3} - r^3]\,d\varphi, \text{ oder da:}$$

$$\sqrt{r^2 - r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{r^2(1 - \sin^2\varphi)} = r\cos\varphi \tag{5}$$

ist, nach Absonderung von r^3:

$$V = +\frac{r^3}{3}\int (1 - \cos^3\varphi)\,d\varphi. \tag{6}$$

Die Grenzen für φ sind augenscheinlich $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$.

$$\int_0^{\pi} d\varphi = \pi \qquad \int_0^{\pi} \cos^3\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0.$$

(Letzteres, weil $\cos^3\varphi$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ positiv und von $\frac{\pi}{2}$ bis π negativ ist, während die absoluten Werte in umgekehrter Folge wiederkehren.) Daher:

$$V = \frac{\pi r^3}{3}.$$

Diese Formel ist falsch! Denn auf der rechten Seite steht das Volumen der Viertelkugel, welche offenbar größer ist als V, da der Vivianische Körper gänzlich innerhalb der Viertelkugel Fig. 138 rechts liegt. Doch wo steckt der Fehler?

Er steckt in (5) und schleicht sich leicht bei Ausdrücken ein, in welchen Wurzeln vorkommen. Offenbar sollte z nach stillschweigender Voraussetzung positiv sein, also auch:

$$\sqrt{r^2 - \varrho_1^2} = \sqrt{r^2(1 - \sin^2\varphi)} = \sqrt{r^2 \cos^2\varphi}.$$

Man hat also statt (5) zunächst zu setzen nicht:

$$\sqrt{r^2 \cos^2\varphi} = r\cos\varphi, \text{ sondern: } \sqrt{r^2\cos^2\varphi} = +\,|r\cdot\cos\varphi|$$

φ geht von 0 bis π. Von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ ist $\cos\varphi$ positiv, also:

$$\sqrt{r^2\cos^2\varphi} = +\,r\cos\varphi = r\cos\varphi, \tag{5a}$$

wie in (5) steht. Dagegen von $\frac{\pi}{2}$ bis π ist $\cos\varphi$ negativ, also:

$$\sqrt{r^2\cos^2\varphi} = -\,r\cos\varphi. \tag{5b}$$

Statt (6) muß es daher richtig heißen:

$$V = \frac{r^3}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\varphi)\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos^3\varphi)\right]d\varphi \tag{7}$$

$$= \frac{r^3}{3}\left[\int_0^{\pi} d\varphi - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\, d\varphi\right], \text{ oder nach [291 4]}$$

$$V = \frac{r^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right). \tag{8}$$

Und diese Formel ist richtig!

Übrigens hätte man wegen der Symmetrie von vornherein nur von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu integrieren und dann mit 2 zu multiplizieren brauchen. Es würde sich dann sofort ebenfalls richtig ergeben haben

$$V = \frac{2r^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos^3\varphi)\,d\varphi = \frac{r^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

Um O zu bestimmen, wende man den Satz an, daß die Projektion einer ebenen Fläche gleich dem Produkt aus ihr und dem Kosinus des Neigungswinkels γ ist. Also:

$$df = dO \cdot \cos\gamma, \quad dO = \frac{df}{\cos\gamma}. \tag{9}$$

Im vorliegenden Falle ist γ sehr einfach zu haben, denn der Winkel zwischen zwei Ebenen ist = dem Winkel zwischen den beiden Loten. Das eine Lot ist der Radius r, das andere ist z, folglich $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ und

$$O = \iint \frac{df}{\cos\gamma} = \iint \frac{r\,df}{z} \tag{10}$$

oder, wenn wie vorhin ϱ und φ eingeführt werden und erst nach ϱ integriert wird:

$$O = r\iint \frac{\varrho\, d\varrho\, d\varphi}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}} = -\frac{r}{2}\iint \frac{d(r^2 - \varrho^2)}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}\,d\varphi$$

$$= -r\int \Big|_{\varrho_0}^{\varrho_1} \sqrt{(r^2 - \varrho^2)}\,d\varphi, \tag{11}$$

also nach Einsetzen der Grenzen wie vorhin:

$$O = +r^2\int_0^{\pi}(1 \mp \cos\varphi)\,d\varphi, \tag{12}$$

wo das — Zeichen von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und das + Zeichen von $\frac{\pi}{2}$ bis π gilt. Oder auch

$$O = 2r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos\varphi)\,d\varphi \tag{13}$$

$$O = 2r^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} (\varphi - \sin\varphi) = r^2(\pi - 2). \tag{14}$$

Zweites Beispiel. Dieselbe Aufgabe wie die zweite in [268].

Das Integrationsgebiet f ist eine Ellipse. Für die Grenzen soll daher sein:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn:

$$\frac{x-\alpha}{a}=\cos\varphi,\quad \frac{y-\beta}{b}=\sin\varphi \tag{2}$$

gesetzt wird. Liegt der Punkt aber innerhalb der Ellipse, so kann gesetzt werden

$$\frac{x-\alpha}{a}=\lambda\cos\varphi,\quad \frac{y-\beta}{b}=\lambda\sin\varphi, \tag{3}$$

wo λ ein positiver echter Bruch ist. Läßt man umgekehrt λ alle Werte von 0 bis 1 und φ alle Werte von 0 bis 2π durchlaufan, so ergeben die Formeln (3) oder

$$x=\alpha+a\lambda\cos\varphi;\; y=\beta+b\lambda\sin\varphi \tag{4}$$

alle Punkte auf und innerhalb der Ellipse, jeden nur einmal. Die Funktionaldeterminante ist hier:

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial y}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}=ab\lambda;\text{ daher:} \tag{5}$$

$$V=\int\!\!\int z\,df=\int\!\!\int\left(\frac{(\alpha+a\lambda\cos\varphi)^2}{2p}+\frac{(\beta+b\lambda\sin\varphi)^2}{2q}\right)ab\lambda\,d\lambda\cdot d\varphi$$

$$=ab\int\!\!\int\left[\left(\frac{\alpha^2}{2p}+\frac{\beta^2}{2q}\right)\lambda+\left(\frac{2\alpha a\cos\varphi}{2p}+\frac{2\beta b\sin\varphi}{2q}\right)\lambda^2+\left(\frac{a^2\cos^2\varphi}{2p}+\frac{b^2\sin^2\varphi}{2q}\right)\lambda^3\right]d\lambda\,d\varphi.$$

Die Integration nach λ ist spielend leicht. Die Grenzen für λ sind 0 und 1. Daher sofort:

$$V=ab\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\alpha^2}{2p}+\frac{\beta^2}{2q}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{2\alpha a\cos\varphi}{2p}+\frac{2\beta b\sin\varphi}{2q}\right)\frac{1}{3}+\left(\frac{a^2\cos^2\varphi}{2p}+\frac{b^2\sin^2\varphi}{2q}\right)\frac{1}{4}\right]\cdot d\varphi.$$

Nun ist: [291]:

$$\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi,\quad \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi=0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi,$$

also nach Absonderung des Faktors π, ganz wie in [268 4]

$$V=ab\pi\left[\frac{\alpha^2}{2p}+\frac{\beta^2}{2q}+\frac{a^2}{8p}+\frac{b^2}{8q}\right]. \tag{6}$$

271. Selbstverständlich läßt sich die Theorie der mehrfachen Integrale mannigfach erweitern, doch für die Elemente der Integralrechnung reicht das Bisherige völlig aus.

Nur eine sehr feine Anwendung der Doppelintegrale sei noch an einem Beispiel erläutert, weil sie wieder einmal zeigt, wie die Mathematik zuweilen durch anscheinend aus der Luft gegriffene, aber in Wirklichkeit nach tiefem Nachdenken als zweckmäßig erkannte Umkehrungen zum Ziele kommt. Daß der Bruch $(ac):(bc)$ durch Heben des gemeinsamen Faktors c im Zähler und Nenner in den Bruch $a:b$ verwandelt wird, ist von vornherein begreiflich, natürlich und gerechtfertigt, denn es dient der Vereinfachung. Wenn aber umgekehrt ein Bruch $a:b$ durch Erweiterung mit einer Zahl c in den Bruch $(a \cdot c):(b \cdot c)$ verwandelt wird, so müssen besondere Gründe vorhanden sein, wie in dem Falle des Bruches $1:(\sqrt{2}-1)$, der sich nach Erweiterung mit $\sqrt{2}+1$ in:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1,$$

also in einen einfacheren Ausdruck verwandelt. So ungefähr auch: Daß ein Doppelintegral durch eine Integration zunächst in ein einfaches Integral verwandelt wird, ist von vornherein begreiflich und natürlich. Und doch hat man nicht selten und auf recht verschiedene Arten das Umgekehrte mit Erfolg getan, d. h. ein einfaches Integral auf ein Doppelintegral zurückgeführt, um durch Berechnung des letzteren auch das erstere zu erhalten. Als Beispiel sei das bestimmte Integral:

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{1}$$

betrachtet, welches in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine sehr große Rolle spielt. Mit Hilfe des zugehörigen unbestimmten Integrals durch Einsetzen der Grenzen den Wert zu bestimmen, geht nicht an, weil in geschlossener Form unbestimmt überhaupt nicht integriert werden kann. Wohl aber zeigt die Theorie der Doppelintegrale folgende überraschende Lösung. Man schreibe statt (1) auch:

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy,$$

so daß nur x durch y ersetzt ist und multipliziere. Es ergibt sich:

$$w^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy, \text{ oder:} \tag{2}$$

$$w^2 = \int\int e^{-x^2} e^{-y^2} dx\,dy = \int\int e^{-(x^2+y^2)} df.$$

Damit ist das Quadrat des einfachen Integrals in ein Doppelintegral verwandelt, dessen Integrationsgebiet aus der ganzen unendlichen Ebene besteht, da x und y beide von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen sollen. Man transformiere in Polarkoordinaten

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = \varrho^2, \quad df = \varrho d\varrho d\varphi,$$

$$w^2 = \iint e^{-\varrho^2} \cdot \varrho d\varrho d\varphi.$$

Die Grenzen für ϱ sind 0 und $+\infty$, die Grenzen für φ sind 0 und 2π, also:

$$w^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho; \text{ nun ist:}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho = -\tfrac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{(-\varrho^2)} \cdot d(-\varrho^2) = \Big|_0^{+\infty} -\tfrac{1}{2} e^{-\varrho^2}$$

$$= -\tfrac{1}{2} e^{-\infty} + \tfrac{1}{2} e^0 = 0 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}, \text{ also}$$

$$w^2 = 2\pi \cdot \tfrac{1}{2} = \pi, \quad w = +\sqrt{\pi}, \text{ d. h.}$$

$$w = \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{3}$$

Übungen zu § 34.

1. Es soll durch zweifache Integration die Formel für den sphärischen Exzeß abgeleitet werden.

$$J = \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

wo J den Inhalt eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ (als arcus) bezeichnet (Kugelradius $= 1$). Durch die erste Integration ist der Satz zu beweisen, wenn ein Winkel unendlich klein wird, worauf die zweite Integration seine allgemeine Geltung ergibt.

2. Gegeben eine Halbkugel, Radius $= r$ und ein Zylinder mit quadratischem Querschnitt, Seite des Quadrates $= a$, dessen Kanten senkrecht auf der Grundfläche der Halbkugel stehen und dessen Mittellinie mit dem zu dieser Grundfläche senkrechten Radius zusammenfällt. Gesucht Rauminhalt des Zylinders, begrenzt von der Grundfläche und Oberfläche der Kugel innerhalb des Zylinders sowie Flächeninhalt dieses Teiles der Oberfläche.

Achter Abschnitt.

Methodische Integration gegebener Funktionen.

§ 35. Integration rationaler algebraischer Funktionen.

272. Wie wiederholt bemerkt, lassen sich durchaus nicht alle Funktionen auf elementare Weise integrieren. Auch ist ja in § 33 gezeigt worden, wie man sich in solchen Fällen auf die eine oder andere Art helfen kann. Trotzdem ist und bleibt in den meisten Fällen das unbestimmte Integrieren mit nachfolgendem Einsetzen der Grenzen die kürzeste und einfachste Lösung, wenn sie überhaupt möglich ist. Und deshalb soll dieser Abschnitt sich mit der systematischen Integration gegebener Funktionen befassen, allerdings durchaus nicht voll erschöpfend, sondern in der Beschränkung auch die einfachsten und für die Anwendungen wichtigsten Fälle.

Dieser Paragraph wird einen solchen Fall mit größter Vollständigkeit behandeln, daß auch nicht die kleinste Möglichkeit eines Restes bleibt, nämlich den, daß der Integrand eine rationale algebraische Funktion:

$$R(x) \tag{1}$$

ist (Bezeichnung siehe § 8). Es sei also ein Integral von der Form:

$$J = \int R(x)\,dx \tag{2}$$

vorgelegt und die Aufgabe gestellt, die unbestimmte Integration in geschlossener Form, also nicht durch unendliche Reihen usw. auszuführen.

Die Untersuchung zerfällt in drei Teile. Der erste ist rein algebraisch [273] und [274]. Der zweite behandelt die Integration [275]. Der dritte befaßt sich mit Vereinfachung der Koeffizientenbestimmungen [276] und [277].

273. Jede rationale Funktion ist der Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen:

$$R(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \tag{1}$$

oder kann wenigstens in diese Form gebracht werden. Es sei $f(x)$ vom Grade m, $\varphi(x)$ vom Grade n, also:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots + Kx^m, \tag{2}$$

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + lx^n, \tag{3}$$

und die Koeffizienten $A, B, C \ldots, a, b, c \ldots$ mögen beliebig gegeben sein. Je nachdem $m < n$ oder $m \geqq n$, d. h. je nachdem der Grad des

Zählers kleiner oder größer (größer einschließlich gleich) als der Grad des Nenners ist, nennt man $R(x)$ echt gebrochen oder unecht gebrochen. Auf diese Unterscheidung bezieht sich der folgende

Lehrsatz: Jede unecht gebrochene rationale Funktion läßt sich zerlegen in eine ganze Funktion (vom Grade $m-n$) und eine echt gebrochene Funktion mit demselben Nenner. Man darf setzen:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = G(x) + \frac{f_1(x)}{\varphi(x)}, \tag{4}$$

$$G(x) = A_1 + B_1 x + \cdots + Q_1 x^{m-n}, \tag{5}$$

$$f_1(x) = A_2 + B_2 x + \cdots + P_2 x^{n-1}. \tag{6}$$

Beweis: Es würde aus (4) folgen:

$$f(x) \equiv G(x) \cdot \varphi(x) + f_1(x). \tag{7}$$

Die linke Seite ist nach (2) eine ganze Funktion vom Grade m. Das Produkt $G(x) \cdot \varphi(x)$ ist von demselben Grade m, da der erste Faktor den Grad $m-n$, der zweite den Grad n besitzt. Da $f_1(x)$ vom niedrigeren, nämlich dem $n-1^{\text{ten}}$ Grade ist, so stimmen zunächst in (7) die Grade links und rechts. Außerdem ist die linke Seite nach steigenden Potenzen von x geordnet. Also müssen, wenn auch die rechte Seite durch Multiplizieren und Zusammenziehen nach steigenden Potenzen von x geordnet wird, die $m+1$ Koeffizienten links mit den $m+1$ Koeffizienten rechts übereinstimmen. Dies gibt $m+1$ Gleichungen ersten Grades zwischen $m+1$ Unbekannten, nämlich den $m-n+1$ Koeffizienten $A_1, B_1 \ldots Q_1$ und den n Koeffizienten $A_2, B_2 \ldots P_2$. Sie wären aufzulösen. Viel schneller jedoch wie folgt:

Man ordne $f(x)$ und $\varphi(x)$ beide nach fallenden Potenzen von x, also umgekehrt wie in (2) und (3) und dividiere darauf in der gewöhnlichen Weise aus, bis der Rest von niedrigerem Grade ist als der Nenner. Dieser Rest ist $f_1(x)$ und der Quotient ist $G(x)$.

Beispiel:

$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 : x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^2 + 8x + 40$$

$$\begin{array}{l}
+x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2 \\
- \quad + \quad - \quad + \\
\hline
\quad 8x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 5x \\
\quad +8x^4 - 48x^3 + 88x^2 - 48x \\
\quad - \quad + \quad - \quad + \\
\hline
\qquad 40x^2 - 78x^2 + 53x + 6 \\
\qquad +40x^3 - 240x^2 + 440x - 240 \\
\qquad - \quad + \quad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad 162x^2 - 387x + 246,
\end{array}$$

also:

$$\frac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = x^2 + 8x + 40 + \frac{162x^2 - 387x + 246}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}.$$

274. Zerlegung eines echten Bruches in echte Partialbrüche. Es sei (nach Absonderung der ganzen Funktion) $m < n$; also, nachdem statt $f_1(x)$ wieder $f(x)$ geschrieben,

$$R(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \tag{1}$$

echt gebrochen. Der Nenner $\varphi(x)$ möge zerlegbar sein:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x) \cdots \tag{2}$$

und die Faktoren $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x) \ldots$ seien ganz und von den Graden $n_1, n_2, n_3 \ldots$, so daß $n_1 + n_2 + n_3 \ldots = n$ sein muß. Außerdem sollen sie relativ prim [76] zueinander sein. Dann gilt der folgende

Lehrsatz: Der echte Bruch $R(x)$ mit dem Nenner $\varphi(x)$ läßt sich zerlegen in echte Brüche mit den Nennern $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x) \ldots$ Es darf gesetzt werden:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} + \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)} + \frac{f_3(x)}{\varphi_3(x)} + \cdots, \tag{3}$$

wo $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x), \ldots$ vom Grade $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, $n_3 - 1 \ldots$ sind.

Beweis. Man multipliziere (3) mit $\varphi(x)$ aus. Es folgt nach (2):

$$f(x) \equiv f_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot \varphi_3(x) \cdots + f_2(x) \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_3(x) \cdots + \cdots \tag{4}$$

Die linke Seite ist (höchstens) vom Grade $n - 1$. Die rechte Seite ist auch von keinem höheren Grade, denn $f_1(x)$ hat (höchstens) den Grad $n_1 - 1$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x) \ldots$ haben den Grad $n_2, n_3 \ldots$, also hat das erste und ebenso die anderen Glieder rechts (höchstens) den Grad:

$$n_1 - 1 + n_2 + n_3 \cdots = n - 1.$$

Da es sich [2] um eine Identität handelt, müssen, wenn die Produkte ausmultipliziert und entsprechende Glieder zusammengezogen werden, die Koeffizienten links und rechts übereinstimmen. Es sind also n Gleichungen zu erfüllen, in denen die Koeffizienten von $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots$ die Unbekannten sind. Die Anzahl derselben ist aber gleichfalls $= n_1 + n_2 + \cdots = n$. Also soviel Gleichungen (ersten Grades) als Unbekannte. Da nun, wie die Algebra zeigt, diese Gleichungen sich weder widersprechen noch voneinander abhängen, so sind hiernach die Koeffizienten von $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots$ in der Tat so bestimmbar, daß (4), also auch (3) zur Identität wird, was zu beweisen war.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra kann $\varphi(x)$ nur auf eine Weise in Faktoren ersten Grades und in nicht mehr zerlegbare Faktoren zweiten Grades zerlegt werden [76]. Da solche Faktoren entweder nur einmal oder mehrere Mal vorkommen können, aber verlangt wird, daß $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \ldots$ relativ prim sein sollten, so bleiben bei der äußersten Zerlegung von $R(x)$ nach dem oben bewiesenen Lehrsatz, da alle Zähler (mindestens) einen Grad niedriger sein sollen als

die zugehörigen Nenner, nur noch folgende vier Arten von Partialbrüchen oder Teilbrüchen übrig:

$$\frac{\alpha}{a+bx}, \tag{5}$$

$$\frac{B+B_1x+B_2x^2+\cdots+B_{p-1}x^{p-1}}{(a+bx)^p} \quad (p>1), \tag{6}$$

$$\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2}, \tag{7}$$

$$\frac{C+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_{2q-1}x^{2q-1}}{(a+bx+cx^2)^q} \quad (q>1). \tag{8}$$

(5) und (7) lassen sich kaum mehr vereinfachen, wohl aber (6) und (8). Für (6) mache man den Ansatz:

$$\frac{B+B_1x+B_2x^2+\cdots+B_{p-1}x^{p-1}}{(a+bx)^p}=\frac{\alpha_1}{a+bx}+\frac{\alpha_2}{(a+bx)^2}+\cdots+\frac{\alpha_p}{(a+bx)^p} \tag{9}$$

und suche $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ so zu bestimmen, daß (9) zu einer Identität wird. Nach Ausmultiplikation mit $(a+bx)^p$ entstehen, wenn rechts die verschiedenen Potenzen von $a+bx$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt und dann entsprechende Glieder zusammengezogen werden, durch Vergleichung p Gleichungen mit den p Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, welche immer auflösbar sind, weil sie, wie die Algebra zeigt, sich weder widersprechen, noch voneinander abhängig sein können. Desgleichen mache man für (8) den Ansatz:

$$\frac{C+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_{2q-1}x^{2q-1}}{(a+bx+cx^2)^q}=\frac{\alpha_1+\beta_1x}{a+bx+cx^2}+\cdots+\frac{\alpha_q+\beta_qx}{(a+bx+cx^2)^q} \tag{10}$$

und führe ihn ebenso durch. Er ergibt diejenigen Gleichungen für $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_q, \beta_q$, aus denen diese Koeffizienten ermittelt werden können.

Faßt man das in dieser Nummer über die Zerlegung in Partialbrüche und in der vorigen Nummer über die Absonderung der ganzen Funktion Beigebrachte zusammen, so ergibt sich:

Lehrsatz: Eine rationale (gebrochene) Funktion $R(x)$ kann stets in Glieder von den folgenden fünf Formen zerlegt werden:

I) $$\alpha x^n,$$

II) $$\frac{\alpha}{a+bx},$$

III) $$\frac{\alpha}{(a+bx)^n} \quad (n>1),$$

IV) $$\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2},$$

V) $$\frac{\alpha+\beta x}{(a+bx+cx^2)^n} \quad (n>1).$$

275. Der erste, rein algebraische Teil ist in seinen Grundzügen erledigt. Der nun folgende zweite Teil hat es mit der Integration der fünf zuletzt zusammengestellten Formen zu tun. Es ist nachzuweisen, daß die beiden Integraltafeln in [250] und [251] zu diesem Vorhaben ausreichen. Also

I) $$\int \alpha x^n dx = \frac{\alpha x^{n+1}}{n+1}$$ [1]

und für $n = 0$

$$\int \alpha x^0 dx = \int \alpha dx = \alpha \int dx = \alpha x.$$

Die zweite und dritte Form erfordern eine kleine Umformung, nach welcher sofort (9) und (7) [251] ergeben:

II) $$\int \frac{\alpha dx}{a+bx} = \frac{\alpha}{b} \int \frac{d(a+bx)}{a+bx} = \frac{\alpha}{b} \ln(a+bx),$$

III) $$\int \frac{\alpha dx}{(a+bx)^n} = \frac{\alpha}{b} \int \frac{d(a+bx)}{(a+bx)^n} = -\frac{\alpha}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}}, \quad (n>1).$$

Schwieriger ist schon die Integration der vierten Form. Man führe die quadratische Ergänzung im Nenner ein uud setze wie in [72 2] zur Abkürzung die „Diskriminante" desselben

$$D = ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 > 0$$

(vgl. [73], Erster Fall). Außerdem werde eingeführt als neue Veränderliche:

$$x + \frac{b}{2c} = z; \; x = z - \frac{b}{2c}, \; dx = dz$$

$$a + bx + cx^2 = \frac{D + c^2z^2}{c}; \; \alpha + \beta x = \alpha - \frac{\beta b}{2c} + \beta z,$$

daher:

$$\int \frac{\alpha + \beta x}{a + bx + cx^2} dx = \left(\alpha - \frac{\beta b}{2c}\right) \int \frac{c\,dz}{D + c^2z^2} + \beta \int \frac{cz\,dz}{D + c^2z^2}.$$

Das erste Integral rechts wird durch die Substitution:

$$z = \frac{u\sqrt{D}}{c}, \; dz = \frac{du\sqrt{D}}{c}, \; D + c^2z^2 = D(1 + u^2)$$

auf die Form (11) in [251] gebracht:

$$\int \frac{c\,dz}{D + c^2z^2} = \frac{1}{\sqrt{D}} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = u),$$

und wenn „rückwärts" substituiert wird:

$$\int \frac{c\,dz}{D + c^2z^2} = \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{cz}{\sqrt{D}}\right) = \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{cx + \frac{b}{2}}{\sqrt{D}}\right).$$

1) Die Integrationskonstanten sind vorläufig fortgelassen. An ihre Stelle wird noch Beendigung der Gesamtintegration eine einzige Integrationskonstante C gesetzt.

Das zweite Integral rechts wird durch die Substitution:

$$\frac{D}{c} + cz^2 = v,\ \ z\,dz = \frac{dv}{2c}$$

auf die Form gebracht:

$$\int \frac{cz\,dz}{D + c^2z^2} = \frac{1}{2c}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2c}\ln v = \frac{1}{2c}\ln(a + bx + cx^2).$$

Daher endlich nach Einsetzen dieser Werte:

$$\text{)}\quad \int \frac{\alpha + \beta x}{a + bx + cx^2}dx = \left(\alpha - \frac{\beta b}{2c}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}\cdot \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{cx + \frac{b}{2}}{\sqrt{D}}\right) + \frac{\beta}{2c}\ln(a + bx + cx^2)$$

und im besonderen:

$$\text{IVa)}\qquad \int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{\sqrt{D}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{cx + \frac{b}{2}}{\sqrt{D}}\right).$$

Damit ist auch die Form IV integriert. Am meisten Arbeit, Gewandtheit und Nachdenken erfordert aber die Form V. Führt man zunächst dasselbe z wie bei der vierten Form ein, so folgt entsprechend:

$$\int \frac{\alpha + \beta x}{(a + bx + cx^2)^n}dx = \left(\alpha - \frac{\beta b}{2c}\right)\int \frac{dz}{\left(\frac{D}{c} + cz^2\right)^n} + \beta\int \frac{z\,dz}{\left(\frac{D}{c} + cz^2\right)^n}.$$

Das zweite Integral wird nach Einführung desselben v wie in der vierten Form:

$$\int \frac{z\,dz}{\left(\frac{D}{c} + cz^2\right)^n} = \frac{1}{2c}\int \frac{dv}{v^n} = -\frac{1}{2c(n-1)v^{n-1}} = -\frac{1}{2c(n-1)(a + bx + bx^2)^{n-1}}$$

daher, wenn z wieder durch x ersetzt wird:

$$\text{a)}\quad \int \frac{\alpha + \beta x}{(a + bx + cx^2)^n}dx = -\frac{\beta}{2c(n-1)(a + bx + cx^2)^{n-1}} + \left(\alpha - \frac{\beta b}{2c}\right)\int \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^n}.$$

Diese Formel löst zwar noch nicht die Aufgabe, führt aber doch schon das zu lösende Integral auf das etwas einfachere Integral:

$$\text{Vb)}\qquad \int \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^n} = \int \frac{dz}{\left(\frac{D}{c} + cz^2\right)^n} = \int \frac{dz}{(a' + cz^2)^n}$$

zurück. Es bleibt also noch Vb) zu integrieren, was wirklich keine ganz leichte Aufgabe ist.

Aber sie ist bewältigt worden durch ein Verfahren, welches in der Integralrechnung, wie die folgenden Nummern noch vielfach bezeugen werden, sehr oft angewendet wird, nämlich durch die Reduktion von n auf $n - 1$. Meistens benutzt man hierzu den Satz von der teilweisen Integration, § 31 Tafel I

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Man setze also um Vb) willen:

$u = (a' + cz^2)^{-n}$, $dv = dz$; $du = -n \cdot (a' + cz^2)^{-n-1} \cdot 2czdz$, $v = z$,

daher:

$$\int \frac{dz}{(a' + cz^2)^n} = \frac{z}{(a' + cz^2)^n} + 2n \int \frac{cz^2\,dz}{(a' + cz^2)^{n+1}}.$$

Der neue Integrand ist umständlicher als der alte, erstens weil $n+1$ statt n steht und zweitens wegen des Faktor cz^2 im Zähler. Und doch führt die Formel zum Ziele, wenn man zähe genug ist! Zunächst schreibe man:

$$cz^2 = (cz^2 + a') - a'$$

so ergibt sich durch Zerlegung:

$$\int \frac{dz}{(a' + cz^2)^n} = \frac{z}{(a' + cz^2)^n} + 2n \int \frac{dz}{(a' + cz^2)^n} - 2na' \int \frac{dz}{(a' + cz^2)^{n+1}}$$

oder nach Zusammenziehung:

$$(2n - 1) \int \frac{dz}{(a' + cz^2)^n} = -\frac{z}{(a' + cz^2)^n} + 2na' \int \frac{dz}{(a' + cz^2)^{n+1}}.$$

Nun ist allerdings gerade das Gegenteil des Gewollten eingetroffen, denn n ist nicht auf $n-1$, sondern auf $n+1$ reduziert werden. Also kehre man um, d. h. setze n für $n+1$, mithin $n-1$ für n und berechne darauf das Integral rechts. Es folgt:

$$\int \frac{dz}{(a' + cz^2)^n} = \frac{z}{2(n-1)a'(a' + cz^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a'} \int \frac{dz}{(a' + cz^2)^{n-1}}$$

und wenn für $a' = \frac{D}{c}$, $z = x + \frac{b}{2c}$ zurückgesetzt wird:

$$\text{Vc)} \quad \int \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^n} = \frac{b + 2cx}{4(n-1)D(a + bx + cx^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)c}{2(n-1)D} \cdot \int \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{n-1}}$$

Dies ist die gewünschte Reduktionsformel! Durch sie wird erst von n auf $n-1$, dann $n-1$ auf $n-2$ usw. reduziert, bis der Exponent $= 1$ geworden, worauf IVa) die endgültige Lösung ergibt.

So sind also alle fünf Integrationen bewältigt. Und damit ist in Rücksicht auf den vorangegangenen algebraischen Teil die gestellte Aufgabe ganz allgemein gelöst. Die Integration jeder rationalen Funktion, sei sie ganz oder gebrochen, kann auf elementarem Wege in geschlossener Form durchgeführt werden. Sie führt auf algebraische Funktionen, Logrithmen und Arkusfunktionen.

276. Hiermit könnten die analytischen Entwicklungen dieses Paragraphen schließen. Doch seien trotzdem noch einige Betrachtungen über den algebraischen Teil hinzugesetzt, teils zur Erläuterung, teils zu erheblicher Vereinfachung.

Zunächst ließe sich noch viel über die Zerlegung von $\varphi(x)$ in Faktoren ersten und zweiten Grades sagen außer dem, was hierüber schon früher z. B. in § 8 beigebracht worden ist. Aber diese Zerlegung ist und bleibt doch eine rein algebraische Aufgabe, deren Lösung bei der Integration eben als „bereits gegeben" hingenommen werden muß. Wohl aber läßt sich die Bestimmung der Koeffizienten in den Zählern der Partialbrüche oft sehr erheblich vereinfachen, wie jetzt zu zeigen ist.

Es sei x_1 eine einfache (reelle) Wurzel der Gleichung: $\varphi(x) = 0$, also $x - x_1$ ein nur einmal vorkommender Faktor ersten Grades von $\varphi(x)$ und es sei:

$$\varphi(x) = (x - x_1) \cdot \varphi_1(x). \tag{1}$$

Dem Nenner $x - x_1$ entspricht ein Partialbruch von der Form II in [274]. Es soll sein

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{\alpha}{x - x_1} + R, \tag{2}$$

wo R die Summe der übrigen Partialbrüche bedeutet. Man multipliziere nun nicht mit dem ganzen Nenner $\varphi(x)$ wie in [274], sondern nur mit dem Faktor $x - x_1$, so folgt nach (1):

$$\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} \equiv \alpha + (x - x_1) \cdot R. \tag{3}$$

Diese Gleichung soll eine Identität sein, d. h. für jeden Wert von x gelten. Also auch für den Wert $x = x_1$. Da keiner der Nenner der in R zusammengefaßten Partialbrüche den Faktor $x - x_1$ enthält, so bleibt R selbst endlich für $x = x_1$, also daß das zweite Glied rechts verschwindet. Es wird sehr einfach:

$$\alpha = \frac{f(x_1)}{\varphi_1(x_1)}, \tag{4}$$

d. h. der Zähler α wird erhalten indem man in dem Zähler $f(x)$ des ursprünglichen Bruches x durch x_1 ersetzt und desgleichen mit dem Nenner tut, dort aber erst nach Fortlassung des Faktors $x - x_1$.

Die Formel (4) läßt sich noch weiter vereinfachen. Man differenziere (1) nach x:

$$\varphi'(x) = (x - x_1)\varphi'_1(x) + \varphi_1(x) \cdot 1$$

und setze nun $x = x_1$, so folgt: $\varphi'(x_1) = \varphi_1(x_1)$, daher:

$$\alpha = \frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)}, \text{ oder auch } \alpha = \left[\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x = x_1}. \tag{5}$$

Wirklich überraschend einfach und schön! Während in [274] auf die Auflösung eines Systems von Gleichungen verwiesen worden war, ist jetzt der Wert von α durch (4) oder (5) sofort explizite erhältlich.

Hat im besonderen die Gleichung $\varphi(x) = 0$ überhaupt nur reelle und voneinander verschiedene Wurzeln $x_1, x_2, \cdots x_n$, also daß:

$$\varphi(x) = l(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

gesetzt wird, so treten nur Partialbrüche von der Form II) auf. Daher:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\alpha_1}{x - x_1} + \frac{\alpha_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x - x_n}. \tag{6}$$

Die Koeffizienten werden nach (5):

$$\alpha_1 = \left[\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x = x_1}; \quad \alpha_2 = \left[\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x = x_2} \cdots \alpha_n = \left[\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x = x_n}. \tag{7}$$

Damit ist die Partialbruchzerlegung in einem solchen Falle vollendet.

Anmerkung. Nimmt man nicht (5) sondern (4), um in (6) einzusetzen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{l(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)} = & \frac{f(x_1)}{l(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)} \cdot \frac{1}{x - x_1} \\ & + \frac{f(x_2)}{l(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n)} \cdot \frac{1}{x - x_2} \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + \frac{f(x_n)}{l(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})} \cdot \frac{1}{x - x_n}.\end{aligned}$$

Wird mit $\varphi(x)$ multipliziert, so steht links und rechts x nur im Zähler. Setzt man dann y für $f(x)$, also auch y_1 für $f(x_1)$, y_2 für $f(x_2)$, ..., so ergibt sich:

$$\begin{aligned} y = & \, y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)} \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + y_n \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})}. \end{aligned}$$

Und nun vergleiche man mit [77 7]. Völlige Identität mit der Interpolationsformel von Lagrange! Nichts kann, was den Zweck angeht, verschiedener sein, als Zerlegen in Partialbrüche und Interpolieren. Und doch einerlei Formel, nur einmal so, das andere mal anders aufgefaßt.

277. Auch bei Partialbrüchen von der Form III läßt sich eine besondere Methode ausdenken, welche zwar nicht ganz so einfach ist, wie die vorige, aber doch lange nicht so umständlich, als die ursprünglich geforderte Auflösung eines Systems von Gleichungen. Es sei x_1 eine $p$fache (reelle) Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = 0$, d. h. es sei

$$\varphi(x) \equiv (x - x_1)^p \varphi_1(x). \tag{1}$$

Dann ist nach (6) und (9) in [274]:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\alpha_p}{(x - x_1)^p} + \frac{\alpha_{p-1}}{(x - x_1)^{p-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{x - x_1} + R$$

wo R die Summe der übrigen Partialbrüche bedeutet: Man multipliziere nun nicht mit dem ganzen Nenner $\varphi(x)$, sondern nur mit dem Faktor $(x - x_1)^p$. Es folgt nach (1)

$$\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} = \alpha_p + \alpha_{p-1}(x - x_1) + \cdots + \alpha(x - x_1)^{p-1} + (x - x_1)^p \cdot R$$

oder wenn $x - x_1 = z$, $x = x_1 + z$ gesetzt wird:

$$\frac{f(x_1 + z)}{\varphi_1(x_1 + z)} = \alpha_p + \alpha_{p-1} z + \cdots + \alpha_1 z^{p-1} + R z^p.$$

Die rechte Seite stellt eine Entwicklung nach Potenzen von z vor, welche mit der p^{ten} Potenz abbricht. Denn R kann auch nach steigenden Potenzen von z in eine innerhalb eines endlichen Bereiches konvergente Reihe entwickelt werden, (da die vorkommenden Nenner nicht den Faktor z enthalten). Also: Um die Zähler der Partialbrüche III) zu erhalten, setze man $x = x_1 + z$, ordne darauf in dem Bruch:

$$\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{f(x_1 + z)}{\varphi_1(x_1 + z)} \tag{2}$$

Zähler und Nenner nach *steigenden* Potenzen von z, dividiere dann in der gewöhnlichen Weise den Zähler durch den Nenner und breche damit ab, sobald der Quotient bis zur $p - 1^{\text{ten}}$ Potenz von z entwickelt worden ist. Die Koeffizienten dieser Entwicklung stimmen dann mit den Zählern $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots \alpha_1$ der Partialbrüche überein.

278. Für die Koeffizienten der Zähler der Partialbrüche IV) und V) gibt es ebenfalls andere Bestimmungsmöglichkeiten, als durch Auflösung eines Systems von Gleichungen ersten Grades. Aber es lohnte kaum auf sie einzugehen, weil Arbeit und Mühe nicht geringer werden; nur so viel sei angedeutet, daß der Nenner zweiten Grades in konjugiert komplexe Faktoren zerlegt werden könnte und daß durch Addition entsprechend konjugierter komplexer Partialbrüche und darauffolgende Umformungen die reellen Partialbrüche IV) und V) entstehen würden. Man bleibt also für solche Partialbrüche besser bei der Auflösung des Systems von Gleichungen ersten Grades [274].

Übrigens kann die Zerlegung in Partialbrüche manchmal ganz erspart oder doch ganz erheblich eingeschränkt werden. Man betrachte z. B. die folgenden drei Integrale

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1}, \quad \int \frac{x\,dx}{x^3 + 1}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{x^3 + 1}.$$

Das erste und das zweite erfordern die Zerlegung in Partialbrüche, indem man den Nenner zerlegt in:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Aber bei dem dritten Integral ist diese Zerlegung überhaupt überflüssig, weil

nämlich der Zähler, von einem konstanten Faktor abgesehen, das Differential des Nenners ist und man also sofort so rechnen kann:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3+1)}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + C.$$

Oder man betrachte das Integral:

$$J = \int \frac{x\,dx}{x^4 - 3x^2 + 2}.$$

Hier kann die Zerlegung in Partialbrüche erheblich abgekürzt werden, wenn man setzt:

$$x^2 = z, \quad x\,dx = \frac{dz}{2},$$

also:

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(z-1)(z-2)}$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{dz}{z-1} + \frac{B}{2}\int \frac{dz}{z-2}.$$

Nach [275] ist: $A = \left[\frac{1}{2z-3}\right]_{z=+1} = -1;\ B = \left[\frac{1}{2z-3}\right]_{z=+2} = +1,$ also:

$$J = -\frac{1}{2}\ln(z-1) + \frac{1}{2}\ln(z-2) + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{z-2}{z-1} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2-2}{x^2-1} + C.$$

279. Es folgen vier Beispiele, in welchen alle Arten von Zerlegungen vorkommen.

A) $$\boldsymbol{J = \int \frac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\,dx.}$$

Da der Bruch unecht ist, so zerlege man ihn erst in eine ganze Funktion und einen echten Bruch. Schon in [273] geschehen:

$$\frac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = x^2 + 8x + 40 + \frac{162x^2 - 387x + 246}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}.$$

Nun ist der Nenner zu zerlegen. Man erhält durch „Probieren“:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3),$$

also:

$$\frac{162x^2 - 387x + 246}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{\alpha_1}{x-1} + \frac{\alpha_2}{x-2} + \frac{\alpha_3}{x-3}.$$

Zur Bestimmung von α_1, α_2, α_3 bilde man nach [275] den Bruch:

$$\frac{162x^2 - 387x + 246}{3x^2 - 12x + 11}$$

und setze in ihn für x der Reihe nach $+1$, $+2$, $+3$, so wird:

$$\alpha_1 = \frac{162 - 387 + 246}{3 - 12 + 11} = +\frac{21}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{648 - 774 + 246}{12 - 24 + 11} = -120$$

$$\alpha_3 = \frac{1458 - 1161 + 246}{27 - 36 + 11} = +\frac{543}{2},$$

folglich, wenn man einsetzt und integriert:

$$J = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 40x + \frac{21}{2}\ln(x-1) - 120\ln(x-2) + \frac{543}{2}\ln(x-3) + C.$$

1. Die drei Logarithmen könnten zu einem Logarithmus zusammengezogen werden;

$$\ln\left[(x-1)^{\frac{21}{2}} \cdot (x-2)^{-120} \cdot (x-3)^{\frac{543}{2}}\right]$$

doch für die numerische Rechnung bei Einsetzen der Grenzen würde damit nicht eine Vereinfachung, sondern das Gegenteil erreicht werden, wegen der großen Exponenten.

2. Im Ernstfalle würde man selbstverständlich nach ausgeführter Integration noch die „Probe durch Differenzieren“ machen [247].

B) $$J = \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{(x-1)^3(x+1)}\,dx.$$

Da der Bruch bereits echt ist, fällt die erste Zerlegung in eine ganze Funktion und einen echten Bruch fort. Die Partialbruchzerlegung gibt den Ansatz:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{\alpha_1}{x-1} + \frac{\alpha_2}{(x-1)^2} + \frac{\alpha_3}{(x-1)^3} + \frac{\alpha_4}{x+1}.$$

Um α_3, α_2 und α_1 zu ermitteln, setze man nach [277 2] links nach Weglassung von $(x-1)^3$ statt x ein: $x = 1 + z$. Man erhält:

$$\frac{(1+z)^3 + 2(1+z)^2 + 3(1+z) + 4}{1 + z + 1} = \frac{10 + 10z + 5z^2 + z^3}{2 + z}$$

$$\begin{array}{l}
10 + 10z + 5z^2 + z^3 : 2 + z = 5 + \frac{5}{2}z + \frac{5}{4}z^2 + \cdots \\
\underline{10 + 5z} \\
5z + 5z^2 \\
\underline{5z + \frac{5}{2}z^2} \\
\frac{5}{2}z^2 + z^3,
\end{array}$$

also

$$\alpha_3 = +5, \quad \alpha_2 = +\frac{5}{2}, \quad \alpha_1 = +\frac{5}{4}.$$

Um α_4 zu ermitteln, bilde man nach [276 4] den Bruch:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{(x-1)^3}$$

und setze $x = -1$. Man erhält:

$$\alpha_4 = \frac{-1+2-3+4}{-8} = -\frac{1}{4},$$

also nach Einsetzen und Integrieren:

$$J = \frac{5}{4}\ln(x-1) - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{5}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4}\ln(x+1) + C.$$

C) $$\boldsymbol{J = \int \frac{x\,dx}{x^3-1}}$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Der zweite Faktor ist nicht mehr (reell) zerlegbar. Also:

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\alpha_1 + \beta_1 x}{x^2+x+1}.$$

α kann nach [276 5] bestimmt werden:

$$\alpha = \left[\frac{x}{3x^2}\right]_{x=1} = +\frac{1}{3}.$$

Aber um α_1 und β_1 zu ermitteln, muß man doch das Gleichungssystem auflösen. Man multipliziere daher mit dem Generalnenner:

$$x = \alpha(x^2+x+1) + (\alpha_1+\beta_1 x)(x-1) = x^2(\alpha+\beta_1) + x(\alpha+\alpha_1-\beta_1) + (\alpha-\alpha_1).$$

Die Vergleichung der Koeffizienten gibt:

$$\alpha + \beta_1 = 0, \quad \alpha + \alpha_1 - \beta_1 = 1, \quad \alpha - \alpha_1 = 0,$$

folglich nach der diesmal sehr einfachen Auflösung:

$$\alpha = +\tfrac{1}{3}, \quad \alpha_1 = +\tfrac{1}{3}, \quad \beta_1 = -\tfrac{1}{3},$$

und

$$J = \frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{1}{3}\int \frac{(1-x)\,dx}{1+x+x^2}$$

und nach IV [275]:

$$J = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

D) $$\boldsymbol{J = \int \frac{dx}{(1+x^3)^2}}$$

$$(1+x^3)^2 = (1+x)^2(1-x+x^2)^2.$$

$$\left(\frac{1}{1+x^3}\right)^2 = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C+Dx}{1-x+x^2} + \frac{E+Fx}{(1-x+x^2)^2}.$$

A und B könnte man nach [277 2] berechnen. Besser aber ist es, sofort nach [274] das Gleichungssystem zur Bestimmung aller sechs Koeffizienten aufzustellen.

$$\begin{aligned}
1 &= A(1-x+x^2)(1+x^3) + B(1-x+x^2)^2 + (C+Dx)(1+x)(1+x^3) \\
&\quad + (E+Fx)(1+x)^2 \\
&= A(1-x+x^2+x^3-x^4+x^5) + B(1-2x+3x^2-2x^3+x^4) \\
&\quad + C(1+x+0x^2+x^3+x^4) + D(x+x^2+0x^3+x^4+x^5) \\
&\quad + E(1+2x+x^2) + F(x+2x^2+x^3).
\end{aligned}$$

Die Vergleichung der Koeffizienten ergibt:

$$\begin{aligned}
1 &= A + B + C + E \\
0 &= -A - 2B + C + D + 2E + F \\
0 &= A + 3B + D + E + 2F \\
0 &= A - 2B + C + F \\
0 &= -A + B + C + D \\
0 &= A + D
\end{aligned}$$

Die erste, vierte und letzte Gleichung ergeben:

$$D = -A, \quad E = -A - B - C + 1, \quad F = -A + 2B - C$$

in die anderen eingesetzt:

$$\left.\begin{aligned}
-2 &= -5A - 2B - 2C \\
-1 &= -3A + 6B - 3C \\
0 &= -2A + B + C
\end{aligned}\right\} \text{ aufgelöst:}$$

$$A = +\tfrac{2}{9}, \quad B = +\tfrac{1}{9}, \quad C = +\tfrac{1}{3}$$

in die Ausdrücke für D, E und F eingesetzt:

$$D = -\tfrac{2}{9}, \quad E = +\tfrac{1}{3}, \quad F = -\tfrac{1}{3},$$

folglich:

$$J = \frac{2}{9}\ln(1+x) - \frac{1}{9(1+x)} + \frac{1}{9}\int\frac{3-2x}{1-x+x^2}\,dx + \frac{1}{3}\int\frac{1-x}{(1-x+x^2)^2}\,dx.$$

Nach IV [275] ist:

$$\int\frac{3-2x}{1-x+x^2}\,dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \ln(1-x+x^2).$$

Und nach Va, Vb und IVa in [275] ist:

$$\begin{aligned}
\int\frac{1-x}{(1-x+x^2)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1-x+x^2)^2} + \frac{1}{2(1-x+x^2)} \\
&= \frac{-1+2x}{6(1-x+x^2)} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x+x^2} + \frac{1}{2(1-x+x^2)} \\
&= \frac{-1+2x}{6(1-x+x^2)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2(1-x+x^2)}.
\end{aligned}$$

Daher endlich:

$$\begin{aligned}
J = \frac{2}{9}\ln(1+x) &- \frac{1}{9(1+x)} + \frac{4}{9\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{9}\ln(1-x+x^2) \\
&+ \frac{-1+2x}{18(1-x+x^2)} + \frac{2}{9\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{6(1-x+x^2)} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J = \frac{2}{9}\ln(1+x) &- \frac{1}{9(1+x)} - \frac{1}{9}\ln(1-x+x^2) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \\
&+ \frac{1+x}{9(1-x+x^2)} + C.
\end{aligned}$$

Die Integration ist vollendet. Sie würde selbst dem geschulten Mathematiker, wenn er die gebrauchten Formeln erst aus freier Faust entwickeln sollte, stundenlange Rechenarbeiten verursachen zur richtigen Bestimmung aller Koeffizienten. Es lassen sich eben nicht alle Integrale aus dem Ärmel schütteln. Übrigens ist die „Probe durch Differenzieren“ in § 15 [130] schon vorweggenommen.

Zum Schluß sei das schon in [275] gekennzeichnete Endergebnis dieses § 36 noch einmal wiederholt: Die Integration jeder algebraisch rationalen Funktion, sei sie ganz oder gebrochen, kann auf elementarem Wege in geschlossener Form durchgeführt werden. Sie führt auf rationale algebraische Funktionen, Logarithmen und Arkusfunktionen.

Übungen zu § 35.

1) Gegeben das Integral:

$$J = \int \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}{(1 + x^2)^2} \, dx,$$

welche Bedingungen müssen zwischen den vier Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erfüllt sein, damit das Integral J rein algebraisch wird.

2) Zu beweisen, daß ein Integral von der Form:

$$J = \int \frac{f(x)}{\varphi(x)} \, dx,$$

wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei relativ prime ganze Funktionen bedeuten, überhaupt nur algebraisch sein kann, wenn der Nenner $\varphi(x)$ nur mehrfache Faktoren hat.

3) Flächeninhalt des folium cartesianum Fig. 19 in [60], d. h. des im ersten Quadranten liegenden Blattes. Einführung von Polarkoordinaten, Formel für dS [$170_{\text{III}\,a}$], setze $\operatorname{tg} \varphi = z$ usw.

§ 36. Integration irrationaler algebraischer Funktionen.

280. Der vorige Paragraph hat gezeigt, daß und auf welche Weise jede algebraische rationale Funktion in geschlossener Form integriert werden kann. Leider kann dieser Paragraph durchaus nicht dasselbe für algebraische irrationale Funktionen leisten, sondern muß sich vielmehr mit besonderen Arten der Irrationalität begnügen, welche sich bei der Integration ohne erhebliche Erweiterung der analytischen Hilfsmittel in § 35 bewerkstelligen lassen. Es sind im wesentlichen ihrer drei, nämlich:

Erster Fall. Die Irrationalität beschränkt sich auf das Vorkommen einer beliebigen Wurzel aus einer ganzen Funktion ersten Grades. Es sei:

$$J = \int f(x, \sqrt[n]{a+bx})\,dx.$$

Zweiter Fall. Die Irrationalität beschränkt sich auf das Vorkommen einer beliebigen Wurzel aus einer gebrochenen Funktion, deren Zähler und Nenner vom ersten Grade sind. Es sei:

$$J = \int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}}\right) dx.$$

Dritter Fall. Die Irrationalität beschränkt sich auf das Vorkommen einer Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion zweiten Grades. Es sei:

$$J = \int f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx.$$

Dabei soll f in allen drei Fällen eine beliebige rationale algebraische Funktion von x und der Wurzel bezeichnen. Gehört die Irrationalität nicht einem der drei Fälle an, oder ist sie nicht auf sie durch Umformungen zurückführbar, so kann man die Unmöglichkeit der Integration in geschlossener Form als die Regel annehmen wie z. B. für folgende Integrale:

$$J = \int f(x, \sqrt[3]{a+bx+cx^2})\,dx; \quad J = \int f(x, \sqrt{a+bx+cx^2+ex^3})\,dx.$$

281. Erster Fall.

$$J = \int f(x, \sqrt[n]{a+bx})\,dx.$$

Man setze:

$$\sqrt[n]{a+bx} = y, \quad a+bx = y^n, \quad x = \frac{y^n - a}{b}, \quad dx = \frac{ny^{n-1}dy}{b}.$$

Das Integral wird:

$$J = \int f\left(\frac{y^n-a}{b}, y\right) \cdot \frac{ny^{n-1}}{b}\,dy.$$

Die Irrationalität ist verschwunden, der Integrand ist algebraisch rational geworden. Die Integralfunktion wird also nach den Methoden des vorigen § 35 bestimmt. Nach ihrer Auffindung kann selbstverständlich für y wieder sein Wert, nämlich $\sqrt[n]{a+bx}$ zurückgesetzt werden. Beispiel:

$$J = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

$$\sqrt[3]{1+x} = y, \; x = y^3 - 1, \; dx = 3y^2\,dy$$

$$J = \int \frac{(y^3-1) \cdot 3y^2\, dy}{y} = \int (3y^4 - 3y)\, dy$$

$$= \frac{3y^5}{5} - \frac{3y^2}{2} + C = \frac{3\sqrt[3]{1+x}^5}{5} - \frac{3\sqrt[3]{1+x}^2}{2} + C$$

$$= \sqrt[3]{1+x}^2\left(\frac{3}{5}(1+x) - \frac{3}{2}\right) + C = \sqrt[3]{1+x}^2\left(\frac{3}{5}x - \frac{9}{10}\right) + C.$$

Probe durch Differenzieren.

$$\frac{dJ}{dx} = \sqrt[3]{(1+x)}^2 \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}x - \frac{9}{10}\right)(1+x)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= (1+x)^{-\frac{1}{3}}\left((1+x)\frac{3}{5} + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}\right) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} \text{ (stimmt).}$$

282. Zweiter Fall:

$$J = \int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}}\right) dx.$$

Man setze:

$$\sqrt[n]{\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}} = y, \quad \frac{a+bx}{\alpha+\beta x} = y^n, \quad a + bx = \alpha y^n + \beta x y^n$$

$$x = \frac{a - \alpha y^n}{-b+\beta y^n}$$

$$dx = \frac{(-b+\beta y^n) \cdot -\alpha n y^{n-1}\, dy - (a - \alpha y^n)\beta y^{n-1}\, dy}{(-b+\beta y^n)^2}$$

$$= n y^{n-1}\, dy \frac{b\alpha - a\beta}{(-b+\beta y^n)^2}$$

Des Integral wird

$$J = \int f\left(\frac{a-\alpha y^n}{-b+\beta y^n}, y\right) n y^{n-1} \frac{b\alpha - a\beta}{(-b+\beta y^n)^2}\, dy.$$

Die Irrationalität ist verschwunden, der Integrand ist algebraisch rational geworden. Also § 35 zuständig. Nachher kann für y wieder selbstverständlich die Wurzel zurückgesetzt werden. Beispiel:

$$J = \int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\, dx.$$

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = y, \quad \frac{1+x}{1-x} = y^3, \quad 1 + x = y^3 - y^3 x, \quad x = \frac{y^3-1}{y^3+1}.$$

$$dx = \frac{(y^3+1)\, 3y^2\, dy - (y^3-1)\, 3y^2\, dy}{(y^3+1)^2} = \frac{6y^2\, dy}{(y^3+1)^2}$$

$$J = \int \frac{y^3+1}{y^3-1} \cdot \frac{y \cdot 6y^2\, dy}{(y^3+1)^2} = 6\int \frac{y^3\, dy}{y^6-1}.$$

Die Zerlegung in Teilbrüche kann vereinfacht werden: [278]

$$y^2 = z, \quad y^3\, dy = \frac{z\, dz}{2}, \quad J = 3\int \frac{z\, dz}{z^3 - 1}$$

daher nach C) [279]

$$J = \ln(z-1) - \frac{1}{2}\ln(1+z+z^2) + \sqrt{3}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Hier ist für z sein Wert zurückzusetzen:

$$z = y^2 = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}^{-2}.$$

283. Dritter Fall:

$$J = \int f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx. \tag{1}$$

Hier die Wurzel wie im ersten und zweiten Falle als neue Veränderliche y einzuführen, würde gar keinen Zweck haben. Denn die Auflösung nach x würde als Umkehrung ergeben

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c(a-y^2)}}{2c}$$

d. h. die ursprüngliche Wurzel wäre zwar verschwunden, aber an ihre Stelle wäre ebenfalls eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck zweiten Grades getreten.

Und dennoch kann die Irrationalität fortgebracht werden, aber auf andere Weise. Zunächst sei wieder durch die Methode der quadratischen Ergänzung das Glied ersten Grades entfernt und das Integral auf die etwas einfachere Form gebracht worden:

$$J = \int f(x, \sqrt{a+cx^2})\,dx. \tag{1a}$$

Erste Methode, nur verwendbar, wenn $c > 0$. Setze:

$$\sqrt{a+cx^2} = x\sqrt{c} + y; \quad y = \sqrt{a+cx^2} - x\sqrt{c}$$

(d. h. man ziehe aus dem zweiten Glied die Wurzel und führe den Rest als neue Veränderliche ein). Es folgt durch Quadrieren

$$a + cx^2 = cx^2 + 2xy\sqrt{c} + y^2.$$

Es hebt sich cx^2 fort!! und man erhält rational:

$$x = \frac{a-y^2}{2y\sqrt{c}}$$

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{c}}\,\frac{y\cdot(-2y\,dy) - (a-y^2)dy}{y^2} = -\frac{(a+y^2)dy}{2\sqrt{c}\cdot y^2}$$

$$\sqrt{a+cx^2} = x\sqrt{c} + y = \frac{a-y^2}{2y} + y = \frac{a+y^2}{2y}$$

$$J = \int f\left(\frac{a-y^2}{2y\sqrt{c}}, \frac{a+y^2}{2y}\right)\left(-\frac{a+y^2}{2\sqrt{c}\cdot y^2}\right)dy.$$

Der Integrand ist völlig rational geworden, also wird § 35 zuständig. Nachher kann für y wieder sein voriger Wert zurückgesetzt werden.

Zweite Methode, nur anwendbar, wenn $a > 0$. Setze:

$$\sqrt{a + cx^2} = \sqrt{a} + xy\,; \quad y = \frac{\sqrt{a + cx^2} - \sqrt{a}}{x}$$

(d. h. man ziehe aus dem ersten Glied die Wurzel und setze den Rest $= xy$)

$$a + cx^2 = a + 2xy\sqrt{a} + x^2y^2.$$

(Es hebt sich a fort und der Rest ist durch x teilbar!!)

$$x = \frac{2y\sqrt{a}}{c - y^2}$$

(also rational!)

$$dx = \frac{2\sqrt{a}\,[(c - y^2)\,dy - y\,(-2y)\,dy]}{(c - y^2)^2} = 2\sqrt{a}\,\frac{(c + y^2)}{(c - y^2)^2}\,dy$$

$$\sqrt{a + cx^2} = \sqrt{a} + xy = \sqrt{a} + \frac{2y^2\sqrt{a}}{c - y^2} = \sqrt{a}\,\frac{c + y^2}{c - y^2}$$

$$J = \int f\left(\frac{2y\sqrt{a}}{c - y^2}, \sqrt{a}\,\frac{c + y^2}{c - y^2}\right) \cdot 2\sqrt{a}\,\frac{c + y^2}{(c - y^2)^2} \cdot dy\,.$$

Der Integrand ist völlig rational geworden. Also wird § 35 zuständig. Nachher kann für y wieder sein voriger Wert zurückgesetzt werden.

Dritte Methode, nur anwendbar, wenn a positiv und c negativ oder wenn a negativ und c positiv ist, also wenn a und c entgegengesetzte Vorzeichen haben. Man setze zur Abkürzung:

$$-\frac{a}{c} = k^2, \; k = \sqrt{-\frac{a}{c}}$$

und forme in folgender Weise um:

$$\sqrt{a + cx^2} = \sqrt{c\left(x^2 + \frac{a}{c}\right)} = \sqrt{c\,(x^2 - k^2)} = \sqrt{c\,(x + k)\,(x - k)}$$

$$= \sqrt{\frac{c\,(x + k)\,(x - k)^2}{x - k}} = (x - k)\sqrt{c\,\frac{x + k}{x - k}}.$$

Die nach dieser Umformung auftretende Irrationalität gehört unter den in [282] behandelten zweiten Fall. Man setze also:

$$\sqrt{c\,\frac{x + k}{x - k}} = y, \quad x = k\,\frac{y^2 + c}{y^2 - c}$$

usw. usw.

Zu den drei Methoden seien noch folgende Bemerkungen angeknüpft. Erstens: Sie sind gar nicht so sehr von einander verschieden, wie es zuerst den Anschein hat, denn die drei angewendeten Substitutionen

$$x = \frac{a - y^2}{2y\sqrt{c}}; \; x = \frac{2y\sqrt{a}}{c - y^2}; \quad x = k\,\frac{y^2 + c}{y^2 - c}$$

sind sämtlich besondere Fälle der allgemeineren gebrochenen Form zweiten Grades:

$$x = \frac{\alpha + \beta y + \gamma y^2}{\alpha' + \beta' y + \gamma' y^2}.$$

[Algebraisch von Wichtigkeit ist, daß jede Quadratwurzel aus einem Ausdruch zweiten Grades:

$$\sqrt{a + bx + cx^2}$$

bei gehöriger Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ rational gemacht werden kann].

Zweitens: Man darf $\sqrt{c}$ in der ersten, $\sqrt{a}$ in der zweiten und $k = \sqrt{-\frac{a}{c}}$ in der dritten Methode sowohl das positive wie das negative Vorzeichen geben, so daß also jede der drei Methoden eigentlich wieder in zwei Methoden zerfällt.

Drittens: Da $\sqrt{a + cx^2}$ reell sein soll, so muß mindestens einer der beiden Koeffizienten positiv sein. Also reichten schon die erste und zweite Methode aus, doch führt die dritte manchmal schneller zum Ziel. Überhaupt kann man immer zwei von den drei Methoden anwenden, denn es sei

α) a positiv und c positiv, so erste und zweite Methode,

β) a negativ und c positiv, so erste und dritte Methode,

γ) a positiv und c negativ, so zweite und dritte Methode.

(Sollte aber etwa a oder c verschwinden, so verschwindet x auf der Stelle aus der Irrationalität, denn: $\sqrt{a + 0x^2} = \sqrt{a}$, $\sqrt{0 + cx^2} = x\sqrt{c}$.)

Erstes Beispiel:

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 4x + 5x^2}}$$

$$3 + 4x + 5x^2 = 5(x^2 + \tfrac{4}{5}x + \tfrac{4}{25} - \tfrac{4}{25} + \tfrac{3}{5})$$
$$= (5(x + \tfrac{2}{5})^2 + \tfrac{11}{5}).$$

Hier ist in [283 1a] $a = +\frac{11}{5}$, $c = +5$. Man kann also die erste oder die zweite Methode anwenden. Die erste ergibt:

$$\sqrt{5(x + \tfrac{2}{5})^2 + \tfrac{11}{5}} = (x + \tfrac{2}{5})\sqrt{5} + y;\quad y = \sqrt{3 + 4x + 5x^2} - (x + \tfrac{2}{5})\sqrt{5}$$

$$5(x + \tfrac{2}{5})^2 + \tfrac{11}{5} = 5(x + \tfrac{2}{5})^2 + 2y\sqrt{5}(x + \tfrac{2}{5}) + y^2$$

$$x + \tfrac{2}{5} = \frac{11 - 5y^2}{10y\sqrt{5}}$$

$$dx = \frac{1}{10\sqrt{5}} \cdot \frac{y \cdot (-10y\,dy) - (11 - 5y^2)\,dy}{y^2} = -\frac{11 + 5y^2}{10\sqrt{5}\,y^2}\,dy$$

$$\sqrt{5(x + \tfrac{2}{5})^2 + \tfrac{11}{5}} = \frac{11 - 5y^2}{10y} + y = \frac{11 + 5y^2}{10y}.$$

$$J = \int \frac{-\frac{11+5y^2}{10\sqrt{5}\,y^2}}{\frac{11+5y^2}{10\,y}}\,dy = -\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dy}{y}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\ln y + C = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{3+4x+5x^2} - \left(x+\frac{2}{5}\right)\sqrt{5}\right) + C$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{3+4x+5x^2} + \sqrt{5}\left(x+\frac{2}{5}\right)\right) + C'.$$

Die zweite Methode hätte etwas mehr Arbeit gemacht.

Zweites Beispiel: $J = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Es sind die erste und zweite Methode anwendbar. Die zweite führt diesmal schneller zum Ziel. Also:

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + xy, \quad y = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x},$$

$$1 + x^2 = 1 + 2xy + x^2y^2, \quad x = \frac{2y}{1-y^2},$$

$$dx = 2\frac{(1-y^2)dy + y\,(2y\,dy)}{(1-y^2)^2} = 2\,\frac{1+y^2}{(1-y^2)^2}\,dy,$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{2y^2}{1-y^2} = \frac{1+y^2}{1-y^2},$$

$$J = \int \frac{2\,\frac{(1+y^2)}{(1-y^2)^2}\,dy}{\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{1+y^2}{(1-y^2)}} = \int\frac{dy}{y}$$

$$= \ln y + C,$$

$$J = \ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C.$$

Drittes Beispiel.

$$J = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Hier ist die zweite und dritte Methode anwendbar. Die dritte führt etwas schneller zum Ziel.

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} = (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = y, \quad \frac{1-x}{1+x} = y^2, \quad 1 - x = y^2(1+x),$$

$$x = \frac{1-y^2}{1+y^2},$$

$$dx = \frac{(1+y^2)(-2y)\,dy - (1-y^2)\,2y\,dy}{(1+y^2)^2} = \frac{-4y\,dy}{(1+y^2)^2},$$

$$1 + x = 1 + \frac{1-y^2}{1+y^2} = \frac{2}{1+y^2}; \quad \sqrt{1-x^2} = (1+x)\cdot y = \frac{2y}{1+y^2},$$

$$J = \int \frac{\frac{-4y}{(1+y^2)^2}}{\frac{2}{1+y^2} \cdot \frac{2y}{1+y^2}}\, dy = -\int dy = -y + C,$$

$$J = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

284. Es gibt noch eine andere Art, Integrale von der Form:

$$J = \int (x, \sqrt{a + bx + cx^2})\, dx \tag{1}$$

zu behandeln, welche sogar oft den Vorzug verdient. Sie besteht in der Zurückführung auf Integrale von der einfachen Form:

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}, \tag{2}$$

die sodann mittelst der quadratischen Ergänzung abermals in:

$$J = \int \frac{dy}{\sqrt{a' + cy^2}} \tag{3}$$

vereinfacht werden kann. Je nach den Vorzeichen von a' und c setze man weiter:

$$\text{entweder } y = z\sqrt{\frac{a'}{c}} \quad \text{oder} \quad y = z\sqrt{-\frac{a'}{c}},$$

worauf J sofort auf (10), (18) oder (19) in Tafel II [251] gebracht wird.

Mit der Zurückführung von (1) auf (2) ist also die Hauptarbeit getan. Sie ist immer möglich, wenn nicht etwa das Integrieren schon früher zu Ende geht. Nun dann um so besser. (Vgl. III). Drei Beispiele:

$$J = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{3 + 4x + 5x^2}}.$$

Man setze:

$$1 + x = \frac{1}{z}, \quad x = \frac{1}{z} - 1 = \frac{1-z}{z}, \quad dx = -\frac{dz}{z^2},$$

$$3 + 4x + 5x^2 = 3 + \frac{4}{z} - 4 + \frac{5}{z^2} - \frac{10}{z} + 5 = \frac{5 - 6z + 4z^2}{z^2},$$

$$J = \int \frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z^2}\sqrt{5 - 6z + 4z^2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{5 - 6z + 4z^2}}.$$

Form (2) ist erreicht. Man setze ferner:

$$z - \tfrac{3}{4} = y; \quad z = y + \tfrac{3}{4}, \quad dz = dy,$$

$$J = -\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{11}{4} + 4y^2}}.$$

Form (3) ist erreicht. Man setze drittens:

$$y = u\,\frac{\sqrt{11}}{4}, \quad dy = \frac{du\sqrt{11}}{4}, \quad u = \frac{4y}{\sqrt{11}},$$

$$J = -\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{1}{2}\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + C.$$

Nach vollbrachter Lösung substituiere man zurück:

$$u = \frac{4y}{\sqrt{11}} = \frac{4z-3}{\sqrt{11}} = \frac{1-3x}{\sqrt{11}\,(1+x)}.$$

Nach Einsetzen und gehörigem Umformen folgt ($\ln\sqrt{11}$ ist in C enthalten):

$$J = -\tfrac{1}{2}\ln\left(2\sqrt{3+4x+5x^2} + 1 - 3x\right) + \tfrac{1}{2}\ln(1+x) + C.$$

(Probe durch Differenzieren). Offenbar läßt sich jedes Integral von der Form:

(I) $$J = \int\frac{dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

ebenso behandeln. Man setzt $\alpha + \beta x = 1 : z$ usw. usw.

(II) $$J = \int\sqrt{a+bx+cx^2}^{\,2p+1}\,dx = \int(a+bx+cx^2)^{\frac{2p+1}{2}}\,dx,$$

(p positiv und ganz. Der Exponent $2p+1$ muß ungerade sein, sonst würde der Integrand rational werden). Man wird versuchen p auf $p-1$, also $2p+1$ auf $2p-1$ zu bringen, d. h. so zu reduzieren, wie es in [275] vorbildlich geschehen ist. Ja man kann sogar unmittelbar an (Vc) in [275] anknüpfen, wenn dort mutatis mutandis gesetzt wird:

$$n = -\frac{2p-1}{2}, \quad -n = \frac{2p-1}{2},$$

also:

$$\int\sqrt{a+bx+cx^2}^{\,2p-1}\,dx = -\frac{b+2cx}{2(2p+1)D}\sqrt{a+bx+cx^2}^{\,2p+1} + \frac{2(p+1)c}{(2p+1)D}\int\sqrt{a+bx+cx^2}^{\,2p+1}\,dx$$

$\left(D = \left(ac - \frac{b}{2}\right)^2\right)$ und nach Umkehrung:

$$\int\sqrt{a+bx+cx^2}^{\,2p+1}\,dx = \frac{b+2cx}{4c(p+1)}\sqrt{a+bx+cx^2}^{\,2p+1} + \frac{(2p+1)D}{2(p+1)c}\int\sqrt{a+bx+cx^2}^{\,2p-1}\,dx. \tag{4}$$

Nach dieser Formel reduziere man, bis $p = 1$, $2p-1 = -1$ geworden ist und man (2) erreicht hat.

(III) $$J = \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^{\,2p+1}},$$

(p positiv und ganz). Man nehme gleichfalls (Vc) an [275], setze aber jetzt $n = (2p + 1) : 2$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}^{2p+1}} = \frac{b + 2cx}{2D(2p-1)\sqrt{a + bx + cx^2}^{2p-1}} + \frac{2(p-1)c}{D(2p-1)} \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}^{2p-1}}. \tag{5}$$

Also auch eine Formel zur Reduktion von p auf $p - 1$.

Doch siehe da, eine Überraschung, aber eine sehr angenehme! Für $p = 1$ verschwindet nämlich der Faktor vor dem rechtsstehenden Integral, d. h. man kommt gar nicht erst zu dem Integral (2), sondern erhält sofort (nach Hinzuziehung einer Integrationskonstanten):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}^3} = \frac{b + 2cx}{2D\sqrt{a + bx + cx^2}} + C, \tag{6}$$

und erkennt hieraus, daß alle Integrale der Form (III) merkwürdigerweise algebraisch sind, wenn p positiv ist, obgleich für $p = 0$ sich ein Logarithmus oder ein Arcus ergibt.

Die Beispiele I, II, III mögen genügen. Um nämlich ganz allgemein zu zeigen, daß (1) immer auf (2) gebracht werden könne, wären noch weitläufige Entwicklungen nötig, während (1) im Prinzip ja schon in [284] ganz allgemein gelöst ist.

285. Wenn die Irrationalität anders geartet ist, als in den betrachteten drei Fällen [280], so läßt sich in der Regel die Integration nicht auf elementarem Wege ausführen, man mag Substitutionen, Umformungen usw. versuchen, welche und so viel man will. Es geht dann eben nicht, wie z. B. wenn eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck vierten Grades:

$$\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}$$

vorkommt. Daß es aber Ausnahmen von der Regel geben muß, leuchtet auf folgende Weise ein. Wenn man einen Ausdruck, in dem eine solche Irrationalität vorkommt, differenziert, dann kommt in der abgeleiteten Funktion sicherlich dieselbe Irrationalität vor, und da deren Integral wieder die ursprüngliche Funktion ist, so liegt in solchem Falle eine Ausnahme vor. Es gibt aber auch noch andere, tiefer versteckt liegende Ausnahmen. Man betrachte z. B. das Integral:

$$J = \int \frac{(1 - kx^2)\, dx}{(1 + kx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}.$$

Es ist ein sogenanntes elliptisches Integral dritter Gattung, gehört also, wie deren Theorie völlig klar gezeigt hat, zu Integralen, welche sonst jeder elementaren Behandlung spotten. Und doch macht dieses

(zufällig) eine Ausnahme, die freilich nur sehr schwer als eine solche erkennbar ist. Wenn man aber den Radikanden umformt:

$$(1-x^2)(1-k^2x^2)=1-x^2-k^2x^2+k^2x^4=1+2kx^2+k^2x^4-x^2-2kx^2-k^2x^2$$
$$=(1+kx^2)^2-(1+k)^2x^2,$$

so gibt sich schon eher ein Weg zu erkennen, denn nun wird

$$J=\int\frac{(1-kx^2)\,dx}{(1+kx^2)^2\sqrt{1-\left(\frac{(1+k)x}{1+kx^2}\right)^2}},$$

aber es fehlt doch noch etwas, nämlich daß:

$$\frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}\text{ die Ableitung von }\frac{x}{1+kx^2}$$

ist, wie die Differentiation des letzteren Bruches ergibt. Man mache also die Substitution

$$\frac{(1+k)x}{1+kx^2}=z,$$

so folgt sehr einfach:

$$J=\frac{1}{1+k}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{1+k}\operatorname{arc}(\sin=z)+C,$$

das heißt:

$$\int\frac{(1-kx^2)\,dx}{(1+kx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{1+k}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{(1+k)x}{1+kx^2}\right)+C.$$

Solcher merkwürdigen Ausnahmen von der Regel trifft man mehrere in den Werken großer Mathematiker (diese stammt, wie es scheint von Euler). Aber es sind doch Ausnahmen.

Übungen zu § 36.

1. Die Bernoullische Lemniskate

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$$

dreht sich um die x-Achse. Es ist der Rauminhalt des entstandenen Umdrehungskörpers festzustellen.

2. Dieselbe Aufgabe, wenn die Lemniskate sich um die y-Achse dreht.

3. $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^{\,9}}.$$

4. $$\int\sqrt[5]{(1-x)^{-12}(1+x)^2}\,dx.$$

5. $$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[7]{(1-x)^{11}(1+x)^3}}.$$

§ 37. Integrale transzendenter Funktionen. Teil 1.

286. Da schon algebraische Funktionen nach dem vorigen § 36 nicht immer elementar integrierbar sind, wird man bei transzendenten Funktionen in dieser Hinsicht erst recht keine allzu großen Hoffnungen haben dürfen. Doch gibt es eine große Zahl Verbindungen solcher Funktionen unter sich und mit algebraischen Funktionen, zum Teil sogar Verbindungen, welche in den Anwendungen häufig wiederkehren, bei denen dies möglich ist. Von ihnen seien die wichtigsten der Reihe nach aufgeführt.

I. Vorgelegt sei ein Integral von der Form:

$$J=\int f(e^x)\,dx, \tag{1}$$

wo f eine algebraische Funktion von e^x bezeichnet. Man setze:

$$e^x=y,\; e^x dx=dy,\; dx=\frac{dy}{e^x}=\frac{dy}{y}$$

$$J=\int f(y)\frac{dy}{y}.$$

Der Integrand ist rein algebraisch geworden. Das Integral ist also nach § 35 und § 36 zu behandeln.

Erstes Beispiel:

$$J=\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{dy}{y(1+y)},\quad (y=e^x).$$

Also Partialbruchzerlegung:

$$J=\int\frac{dy}{y}-\int\frac{dy}{1+y}=\ln y-\ln(1+y)+C$$
$$=\ln e^x-\ln(1+e^x)+C=x-\ln(1+e^x)+C.$$

Zweites Beispiel:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

Hier setzt man am besten sofort:

$$\sqrt{e^x+1}=y,\; e^x+1=y^2,\; e^x dx=2y\,dy,\; dx=\frac{2y\,dy}{y^2-1}$$

$$J=\int\frac{\frac{2y\,dy}{y^2-1}}{y}=2\int\frac{dy}{y^2-1}=\ln\frac{y-1}{y+1}+C$$

$$J=\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C.$$

Drittes Beispiel:

$$J = \int \sqrt{\mathfrak{Cof}\, x}\, dx = \int \sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}\, dx; \; y = e^x$$

$$J = \int \sqrt{\frac{y + \frac{1}{y}}{2}} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{y^2 + 1}{y}} \cdot \frac{dy}{y}$$

Das Integral gehört nach der Substitution zu den elliptischen Integralen, läßt sich also elementar nicht lösen.

II. Von Integralen, in denen sich die Transzendenz des Integranden auf die Exponentialfunktion beschränkt, ist ferner von Wichtigkeit:

$$J_n = \int x^n e^x\, dx. \tag{2}$$

Man wende den Satz von der teilweisen Integration an und setze

$$u = x^n, \; dv = e^x\, dx, \; du = n x^{n-1}\, dx, \; v = e^x$$

$$J_n = \int u\, dv = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\, dx$$

oder:

$$J_n = x^n e^x - n J_{n-1}. \tag{3}$$

Ist n positiv und ganz, so reduziere man mit dieser Formel n auf $n-1$, dann $n-1$ auf $n-2$ usw. bis man auf:

$$J_0 = \int x^0 e^x\, dx = \int e^x\, dx = e^x$$

stößt. Also:

$$\begin{aligned} J_n &= x^n e^x - n\,(x^{n-1} e^x - (n-1)\, J_{n-2}) \\ &= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + n\,(n-1)\,(x^{n-2} e^x - J_{n-3}) \\ &\quad \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_n = e^x (x^n - n x^{n-1} + n\,(n-1)\, x^{n-2} - n\,(n-1)\,(n-2)\, x^{n-3} \cdots \\ \pm n\,(n-1) \cdots 1) + C. \end{aligned} \tag{4}$$

Ist n negativ und ganz, so kehre man (3) um;

$$J_{n-1} = \frac{x^n e^x}{n} - \frac{J_n}{n}$$

und setze nun $n - 1 = -p$, $n = -(p-1)$, so folgt:

$$J_{-p} = -\frac{e^x}{(p-1)\, x^{p-1}} + \frac{J_{-(p-1)}}{p-1}$$

oder, wenn statt p wieder n gesetzt wird:

$$\int \frac{e^x\, dx}{x^n} = -\frac{e^x}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x\, dx}{x^{n-1}}, \tag{5}$$

also, da jetzt n positiv und ganz ist, die Reduktionsformel. Doch sie bringt eine Überraschung, aber leider keine angenehme, wie in III) [284],

sondern im Gegenteil eine sehr peinliche. Man kommt nämlich nur bis auf $n = 1$ und nicht bis auf $n = 0$, denn für $n = 1$ verschwinden die Nenner rechts und die Formel versagt gerade bei dem letzten Schritt, der noch zu machen wäre. Es ist also möglich, mit ihr bis auf:

$$\int \frac{e^x\,dx}{x} \tag{6}$$

zu reduzieren, aber weiter nicht! Es ist auch auf keine andere Weise gelungen, das Integral in geschlossener Form zu ermitteln trotz aller Versuche der Mathematiker. Setzt man wie vorhin:

$$e^x = y,\ x = \ln y,$$

so nimmt es die Form an:

$$J = \int \frac{dy}{\ln y}. \tag{7}$$

(Man nennt es dann den „Integrallogarithmus“, vgl. [262].)

287. III. Ist der Integrand rein trigonometrisch von der Form:

$$f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x), \tag{1}$$

wo f irgendeine algebraische Funktion bezeichnet, so läßt sich auch die Transzendenz ganz fortschaffen, indem man irgendeine der vier trigonometrischen Funktionen als neue Veränderliche nimmt. Man setze z. B.

$$\sin x = y,\ \cos x = \sqrt{1-y^2},\ \operatorname{tg} x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},\ \operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \tag{2}$$

$$\cos x\,dx = dy,\ dx = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$J = \int f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x)\,dx$$

$$= \int f\left(y,\ \sqrt{1-y^2},\ \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},\ \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\right)\cdot\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \tag{3}$$

also keine Spur mehr von einer trigonometrischen Funktion in dem Integranden. Wohl aber ist eine Quadratwurzel aus einem Ausdruck zweiten Grades, nämlich $\sqrt{1-y^2}$ hinzugekommen zu den Irrationalitäten, welche in f möglicher Weise schon enthalten waren. Doch auch diesem Übelstand läßt sich abhelfen, entweder hinterher, wie in § 36 gezeigt, oder von vornherein durch eine etwas abgeänderte Substitution, nämlich:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z. \tag{4}$$

Es wird dann nach [51 VIII]:

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2z}{1-z^2}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1-z^2}{2z}$$

$$\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{2} = dz, \quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

$$J = \int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}, \frac{2z}{1-z^2}, \frac{1-z^2}{2z}\right)\cdot\frac{2\,dz}{1+z^2} \tag{5}$$

Es ist also keine Irrationalität hinzugetreten. War in f von Anfang an keine vorhanden, so wird der Integrand algebraisch rational.

Erstes Beispiel:

$$J = \int \frac{dx}{5+4\sin x+3\cos x}; \quad \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z\right)$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{5+\frac{8z}{1+z^2}+3\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2\,dz}{5(1+z^2)+8z+3(1-z^2)}$$

$$= \int \frac{dz}{4+4z+z^2} = \int \frac{dz}{(z+2)^2} = \int \frac{d(z+2)}{(z+2)^2} = -\frac{1}{z+2} + C.$$

$$J = -\frac{1}{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

Zweites Beispiel:

$$J = \int \frac{dx}{1+4\sin x-7\cos x}, \quad \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z\right)$$

$$= \int \frac{2\,dz}{1(1+z^2)+8z-7(1-z^2)} = \int \frac{dz}{-3+4z+4z^2}$$

$$= \int \frac{dz}{(2z+1)^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{(z+\frac{1}{2})^2-1} = \frac{1}{8}\ln\frac{2z-1}{2z+1} + C.$$

$$J = \frac{1}{8}\ln\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} + C.$$

Daß im ersten Beispiel das Integral rational ist in bezug auf $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, während im zweiten Beispiel ein Logarithmus erscheint, obgleich beidemale der Integrand dieselbe Form hatte, nur mit anderen Koeffizienten, ist auffallend genug, erklärt sich aber, wenn man allgemein reduziert:

$$J = \int \frac{dx}{a+b\sin x+c\cos x} = \int \frac{2\,dz}{(a+c)+2bz+(a-c)z^2}.$$

Die Diskriminante des quadratischen Ausdruckes im Nenner ist:

$$D = (a + c)\,(a - c) - b^2 = a^2 - (b^2 + c^2).$$

Verschwindet sie, so wird das Integral algebraisch. In der Tat ist im ersten Beispiel: $5^2 = 4^2 + 3^2$.

288. Sehr häufig treten in den Anwendungen Integrale von der Form auf:

IIIa
$$J_{m,n} = \int (\cos x)^m (\sin x)^n \, dx, \tag{1}$$

wo m und n beliebige positive oder negative ganze Zahlen sind (einschließlich 0). Bei ihnen wäre es nicht angebracht, sofort $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ als neue Veränderliche einzuführen, denn es gilt der folgende:

Lehrsatz: In dem Integral (1) läßt sich stets m oder n mittelst einfacher Reduktionsformeln um zwei Einheiten erhöhen oder erniedrigen. Nur die Reduktion von -1 auf $+1$ ist unmöglich, weil die betreffenden Formeln für diesen Fall versagen.

Der Beweis wird in [289] nachgeliefert werden. Seine Richtigkeit vorausgesetzt, ist es stets möglich, m oder n auf $+1$, oder 0, oder -1 zu reduzieren, so daß folgende neun Integrale übrig bleiben:

$$1.\ J_{+1,+1},\quad 2.\ J_{+1,0},\quad 3.\ J_{+1,-1},\quad 4.\ J_{0,+1},\quad 5.\ J_{0,0},\quad 6.\ J_{0,-1},$$
$$7.\ J_{-1,+1},\quad 8.\ J_{-1,0},\quad 9.\ J_{-1,-1}. \tag{2}$$

Sie werden wie folgt gelöst:

1. $J_{+1,+1} = \int \cos x \sin x \, dx = -\int \cos x \, d(\cos x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$

oder:

$$= \int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x \, d(\sin x) = +\tfrac{1}{2}\sin^2 x + C'$$

oder:

$$= \tfrac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = \tfrac{1}{4}\int \sin(2x)\, d(2x) = -\tfrac{1}{4}\cos 2x + C'$$

2. $J_{+1,0} = \int \cos x \, dx = \sin x + C.$

3. $J_{+1,-1} = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln \sin x + C.$

4. $J_{0,+1} = \int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

5. $J_{0,0} = \int dx = x + C.$

6. $J_{0,-1} = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}};\ \left(z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$

$$= \int \frac{dz}{z} = \ln z + C = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

7. $J_{-1,+1} = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln \cos x + C.$

8. $J_{-1,0} = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}} dz; \quad \left(z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$

$$= 2\int \frac{dz}{1-z^2} = \ln \frac{1+z}{1-z} + C = \ln \frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C,$$

oder:

$$= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)},$$

also (6)

$$= -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C = +\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C.$$

9. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{2\,dx}{\sin 2x} = \int \frac{d(2x)}{\sin(2x)},$

also (6)

$$= \ln(\operatorname{tg} x) + C.$$

Die neun Integrale sind sämtlich gelöst.

289. Es sind noch die in [288] versprochenen Rekursionsformeln zu entwickeln. Zunächst ist:

$$J_{m+2,n} + J_{m,n+2} = J_{m,n}, \tag{A}$$

oder:

$$J_{m+2,n} = J_{m,n} - J_{m,n+2}; \quad J_{m,n+2} = J_{m,n} - J_{m+2,n}. \tag{B}$$

Beweis:

$$J_{m+2,n} + J_{m,n+2} = \int (\cos x)^{m+2} \sin^n x\, dx + \int (\cos x)^m (\sin x)^{n+2}\, dx$$

$$= \int \cos x^m \sin x^n (\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx$$

$$= \int \cos^m x \sin^n x\, dx = J_{m,n}.$$

Sodann wende man auf $J_{m,n}$ den Satz von der teilweisen Integration an, trenne aber vorher von dem Produkt $(\cos x)^m (\sin x)^n$ einen Faktor, also entweder ein $\cos x$ oder ein $\sin x$ ab und vereinige ihn mit dx zu dv, d. h. man setze im ersten Fall in [250 11]:

$$u = (\cos x)^{m-1} (\sin x)^n, \quad dv = \cos x\, dx, \quad v = \sin x,$$

$$du = (m-1)(\cos x)^{m-2} \cdot (-\sin x) \cdot (\sin x)^n\, dx + n(\cos x)^{m-1} (\sin x)^{n-1} \cos x\, dx.$$

$$= -(m-1)(\cos x)^{m-2} (\sin x)^{n+1} dx + n(\cos x)^m (\sin x)^{n-1} dx$$

$$J_{m,n} = \int u\, dv = \int \cos x^m \sin x^n\, dx$$

$$= (\cos x)^{m-1}(\sin x)^{n+1} + (m-1)\int (\cos x)^{m-2}(\sin x)^{n+2}\, dx - n\int (\cos x)^m (\sin x)^n dx$$

$$= (\cos x)^{m-1}(\sin x)^{n+1} + (m-1)\, J_{m-2,\,n+2} - n\, J_{m,\,n},$$

also:

$$J_{m,\,n} = + \frac{(\cos x)^{m-1}(\sin x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} J_{m-2,\,n+2}. \tag{1}$$

Im zweiten Falle würde zu setzen sein:

$$u = (\cos x)^m (\sin x)^{n-1}, \quad dv = \sin x\, dx, \quad v = -\cos x.$$

und man erhielte entsprechend:

$$J_{m,n} = \frac{-(\cos x)^{m+1}(\sin x)^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} J_{m+2,\,n-2}. \tag{2}$$

Ferner setze man in (1) noch ein, nach (B):

$$J_{m-2,\,n+2} = J_{m-2,\,n} - J_{m,\,n},$$

also:

$$J_{m,n} = \frac{(\cos x)^{m-1}(\sin x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} J_{m-2,\,n} - \frac{m-1}{n+1} J_{m,\,n},$$

und hieraus:

$$J_{m,\,n} = \frac{(\cos x)^{m-1}(\sin x)^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} J_{m-2,\,n}. \tag{3}$$

Entsprechend wird aus (2):

$$J_{m,\,n} = - \frac{(\cos x)^{m+1}(\sin x)^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} J_{m,\,n-2}. \tag{4}$$

Ferner kehre man (3) um und ersetze m durch $m+2$:

$$J_{m,n} = - \frac{(\cos x)^{m+1}(\sin x)^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} J_{m+2,\,n}. \tag{5}$$

Ebenso kehre man (4) um und ersetze n durch $n+2$:

$$J_{m,\,n} = + \frac{(\cos x)^{m+1}(\sin x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} J_{m,\,n+2}. \tag{6}$$

Wie sind diese Reduktionsformeln anzuwenden? (1) paßt ganz vortrefflich, wenn m positiv und n negativ ist, weil dann j e d e r der beiden Exponenten seinen a b s o l u t e n Wert um zwei Einheiten verringert, z. B.:

$$\int \frac{(\cos x)^7}{(\sin x)^4} dx = - \frac{(\cos x)^6}{3(\sin x)^3} - 2\int \frac{(\cos x)^5}{(\sin x)^2} dx.$$

Nur darf nicht $n = -1$ sein, weil dann der Nenner rechts verschwindet. Ist dagegen $m = +1$, so verschwindet der Faktor vor dem Integral rechts und man erhält s o f o r t nach Hinzufügung der Integrationskonstanten:

$$\int \cos x\, (\sin x)^n\, dx = \frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1} + C, \tag{7}$$

wie auch sofort als richtig erkannt wird, wenn man $\cos x\,dx = d(\sin x)$ setzt.

Ebenso geht (2) vortrefflich, wenn m negativ und n positiv ist. Nur darf nicht $m = -1$ sein. Ist dagegen $n = +1$, so erhält man auch sofort:

$$\int (\cos x)^m \sin x\,dx = -\frac{(\cos x)^{m+1}}{m+1} + C. \tag{8}$$

Formel (3) kann man mit Erfolg anwenden, wenn m positiv, n beliebig ist. Nur darf nicht $n = -m$ sein. Für $m = +1$ erhält man zum zweitenmale (7). Formel (4) kann man mit Erfolg anwenden, wenn n positiv, m beliebig ist. Nur darf nicht $m = -n$ sein. Für $n = +1$ erhält man zum zweitenmale (8).

Formel (5) kann man mit Erfolg anwenden, wenn m negativ ist, nur darf nicht $m = -1$ sein. Ist $n = -(m+2)$, so ergibt sich sofort:

$$\int \frac{(\cos x)^m\,dx}{(\sin x)^{m+2}}\,dx = -\frac{(\cos x)^{m+1} \cdot (\sin x)^{-(m+1)}}{m+1} + C = -\frac{(\operatorname{cotg} x)^{m+1}}{m+1} + C. \tag{9}$$

Dieselbe Formel würde sich wie folgt ergeben haben:

$$\int \frac{(\cos x)^m\,dx}{(\sin x)^{m+2}} = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^m \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int (\operatorname{cotg} x)^m\,d(\operatorname{cotg} x)$$
$$= -\frac{(\operatorname{cotg} x)^{m+1}}{m+1} + C.$$

Formel (6) endlich kann man mit Erfolg anwenden, wenn n negativ ist, nur darf nicht $n = -1$ sein. Ist $m = -(n+2)$, so ergibt sich sofort:

$$\int \frac{(\sin x)^n}{(\cos x)^{n+2}}\,dx = \frac{(\operatorname{tg} x)^{n+1}}{n+1} + C. \tag{10}$$

Besonders bemerkenswert werden (1) und (2), wenn $n = -m$ oder $m = -n$ ist. Man erhält, wenn in (1) noch zuletzt n statt m geschrieben wird:

$$J_{n,-n} = \int (\operatorname{cotg} x)^n\,dx = -\frac{(\operatorname{cotg} x)^{n-1}}{n-1} - \int (\operatorname{cotg} x)^{n-2}\,dx, \tag{1a}$$

$$J_{-n,n} = \int (\operatorname{tg} x)^n\,dx = +\frac{(\operatorname{tg} x)^{n-1}}{n-1} - \int (\operatorname{tg} x)^{n-2}\,dx. \tag{2a}$$

Der Integrand wird eine Potenz der Tangente oder Kotangente. Ebenso setze man in (3) und (5) $n = 0$, wie in (4) und (6) $m = 0$. Man erhält, wenn noch in (5) und (6) $-m$ statt m und $-n$ statt n geschrieben und schließlich noch der Buchstabe m durch den Buchstaben n ersetzt wird:

$$\int (\cos x)^n \, dx = + \frac{(\cos x)^{n-1} \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int (\cos x)^{n-2} \, dx, \tag{3a}$$

$$\int (\sin x)^n \, dx = - \frac{\cos x (\sin x)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} \int (\sin x)^{n-2} \, dx, \tag{4a}$$

$$\int \frac{dx}{(\cos x)^n} = + \frac{\sin x}{(n-1)(\cos x)^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{(\cos x)^{n-2}}, \tag{5a}$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x)^n} = - \frac{\cos x}{(n-1)(\sin x)^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{(\sin x)^{n-2}}. \tag{6a}$$

290. In [289] sind die Formeln zur Reduktion des Integrals [288]:

IIIa) $$J_{m,n} = \int (\cos x)^m (\sin x)^n \, dx$$

vollständig entwickelt. Man wird gegebenenfalls diejenigen auswählen, welche am schnellsten zum Ziele führen. Es sei z. B. $m = +10$, $n = -4$, so nehme man erst zweimal [289 1] mit $m = +10$, $n = -4$, dann $m = +8$, $n = -2$:

$$\int \frac{(\cos x)^{10}}{(\sin x)^4} dx = - \frac{(\cos x)^9}{3 (\sin x)^3} - 3 \int \frac{(\cos x)^8}{(\sin x)^2} dx,$$

$$\int \frac{(\cos x)^8}{(\sin x)^2} dx = - \frac{(\cos x)^7}{\sin x} - 7 \int (\cos x)^6 \, dx.$$

Darauf nehme man (3a) in [289] und setze $n = 6$, $n = 4$, $n = 2$:

$$\int (\cos x)^6 \, dx = \frac{(\cos x)^5 \sin x}{6} + \frac{5}{6} \int (\cos x)^4 dx,$$

$$\int (\cos x)^4 \, dx = \frac{(\cos x)^3 \sin x}{4} + \frac{3}{4} \int (\cos x)^2 dx,$$

$$\int (\cos x)^2 \, dx = \frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2} x.$$

Daher nach Zusammenziehung und Hinsetzen der Integrationskonstanten

$$\int \frac{(\cos x)^{10}}{(\sin x)^4} dx = - \frac{(\cos x)^9}{3 (\sin x)^3} + \frac{3 (\cos x)^7}{\sin x} + \frac{7}{2} (\cos x)^5 \sin x + \frac{35}{8} (\cos x)^3 \sin x$$
$$+ \frac{105}{16} \cos x \sin x + \frac{105}{16} x + C.$$

Zur Probe differenziere man wieder. Man erhält rechts:

$$\left\{ + \frac{(\cos x)^{10}}{(\sin x)^4} - \frac{3 (\cos x)^8}{(\sin x)^2} + \frac{7}{2} (\cos x)^6 + \frac{35}{8} (\cos x)^4 + \frac{105}{16} (\cos x)^2 + \frac{105}{16} \right\}$$

$$+ \left\{ + \frac{9 (\cos x)^8}{3 (\sin x)^2} - 21 (\cos x)^6 - \frac{35}{2} (\cos x)^4 (\sin x)^2 - \frac{105}{8} (\cos x)^2 (\sin x)^2 - \frac{105}{16} (\sin x)^2 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(\cos x)^{10}}{(\sin x)^4} + \frac{7}{2} \cos^6 x + \frac{35}{8} \cos^4 x + \frac{105}{16} \cos^2 x + \frac{105}{16} \right\}$$

$$+ \left\{ - 21 \cos^6 x + \frac{35}{2} \cos^6 x - \frac{35}{2} \cos^4 x + \frac{105}{8} \cos^4 x - \frac{105}{8} \cos^2 x + \frac{105}{16} \cos^2 x - \frac{105}{16} \right\}$$

$$= \frac{(\cos x)^{10}}{(\sin x)^4} \quad \text{(stimmt!)}$$

Ist weder m noch n negativ, so kann man auch nach [234] die Potenzen und Produkte von $\sin x$ und $\cos x$ umformen und so die Integration auch ohne die Rekursionsformeln [289] bewerkstelligen z. B.:

$$\int(\cos x)^7 dx = \int\frac{\cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x}{64}dx$$

$$= \frac{\sin 7x}{448} + \frac{7\sin 5x}{320} + \frac{7\sin 3x}{64} + \frac{35\sin x}{64} + C,$$

$$\int(\cos x)^8 dx = \int\frac{\cos 8x + 8\cos 6x + 28\cos 4x + 56\cos 2x + 35}{128}dx$$

$$= \frac{\sin 8x}{1024} + \frac{\sin 6x}{96} + \frac{7\sin 4x}{128} + \frac{7\sin 2x}{32} + \frac{35}{128}x + C,$$

$$\int(\sin x)^7 dx = \int\frac{-\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x}{64}dx$$

$$= \frac{\cos 7x}{448} - \frac{7\cos 5x}{320} + \frac{7\cos 3x}{64} - \frac{35\cos x}{64} + C,$$

$$\int(\sin x)^8 dx = \int\frac{\cos 8x - 8\cos 6x + 28\cos 4x - 56\cos 2x + 35}{128}dx$$

$$= \frac{\sin 8x}{1024} - \frac{\sin 6x}{96} + \frac{7\sin 4x}{128} - \frac{7\sin 2x}{32} + \frac{35}{128}x + C,$$

$$\int(\cos x)^4(\sin x)^3 dx = \int\frac{-\sin 7x - \sin 5x + 3\sin 3x + 3\sin x}{64}dx$$

$$= \frac{\cos 7x}{448} + \frac{\cos 5x}{320} - \frac{\cos 3x}{64} - \frac{3\cos x}{64} + C.$$

291. Vollständige trigonometrische Integrale erstrecken sich über den ersten Quadranten. Sie entstehen daher aus den entsprechenden unbestimmten Integralen durch Einsetzen der Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ für x, den arcus. Dabei vereinfachen sich manche der in [289] aufgestellten Rekursionsformeln so sehr, daß die Endwerte sofort aufgeschrieben werden können. So ergibt sich aus (3a):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx = \left|\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,dx.$$

Es sei n positiv und größer als 1. Der Zähler des ersten Gliedes rechts verschwindet beim Einsetzen von $\frac{\pi}{2}$ wegen des ersten Faktors, da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist. Er verschwindet aber auch beim Einsetzen von 0, da $\sin 0 = 0$ ist. Also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,dx, \tag{1}$$

ebenso würde (4a) ergeben:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx. \tag{2}$$

Es sei n zunächst gerade $= 2p$. Dann führt die wiederholte Anwendung von (1) oder (2) zuletzt auf

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Daher:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\,dx = \frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{2p-3}{2p-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

oder nach Umkehrung der Reihenfolge der Faktoren:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-3)\cdot(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p-2)\cdot 2p}. \tag{3}$$

Sodann sei n ungerade $= 2p+1$. Dann führt die wiederholte Anwendung von (1) oder (2) zuletzt auf:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x = +1.$$

Daher:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x\,dx = \frac{2p}{2p+1}\cdot\frac{2p-2}{2p-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1,$$

oder nach Umkehrung der Reihenfolge der Faktoren:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x\,dx = 1\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p-2)\cdot 2p}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2p-1)\cdot(2p+1)}. \tag{4}$$

Ganz in derselben Weise ergibt sich allgemeiner:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x \sin^{2q} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{[1\cdot 3\cdots(2p-1)][1\cdot 3\cdots(2q-1)]}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2p+2q)} \tag{5}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x \sin^{2q+1} x\, dx = 1 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2q}{(2p+1)\cdot(2p+3)\cdots(2p+2q+1)} \qquad (6)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2q+1} x \sin^{2p} x\, dx = 1 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2q}{(2p+1)(2p+3)\cdots(2p+2q+1)} \qquad (7)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1} x \sin^{2q+1} x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)\, p}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p+1)} \qquad (8)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (q-1)\, q}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q+1)}.$$

Man kann aber auch Fakultäten einführen, z. B. in (3):

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-3)\cdot(2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2p-2)\cdot 2p} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdots 2p}{2 \cdot 4 \cdots 2p \cdot 2 \cdot 4 \cdots 2p}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2p-1)\cdot 2p}{2^p(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p)\cdot 2^p(1 \cdot 2 \cdots p)} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\cdot p!\, p!},$$

also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}\cdot p!\, p!}.$$

Beispiele:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{5\pi}{32},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\, dx = 1 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{16}{35},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \sin^4 x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{3\pi}{512},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \sin^5 x\, dx = 1 \cdot \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 9 \cdot 11} = \frac{8}{693}.$$

Da es bekanntlich möglich ist, auf sehr einfache Weise die trigonometrischen Funktionen in beliebigen Quadranten auf solche im ersten Quadranten zurückzuführen, so sind mit den vollständigen Integralen auch sofort solche gegeben, deren Grenzen beliebige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ sind, z. B.:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3 x\, dx = + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = + \frac{2}{3},$$

(da $\sin(\pi - x) = + \sin x$ ist.)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x\, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx = - \frac{2}{3},$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x\, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} = + \frac{4}{3},$$

$$\int_0^{\pi} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0.$$

Allgemein ist:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2p+1} x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^{2p+1} x\, dx = 0.$$

Dagegen für gerade Exponenten (a und b ganze Zahlen):

$$\int_{a\frac{\pi}{2}}^{b\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\, dx = \int_{a\frac{\pi}{2}}^{b\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x\, dx = (b - a) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2p}.$$

292. Die Formel von Wallis für die Zahl π. Nicht selten trifft man bei mathematischen Untersuchungen, wenn man ein wenig

um sich sieht, ganz unvermutet auf Beziehungen, die zunächst gar nicht zu dem Gegenstande gehörten. Daß es auch in der Integralrechnung nicht anders ist, ließe sich an zahlreichen geschichtlichen Beispielen nachweisen; hier sei nur ein einziges aufgenommen, nämlich die folgende Ableitung eines merkwürdigen Ausdruckes für die Zahl π durch ein unendliches Produkt, welches von der auffallenden Tatsache ausgeht, daß die vollständigen Integrale in [291] rationale Brüche sind, wenn der Exponent ungerade ist, dagegen die Produkte solcher Brüche und der Zahl π, wenn er gerade ist.

Man betrachte die drei Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x\,dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\,dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x\,dx.$$

Das erste hat einen größeren Wert als das zweite und dieses wieder einen größeren als das dritte, da $\sin x$ (im ersten Quadranten) ein positiver echter Bruch ist, also seine Potenz mit dem Exponenten abnimmt. Daher nach [291]:

$$1 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2p-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2p-1)} > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2p} > 1 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots (2p-2) \cdot 2p}{3 \cdot 5 \cdots (2p-1) \cdot (2p+1)},$$

also auch:

$$\frac{[2 \cdot 4 \cdots (2p-2)] \cdot [2 \cdot 4 \cdots 2p]}{[3 \cdot 5 \cdots (2p-1)] \cdot [1 \cdot 3 \cdots (2p-1)]} > \frac{\pi}{2} > \frac{[(2 \cdot 4 \cdots (2p-2) \cdot 2p][2 \cdot 4 \cdots 2p]}{[3 \cdot 5 \cdots (2p-1)(2p+1)][1 \cdot 3 \cdots (2p-1)]}.$$

Man setze den ersten Bruch $= A_p$, dann ist der zweite

$$= A_p \cdot \frac{2p}{2p+1} = A_p\left(1 - \frac{1}{2p+1}\right).$$

Daher:

$$A_p > \frac{\pi}{2} > A_p\left(1 - \frac{1}{2p+1}\right),$$

und also, wenn p unbegrenzt wächst, oder $\lim 1 : 2p + 1 = 0$ wird:

$$\frac{\pi}{2} = \lim A_p, \quad \frac{\pi}{4} = \lim \frac{A_p}{2}.$$

Nun folgt nach Umstellung der Faktoren in Zähler und Nenner:

$$\frac{A_p}{2} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdots \frac{(2p-2) \cdot 2p}{(2p-1)(2p-1)},$$

also:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdots \frac{(2p-2) \cdot 2p}{(2p-1)(2p-1)} \cdots \text{ in inf.}$$

Dies ist das unendliche Produkt für die Zahl π, welches zuerst Wallis gefunden hat. Da:

$$\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = 1 - \frac{1}{3^2}; \quad \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} = 1 - \frac{1}{5^2}, \cdots$$

ist, so kann man auch schreiben:

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2p-1)^2}\right) \cdots \text{ in inf.}$$

Die Konvergenz ist freilich recht schlecht, aber es sollte ja hier auch nur eine Blume im Vorbeigehen gepflückt werden.

Übungen zu § 37.

1. $$J = \int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{(1+e^x)^2(1-e^x)}},$$

2. $$J = \int \frac{\cos^{11} x}{\sin^5 x}\, dx.$$

3. Quadratur und Rektifikation der Astroide [200].
4. Das Integral

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

soll durch die Substitution $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sin y}{\sqrt{2}}$ umgeformt werden.

Darauf ist das Integral durch Entwicklung des Integranden in eine unendliche Reihe zu lösen.

5. Rektifikation der Bernoullischen Lemniskate auf Grund von (4).

§ 38. Integrale transzendenter Funktionen. Teil 2.

293. Es seien noch einige Fälle behandelt, in denen ein transzendenter oder ein gemischt algebraisch transzendenter Integrand sich elementar integrieren läßt. Zunächst sei vorgelegt:

$$J = \int x^n \cos x\, dx.$$

Man wende die Formel für die teilweise Integration an und setze:

$$u = x^n. dv = \cos x\, dx; \quad du = n x^{n-1} dx, \; v = \sin x$$

$$\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\, dx. \tag{1}$$

Entsprechend ist:

$$\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx. \tag{2}$$

Ist n eine positive ganze Zahl, so wende man abwechselnd (1) und (2) an; bis man zuletzt auf

$$\int x^0 \cos x\, dx = \sin x; \quad \text{oder} \quad \int x^0 \sin x\, dx = -\cos x$$

stößt. Beispiel:

$$\begin{aligned}\int x^5 \cos x\,dx &= x^5 \sin x - 5\int x^4 \sin x\,dx \\ &= x^5 \sin x + 5x^4 \cos x - 20\int x^3 \cos x\,dx \\ &= x^5 \sin x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \sin x + 60\int x^2 \sin x\,dx \\ &= x^5 \sin x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \sin x - 60x^2 \cos x + 120\int x \cos x\,dx \\ &= x^5 \sin x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \sin x - 60x^2 \cos x + 120x \sin x \\ &\qquad + 120 \cos x + C \\ &= \sin x(x^5 - 20x^3 + 120x) + \cos x(5x^4 - 60x^2 + 120) + C.\end{aligned}$$

Für negative Exponenten kehre man um und setze $-n$ an Stelle von $n-1$, also $-(n-1)$ an Stelle von n. Es wird

$$\int \frac{\sin x\,dx}{x^n} = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx. \tag{1a}$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{x^n} = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin x}{x^{n-1}}\,dx. \tag{2a}$$

Ist n eine ganze Zahl, so wende man abwechselnd (1a) und (2a) an, bis man auf

$$\int \frac{\cos x\,dx}{x} \quad \text{oder} \quad \int \frac{\sin x\,dx}{x} \tag{3}$$

stößt. Dann aber versagen die beiden Reduktionsformeln, weil für $n = 1$ die Nenner unendlich groß werden. In der Tat hat man auf keine Weise die beiden Integrale (3) elementar lösen können, also genau wie in [286 6]. Beispiel:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\,dx}{x^4} &= -\frac{\sin x}{3x^3} + \frac{1}{3}\int \frac{\cos x\,dx}{x^3} \\ &= -\frac{\sin x}{3x^3} - \frac{1}{6}\frac{\cos x}{x^2} - \frac{1}{6}\int \frac{\sin x\,dx}{x^2} \\ &= -\frac{\sin x}{3x^3} - \frac{1}{6}\frac{\cos x}{x^2} + \frac{1}{6}\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{6}\int \frac{\cos x\,dx}{x}\end{aligned}$$

und damit ist die Reduktion zu Ende.

294. Vorgelegt sei ferner:

$$J = \int x^n (\cos x)^m\,dx.$$

Man integriere teilweise und setze hierzu

$$u = x^n (\cos x)^{m-1}, \quad dv = \cos x\, dx, \quad v = \sin x.$$

$$du = n x^{n-1} (\cos x)^{m-1} dx - (m-1) x^n (\cos x)^{m-2} \sin x\, dx.$$

$$\int x^n (\cos x)^m dx = x^n (\cos x)^{m-1} \sin x - n \int x^{n-1} (\cos x)^{m-1} \sin x\, dx$$
$$+ (m-1) \int x^n (\cos x)^{m-2} \sin^2 x\, dx.$$

Nun wandele man das zweite Integral rechts um in:

$$\int x^n (\cos x)^{m-2} (1 - \cos^2 x) dx = \int x^n (\cos x)^{m-2} dx - \int x^n (\cos x)^m dx,$$

bringe dann das letzte Integral auf die rechte Seite und dividiere durch m. Es folgt:

$$\int x^n (\cos x)^m dx = \frac{x^n (\cos x)^{m-1} \sin x}{m} - \frac{n}{m} \int x^{n-1} (\cos x)^{m-1} \sin x\, dx$$
$$+ \frac{m-1}{m} \int x^n (\cos x)^{m-2} dx. \tag{1}$$

Auf das erste Integral rechts wende man noch einmal die teilweise Integration an und setze hierzu:

$$u = x^{n-1}, \; dv = (\cos x)^{m-1} \sin x\, dx; \; du = (n-1) x^{n-2} dx, \; v = -\frac{(\cos x)^m}{m}$$

$$\int x^{n-1} (\cos x)^{m-1} \sin x\, dx = -\frac{x^{n-1} (\cos x)^m}{m} + \frac{n-1}{m} \int x^{n-2} (\cos x)^m dx.$$

Daher endlich die gesuchte Reduktionsformel:

$$\int x^n (\cos x)^m dx = \frac{x^n (\cos x)^{m-1} \sin x}{m} + \frac{n x^{n-1} (\cos x)^m}{m^2}$$
$$- \frac{n(n-1)}{m^2} \int x^{n-2} (\cos x)^m dx + \frac{m-1}{m} \int x^n (\cos x)^{m-2} dx. \tag{2}$$

Sind n und m beide positiv und ganz, so hilft diese Formel, denn in dem ersten Integral rechts ist n und im zweiten m um zwei Einheiten erniedrigt. Ist im besonderen $n = 1$, so folgt:

$$\int x (\cos x)^m dx = \frac{x (\cos x)^{m-1} \sin x}{m} + \frac{(\cos x)^m}{m^2} + \frac{m-1}{m} \int x (\cos x)^{m-2} dx. \tag{2a}$$

Ist $m = 1$, so folgt (wie auch aus Verbindung von (1) und (2) in [293])

$$\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x\, dx \tag{2b}$$

und so können m oder n auf 1 oder 0 gebracht werden, also daß nur die vier Fälle zuletzt übrigbleiben:

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \sin x, \quad \int x\, dx = \frac{x^2}{2},$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x, \quad \int dx = x.$$

Beispiel:

$$\int x^4(\cos x)^3 dx = \frac{x^4(\cos x)^2 \sin x}{3} + \frac{4x^3(\cos x)^3}{9} - \frac{4}{3}\int x^2(\cos x)^3 dx + \frac{2}{3}\int x^4 \cos x\, dx,$$

$$\int x^2(\cos x)^3 dx = \frac{x^2(\cos x)^2 \sin x}{3} + \frac{2x\cos^3 x}{9} - \frac{2}{9}\int \cos^3 x\, dx + \frac{2}{3}\int x^2 \cos x\, dx,$$

$$\int x^4 \cos x\, dx = x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 12\int x^2 \cos x\, dx,$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x,$$

$$\int (\cos x)^3 dx = \frac{(\cos x)^2 \sin x}{3} + \frac{2}{3}\sin x,$$

also, wenn man einsetzt, zusammenzieht und C hinzusetzt

$$\int x^4 \cos^3 x\, dx = \frac{\cos^2 x \sin x}{3}\left(x^4 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{27}\right) + \frac{\cos^3 x}{9}\left(4x^3 - \frac{8x}{3}\right)$$
$$+ \frac{\sin x}{3}\left(2x^4 - \frac{80}{3}x^2 + \frac{1456}{27}\right) + \frac{\cos x}{3}\left(8x^3 - \frac{160}{3}x\right) + C.$$

Ist n oder m negativ, so kehre man (2) um, indem man das erste oder das zweite Integral rechts entwickelt und dann $n-2$ oder $m-2$ durch $-n$ oder $-m$ ersetzt. Man erhält dann

$$\int \frac{(\cos x)^m}{x^n} dx = \frac{m(\cos x)^{m-1}\sin x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{(\cos x)^m}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{m^2}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\cos^m x\, dx}{x^{n-2}}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}\int \frac{(\cos x)^{m-2}}{x^{n-2}} dx. \tag{3}$$

$$\int \frac{x^n}{(\cos x)^m} dx = \frac{x^n \sin x}{(m-1)(\cos x)^{m-1}} - \frac{n x^{n-1}}{(m-1)(m-2)(\cos x)^{m-2}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^n\, dx}{(\cos x)^{m-2}}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{(m-1)(m-2)}\int \frac{x^{n-2}\, dx}{(\cos x)^{m-2}}. \tag{4}$$

Doch versagen diese Reduktionsformeln (3) und (4) augenscheinlich für $n = 2$, $n = 1$ oder für $m = 2$, $m = 1$, so daß durch sie folgende vier Formen:

$$\int \frac{(\cos x)^m dx}{x^2}, \quad \int \frac{(\cos x)^m dx}{x}, \quad \int \frac{x^n\, dx}{(\cos x)^2}, \quad \int \frac{x^n\, dx}{\cos x}$$

nicht mehr vereinfacht werden können. Sie sind auch nicht elementar lösbar, mit einer einzigen Ausnahme in der dritten Form, nämlich:

$$\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}.$$

Wendet man auf sie die teilweise Integration an und setzt:

$$u = x, \quad dv = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad du = dx, \quad v = \operatorname{tg} x, \quad \text{so folgt}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\, dx = x \operatorname{tg} x + \ln \cos x + C.$$

Sind aber n und m beide negativ in (1), so kann man zwar durch (1), (2), (3) oder (4) umformen, aber keine Erleichterung erzielen.

Entsprechend zu (1) sind Integrale von der Form:

$$J = \int x^n (\sin x)^m\, dx$$

zu behandeln. Die zugehörigen Formeln werden genau ebenso abgeleitet wie die Formeln (1), (2), (3) und (4). Doch ist auf sie verzichtet worden, weil diese Nummer überhaupt nur erläutern sollte, wie man unter Umständen auch in einem schwierigeren Falle reduzieren kann.

295. Vorgelegt seien die beiden Integrale:

$$J_1 = \int e^{ax} \cos bx\, dx, \quad J_2 = \int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Man wende auf beide die teilweise Integration an und setze hierzu im ersten Integral:

$$u = e^{ax}, \quad dv = \cos bx\, dx, \quad du = a e^{ax}\, dx, \quad v = \frac{\sin bx}{b}$$

und im zweiten Integral:

$$u = e^{ax}, \quad dv = \sin bx\, dx, \quad du = a e^{ax}\, dx, \quad v = -\frac{\cos bx}{b},$$

so folgt:

$$J_1 = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} J_2; \quad J_2 = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} J_1, \quad \text{also:}$$

$$J_1 = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} J_1,$$

oder nach Hinzufügung der Integrationskonstante:

$$J_1 = \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

und ebenso:

$$J_2 = \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Vorgelegt sei ferner:

$$J = \int e^{ax} (\cos bx)^m\, dx.$$

Man setze:

$$u = e^{ax}(\cos bx)^{m-1}, \quad dv = \cos bx\,dx, \quad v = \frac{\sin bx}{b},$$

$$du = ae^{ax}(\cos bx)^{m-1}dx - (m-1)be^{ax}(\cos bx)^{m-2}\sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}(\cos bx)^m dx = \frac{e^{ax}(\cos bx)^{m-1}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}(\cos bx)^{m-1}\sin bx\,dx$$
$$+ (m-1)\int e^{ax}(\cos bx)^{m-2}(\sin bx)^2 dx.$$

Weiter forme man das erste Integral rechts um und setze

$$u = e^{ax}, \quad dv = (\cos bx)^{m-1}\sin bx\,dx,$$

$$du = ae^{ax}dx, \quad v = -\frac{(\cos bx)^m}{mb},$$

$$\int e^{ax}(\cos bx)^{m-1}\sin bx\,dx = -\frac{e^{ax}(\cos bx)^m}{mb} + \frac{a}{mb}\int e^{ax}(\cos bx)^m dx,$$

in dem zweiten Integrale rechts setze man:

$$(\sin bx)^2 = 1 - (\cos bx)^2,$$

so folgt:

$$\int e^{ax}(\cos bx)^m dx = \frac{e^{ax}(\cos bx)^{m-1}\sin bx}{b}$$
$$+ \frac{ae^{ax}}{mb^2}(\cos bx)^m - \frac{a^2}{mb^2}\int e^{ax}(\cos bx)^m dx$$
$$+ (m-1)\int e^{ax}(\cos bx)^{m-2}dx - (m-1)\int e^{ax}(\cos bx)^m dx$$

und hieraus:

$$\int e^{ax}(\cos bx)^m dx = \frac{mbe^{ax}(\cos bx)^{m-1}\sin bx + ae^{ax}(\cos bx)^m}{a^2 + m^2b^2}$$
$$+ \frac{m(m-1)b^2}{a^2 + m^2b^2}\int e^{ax}(\cos bx)^{m-2}dx.$$

Entsprechend:

$$\int e^{ax}(\sin bx)^m dx = \frac{-mbe^{ax}(\sin bx)^{m-1}\cos bx + ae^{ax}(\sin bx)^m}{a^2 + m^2b^2}$$
$$+ \frac{m(m-1)b^2}{a^2 + m^2b^2}\int e^{ax}(\sin bx)^{m-2}dx.$$

296. Um die fünf Integrale:

$$\int \ln x\,dx, \quad \int \mathrm{arc}(\sin = x)dx, \quad \int \mathrm{arc}(\cos = x)dx, \quad \int \mathrm{arc}(\mathrm{tg} = x)dx,$$
$$\int \mathrm{arc}(\mathrm{cotg} = x)dx$$

zu lösen, wendet man am besten gleichfalls die teilweise Integration an und setzt dabei stets

$$dv = dx, \quad v = x,$$

also der Reihe nach:

$$u = \ln x, \quad \operatorname{arc}(\sin = x), \quad \operatorname{arc}(\cos = x), \quad \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x), \quad \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x),$$

$$du = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{dx}{1+x^2}, \quad -\frac{dx}{1+x^2}$$

und erhält:

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int \frac{x\, dx}{x} = x \ln x - x + C,$$

$$\int \operatorname{arc}(\sin = x)\, dx = x \operatorname{arc}(\sin = x) - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= x \operatorname{arc}(\sin = x) + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \operatorname{arc}(\cos = x)\, dx = x \operatorname{arc}(\cos = x) + \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^1}}$$
$$= x \operatorname{arc}(\cos = x) - \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)\, dx = x \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) - \int \frac{x\, dx}{1+x^2}$$
$$= x \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

$$\int \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x)\, dx = x \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) + \int \frac{x\, dx}{1+x^2}$$
$$= x \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Wird zu den Integranden der Faktor x^n hinzugefügt, so setze man:

$$dv = x^n dx, \qquad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

und verfahre sonst wie vorhin. Es wird:

$$\int \ln x \cdot x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C,$$

$$\int \operatorname{arc}(\sin = x)\, x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc}(\sin = x) - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \operatorname{arc}(\cos = x)\, x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc}(\cos = x) + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)\, x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) - \frac{1}{(n+1)} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x^2},$$

$$\int \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x)\, x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = x) + \frac{1}{(n+1)} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x^2},$$

Die rechtsstehenden Integrale werden nach § 35 und § 36 gelöst, oder auch, indem man der Reihe nach setzt

$$x = \sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{cotg}\varphi$$

und sie in

$$\int \sin^{n+1}\varphi\, d\varphi,\quad \int \cos^{n+1}\varphi\, d\varphi,\quad \int \mathrm{tg}^{n+1}\varphi\, d\varphi,\quad \int \mathrm{cotg}^{n+1}\varphi\, d\varphi.$$

verwandelt, worauf sie nach § 37 behandelt werden können.

Übrigens darf nicht $n = -1$ sein, weil dann u nicht $= x^{n+1} : n+1$, sondern $= \ln x$ wäre. Die erste Formel muß umgewandelt werden in:

$$\int \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \int \ln x\, d \ln x = \frac{(\ln x)^2}{2} + C,$$

die anderen ergeben keine Vereinfachung, keine Lösung.

297. Noch sei eine Methode erwähnt, die zuweilen bei der Auflösung von Integralen mit Erfolg anwendbar ist. Man nennt sie die Differentiation unter dem Integralzeichen. Gesetzt in einer Integralformel sei außer der Veränderlichen x und der Integrationskonstanten C noch ein konstanter, aber sonst willkürlicher Parameter a enthalten, was symbolisch durch die Gleichung:

$$\int f(x, a)\, dx = F(x, a) + C \tag{1}$$

angedeutet sein mag. Die Umkehrung ergibt die identische Gleichung:

$$\frac{\partial F(x, a)}{\partial x} = f(x, a), \tag{2}$$

also, wenn man noch einmal, aber nach a differenziert und darauf die Reihenfolge der Differentiationen links vertauscht [167]:

$$\frac{\partial \dfrac{\partial F(x, a)}{\partial x}}{\partial a} = \frac{\partial \dfrac{\partial F(x, a)}{\partial a}}{\partial x} = \frac{\partial f(x, a)}{\partial a}$$

oder nach abermaliger Umkehrung:

$$\int \frac{\partial f(x, a)}{\partial a}\, dx = \frac{\partial (F(x,a) + C)}{\partial a} + C_1 \tag{3}$$

oder auch:

$$\int \frac{\partial f(x, a)}{\partial a}\, dx = \frac{\partial \left(\int f(x, a)\, dx\right)}{\partial a} + C_1. \tag{4}$$

Diese Formel (3) oder (4) lehrt das „Differenzieren unter dem Integralzeichen“. Ist in dem Integranden irgendwie ein Parameter a enthalten, und differenziert man ihn d. h. den Integranden nach a, so wird auch das Integral selbst nach a differenziert.

Erstes Beispiel:

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Hier ist n ein willkürlicher Parameter. Es ist nach (2a) Tafel II § 15:

$$\frac{\partial (x^n)}{\partial n} = x^n \ln x; \qquad \frac{\partial \dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{\partial n} = \frac{(n+1)\, x^{n+1} \ln x - x^{n+1} \cdot 1}{(n+1)^2},$$

also:

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C,$$

wie auch schon in [296] auf ganz andere Weise bestimmt worden war. Wendet man (4) noch einmal an, so folgt:

$$\int x^n (\ln x)^2\, dx = \frac{(n+1)\, x^{n+1} (\ln x)^2 - x^{n+1} \ln x}{(n+1)^2}$$
$$- \frac{(n+1)\, x^{n+1} \ln x - 2 x^{n+1}}{(n+1)^3} + C$$
$$= \frac{x^{n+1} (\ln x)^2}{n+1} - \frac{2\, x^{n+1} \ln x}{(n+1)^2} + \frac{2\, x^{n+1}}{(n+1)^3} + C$$

usw. Man könnte aber auch das Integral:

$$\int x^n (ln\, x)^p\, dx$$

durch die Substitution:

$$\ln (x^{n+1}) = (n+1) \ln x = y, \quad x^{n+1} = e^y, \quad (n+1)\, x^n dx = e^y dy$$

zurückführen auf:

$$\int x^n (\ln x)^p dx = \frac{1}{(n+1)^{p+1}} \int y^p e^y\, dy$$

und nun II) [286] anwenden. Es gibt oft mehrere Wege, ein Integral elementar zu lösen, wenn es überhaupt lösbar ist.

Zweites Beispiel:

$$\int \cos a x\, dx = \frac{\sin a x}{a} + C,$$

$$\frac{\partial \cos a x}{\partial a} = - \sin a x \frac{\partial a x}{\partial a} = - x \sin a x,$$

$$\frac{\partial \dfrac{\sin a x}{a}}{\partial a} = \frac{a x \cos a x - \sin a x}{a^2},$$

also:

$$\int x \sin a x\, dx = \frac{\sin a x - a x \cos a x}{a^2} + C.$$

Für $a = 1$ kommt man wieder auf [294] zurück.

Drittes Beispiel:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} = \frac{x}{a}\right) + C,$$

$$\frac{\partial \dfrac{1}{a^2 + x^2}}{\partial a} = \frac{-2a}{(a^2 + x^2)^2},$$

$$\frac{\partial \dfrac{1}{a} \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} = \dfrac{x}{a}\right)}{\partial a} = - \frac{1}{a^2} \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} = \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{a^2}} \left(- \frac{x}{a^2}\right),$$

daher nach (3), wenn durch $-2a$ dividiert wird:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + C.$$

298. Was in diesem achten Abschnitt über Integrationsmethoden gebracht worden ist, soll und kann durchaus nicht erschöpfend vollständig sein, da hierzu Bände gehören würden. Aber für viele Anwendungen in Geometrie, Mechanik, Technik und Naturwissenschaften reicht es doch aus.

Es liegt ja die Sache, wie schon wiederholt ausgeführt wurde, doch so, daß die Integration im elementaren Sinne oft überhaupt nicht möglich ist, selbst wenn der Integrand durchaus nur elementare Funktionen, Potenzen, Wurzeln, Exponentialfunktionen, Logarithmen usw. enthält. Man kann sogar als Regel annehmen, daß es so ist, wenn der Fall nicht zu den hier behandelten Fällen gehört oder nicht auf einfache Weise auf sie zurückführbar zu sein scheint. Dann treten eben die Ausführungen des § 33 in Kraft.

Auf alle Fälle ist mit dem Integranden die Integralfunktion implizite gegeben. Daß es nicht immer möglich ist, sie explizite so zu ermitteln, wie man gehofft und vielleicht stillschweigend angenommen hatte, kann nicht weiter befremden, wenn man an die vielen anderen Beispiele in der Mathematik denkt, in denen auch eine „glatte" Lösung sich als nicht vorhanden erwiesen hat, wie z. B. bei der Auflösung der allgemeinen Gleichungen von höherem als viertem Grade. Dann arbeitet man eben Annäherungsmethoden aus, welche gegebenenfalls den Ziffernwert auf eine beliebig vorgeschriebene Anzahl von Dezimalen liefern.

Übrigens können hier Betrachtungen ganz anderer Art angeknüpft werden, wie so oft an fehlgeschlagene Hoffnungen. Wenn sich Grenzen zeigen, über welche hinaus die Methoden versagen, so entsteht für den Mathematiker zu allererst eine ganz neue Aufgabe, nämlich die möglichst scharfe und vollständige Feststellung dieser Grenzen. Für diesen Abschnitt würde es sich darum handeln, allgemein gültige Kriterien zu ermitteln, wann die Integralfunktion zu den bekannten Funktionen gehört. Unter gewissen Einschränkungen hat man sie aufgestellt, doch würde eine solche Untersuchung weit über die Elemente der Integralralrechnung hinausführen.

Sodann erscheint, was jenseits der Grenzen liegt, als unerforschtes und meist unermeßlich großes Gebiet, das zu Entdeckungen einladet, hier besonders zur Schaffung neuer Funktionsarten, wie schon wiederholt kurz angedeutet worden ist, z. B. in [263].

299. Die Gammafunktionen. Daß Integralformeln zuweilen Anwendungen finden können, an die man zu Anfang gar nicht ge-

dacht hatte, ist in [292] an einem Beispiel gezeigt worden. Zum Schluß dieses Abschnittes noch ein zweites. Die teilweise Integration lehrt sofort die Richtigkeit der folgenden Formel:

$$\int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Man integriere zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = +\infty$ und setze dabei n als positiv voraus, so folgt:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \Big|_0^{+\infty} - x^n e^{-x} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Bei Einsetzen der Grenzen in das erste Glied rechts:

$$-x^n e^{-x}$$

verschwindet dasselbe. Denn für $x = 0$ verschwindet der erste Faktor, während der zweite $= 1$ wird. Für $\lim x = \infty$ wird der erste Faktor unendlich groß und der zweite Faktor unendlich klein. Doch ist auch dann nach [191 1]:

$$\lim_{x=+\infty} - x^n e^{-x} = - \lim_{x=+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Die vorige Gleichung wird daher sehr einfach:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx. \tag{1}$$

Ist n eine absolute ganze Zahl, so kann man durch wiederholte Anwendung von (1) zurückführen auf:

$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \Big|_0^{+\infty} - e^{-x} = +1$$

und erhält:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n(n-1) \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx = \cdots$$

$$= n(n-1)(n-2) \ldots 1,$$

oder:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n! \tag{2}$$

Ist n zwar positiv, aber keine ganze Zahl, so hat die linke Seite von (2) trotzdem einen endlichen Wert, während die rechte Seite, wenn man die alte Definition:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n \tag{3}$$

zugrunde legt, völlig gegenstandslos wird. Aber gerade, weil es so

ist, bedeutet (3) für nicht ganze n gar nichts, und so stößt man auf keinen Widerspruch, wenn erklärt wird:

Die Gleichung (2) soll die Definition der Fakultäten für beliebige positive Werte von n sein.

So sind die Fakultäten erweitert worden, denn diese Erklärung hat sich durchgesetzt.

Nach (1) gilt dann allgemein, wie in [13] für ganzzahlige n gezeigt:

$$n! = (n-1)!\,n \quad \text{oder:} \quad (n+1)! = n!\,(n+1) \tag{4}$$

und umgekehrt:

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}; \quad n! = \frac{(n+1)!}{n+1}. \tag{5}$$

Läßt man diese Rekursionsformeln auch für negative n gelten [14], so entstehen aus den Werten der Fakultät für $n = 0$ bis $n = 1$ die Werte für $n = -1$ bis $n = 0$, dann für $n = -2$ bis $n = -1$ usw. Man sieht also, daß die Definition (2) nur für $n = 0$ bis $n = 1$ benutzt zu werden braucht. So ist z. B. für $n = -\frac{1}{2}$:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Dieses Integral wird durch die Substitution:

$$\sqrt{x} = z, \quad x = z^2, \quad dx = 2z\,dz,$$

da die neuen Grenzen ebenfalls 0 und ∞ sind, verwandelt in:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = 2\int_0^\infty e^{-z^2}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz,$$

also nach [271 3]:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}\,.$$

Noch ist zweierlei zu erwähnen. Erstens: Man ersetzt das Wort Fakultät alsdann durch das Wort Gammafunktion, weil Euler sie zuerst mit dem großen griechischen Buchstaben Γ bezeichnet hat. Und zweitens ersetzt man in dem Integral n durch $n-1$, d. h. man definiert:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx,$$

so daß für ganzzahlige n sein würde:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Übungen zu § 38.

1. Das Integral

$$J = \int x \sin^3 x e^x dx$$

ist zu berechnen.

2. Das Integral

$$J = \int \frac{dx}{(a^3 + x^3)^2}$$

ist aus dem Integral

$$J = \int \frac{dx}{a^3 + x^3}$$

durch „Differenzieren unter dem Integralzeichen" abzuleiten. Setze nachher $a = 1$ und vergleiche mit D) in [279].

3. A) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$; B) $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$.

4. Gegeben allgemein:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}};$$

zwischen J_n, J_{n+1} und J_{n+2} soll durch teilweise Integration eine Beziehung gesucht werden. Zurückführung von J_3 auf J_0 und J_1.

Neunter Abschnitt.

Differentialgleichungen.

§ 39. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

300. Dieser von den Differentialgleichungen handelnde letzte Abschnitt beschränkt sich auf das Einfachste und Notwendigste und soll nur eine Einführung sein in ein unermeßlich weites Gebiet, auf welchem die vorangegangenen Lehren der Differential- und Integralrechnung erst zur vollsten Geltung kommen.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ist irgend eine Gleichung zwischen einer ursprünglichen Veränderlichen x, einer zu bestimmenden Funktion derselben oder der abhängigen Veränderlichen y und der Ableitung y' von y nach x. Also eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

oder auch von der Form:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1a}$$

oder auch, wenn $y' = \frac{dy}{dx}$ explizite entwickelt ist, von der Form:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \tag{1b}$$

oder auch, wenn mit dx multipliziert wird, von der Form:

$$dy - \varphi(x, y)\, dx = 0 \tag{1c}$$

oder endlich, völlig symmetrisch, von der Form:

$$f(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy = 0. \tag{1d}$$

Es darf x oder y fehlen, d. h. (1) darf übergehen in:

$$F(x, y') = 0 \quad \text{oder} \quad F(y, y') = 0.$$

Dagegen darf y' nicht fehlen, weil sonst die Gleichung eine Endgleichung zwischen x und y sein würde, aber keine Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung (1) lösen oder integrieren, heißt y als Funktion von x:

$$y = f(x) \tag{2}$$

so bestimmen, daß nach Einsetzen von (2) und von

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{3}$$

Gleichung (1) zu einer Identität wird:

$$F(x, f(x), f'(x)) \equiv 0, \tag{4}$$

d. h. für jeden Wert von x richtig ist.

Um zu prüfen, ob eine Funktion (2) der Gleichung (1) genügt, hat man also durch Differentiation (3) zu bilden und dann (2) und (3) in (1) einzusetzen. Diese Probe erfordert also nur Kenntnisse aus der Differentialrechnung, während die Auffindung von (2) selbst, wie sich zeigen wird, durch eine Integration geschieht. Im Zusammenhang hiermit unterscheidet man die allgemeine und irgend eine besondere oder partikuläre Lösung. Erstere enthält eine völlig willkürliche Konstante, über welche man beliebig verfügen kann und letztere entsteht aus ersterer, wenn man dieser Konstanten einen gegebenen Wert beilegt. Außerdem kann es noch sogenannte singuläre Lösungen geben [302].

301. Unerschöpflich sind die Fragen aus der Analysis, der Geometrie, der Mechanik, den Naturwissenschaften, welche auf Differentialgleichungen führen und deren Integration verlangen. Einige Beispiele zur Erläuterung:

I. Welche Funktion stimmt mit ihrer Ableitung überein? Es soll sein:

$$y' = y \quad \text{oder} \quad dy = y\,dx. \tag{1}$$

Die Integration geschieht hier durch Trennung der Veränderlichen. Man dividiert durch y, schreibt also:

$$\frac{dy}{y} = dx,$$

macht vor beide Seiten das Intergralzeichen:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx,$$

integriert und setzt eine beliebige Konstante auf die rechte oder linke Seite (oder auch auf beide Seiten, doch würde dann doch nur eine Konstante, nämlich die Differenz bleiben):

$$\ln y = x + C,$$

und durch Auflösung nach y:

$$y = e^{x+C} = e^x \cdot e^C = ke^x, \tag{2}$$

wo $k = e^C$ nun nicht mehr eine additive Konstante, sondern einen

konstanten Faktor bezeichnet. Daß (2) wirklich die Lösung von (1) ist, erprobt man durch Differenzieren:

$$y' = k\frac{de^x}{dx} = ke^x, \quad \text{also:} \quad y' = y.$$

II. Welche Funktion ist identisch mit dem reziproken Wert ihrer Ableitung?

$$y' = \frac{1}{y}, \quad dy = \frac{dx}{y}, \quad y\,dy = dx. \tag{3}$$

$$\int y\,dy = \int dx, \quad \frac{y^2}{2} = x + C.$$

$$y = \sqrt{2(x+C)}. \tag{4}$$

(4) ist die Lösung von (3). In der Tat ergibt die Differentiation:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2(x+C)}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2(x+C)}} = \frac{1}{y}.$$

III. Eine Kurve so zu finden, daß die Subtangente auf der x-Achse konstant $= l$ ist (Fig. 140). Es soll sein:

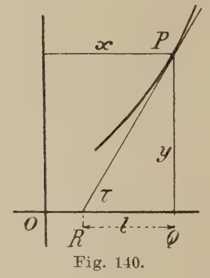


Fig. 140.

$$y = l\,\mathrm{tg}\,\tau = ly', \quad dx = l\frac{dy}{y},$$

$$x + C = l\ln y,$$

$$y = e^{\frac{x}{l} + \frac{C}{l}} = ke^{\frac{x}{l}}.$$

Dies ist die Gleichung der Exponentialkurve; vgl. [41] und [143].

IV. Eine Kurve so zu finden, daß die Subnormale auf der x-Achse konstant $= p$ ist (Fig. 141). Es soll sein:

$$p = y\,\mathrm{tg}\,\tau = yy' = \frac{y \cdot dy}{dx}, \quad y\,dy = p\,dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = px + C.$$

Fig. 141.

Dies ist die Gleichung einer Parabel mit dem Halbparameter p, deren Hauptachse auf der x-Achse liegt. Wegen der Konstante C darf sie längs der x-Achse beliebig verschoben werden, vgl. [143].

V. Eine Kurve so zu finden, daß die Normale bis zur x-Achse konstant $= r$ ist. Es soll sein:

$$\sqrt{y^2 + y^2\,\mathrm{tg}^2\,\tau} = r, \quad y^2 + y^2y'^2 = r^2, \quad y' = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y} = \frac{dy}{dx},$$

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \int dx$$

$$\pm\sqrt{r^2 - y^2} = x + C; \quad \text{oder:}$$

$$(x + C)^2 + y^2 = r^2. \tag{5}$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises mit dem Radius r, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse irgendwo liegt. In der Tat fällt hier die Normale bis zur x-Achse mit dem Radius zusammen, ist also $= r$. Übrigens ist eine singuläre Lösung vorhanden oder es sind vielmehr ihrer zwei da, nämlich:

$$y = \pm r \qquad (dy = 0),$$

also zwei Parallelen zur x-Achse im Abstande $\pm r$; daß auch für sie die Normalen bis zur x-Achse konstant $= r$ sind, ist klar wie der Tag. Ebenso klar ist, daß sie die Einhüllenden der Kreisschar (5) bilden, welche die allgemeine Lösung darstellt.

VI. Eine Kurve so zu finden, daß das Dreieck mit der Tangente vom Berührungspunkt bis zur x-Achse als Seite und O als Spitze konstant ist, $= \varDelta$ (Fig. 142). Es soll sein:

$$\triangle\, OQP = \varDelta; \quad \left(x - \frac{y}{y'}\right) y = \varDelta, \quad \text{oder:}$$

$$(xy' - y)\, y = \varDelta y'.$$

Fig. 142.

Hier ist die Trennung der Veränderlichen unmöglich, wenn man x und y beibehält. Man muß vielmehr schon mit Differentialgleichungen etwas vertraut sein, um den richtigen Weg zur Lösung zu finden. Zunächst schreibe man so:

$$(x\,dy - y\,dx)\, y = \varDelta\, dy$$

und dividiere beide Seiten durch y^3:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = \varDelta \frac{dy}{y^3}.$$

Die linke Seite wird dann nämlich das totale Differentiale von $-x:y$. Also durch Integration:

$$\frac{x}{y} = \frac{\varDelta}{2y^2} + C,$$

$$2xy - 2Cy^2 - \varDelta = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Mittelpunkt mit O und deren eine Asymptote mit der x-Achse zusammenfällt, während die andere Asymptote irgendeine durch O gehende Gerade ist. (Wer in der Theorie der Kegelschnitte bewandert ist, hätte die Lösung vorhersagen können. Denn bekanntlich schneidet jede Tangente an eine Hyperbel von den Asymptoten erstens ein Dreieck OQR von konstantem Flächeninhalt ab und zweitens wird QR durch den Berührungspunkt P, also auch das Dreieck durch seine Verbindungslinie mit O halbiert.)

VII. Gegeben eine Kreisschar, deren Kreise durch zwei feste Punkte A und B gehen. Gesucht eine Kurve QPR, welche sie sämtlich senkrecht schneidet (Fig. 143). Man nenne den Abstand der beiden Punkte $= 2l$, mache die Mitte zum Ursprung und den Abstand zur y-Achse. Dann ist die Gleichung eines beliebigen Kreises der Schar:

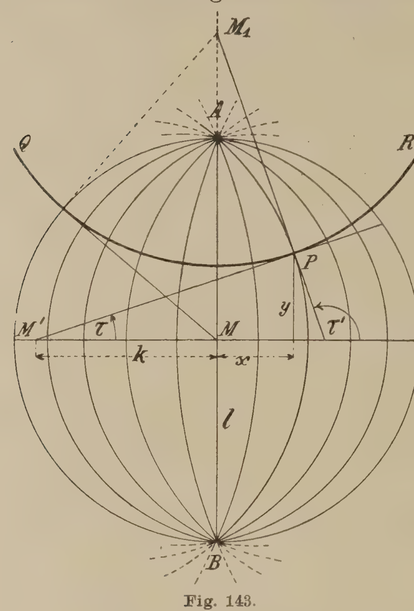


Fig. 143.

$$(x - k)^2 + y^2 = r^2,$$

oder da $r^2 = l^2 + k^2$ ist:

$$x^2 + y^2 - l^2 - 2xk = 0. \quad (6)$$

Hier ist k der Parameter der Schar. Die Differentiation ergibt für den Kreis, wenn man zur Unterscheidung für ihn dx_1 und dy_1 statt dx und dy schreibt:

$$2x dx_1 + 2y dy_1 - 2 dx_1 k = 0,$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \operatorname{tg} \tau' = \frac{k - x}{y},$$

also ist für die gesuchte Kurve:

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{1}{\operatorname{tg} \tau'}; \quad \frac{dy}{dx} = y' = -1 : \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y}{x - k}, \quad (7)$$

oder wenn man aus (6) und (7) k eliminiert:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 + l^2}. \quad (8)$$

(8) ist die Differentialgleichung, welche nun integriert werden soll. Zunächst forme man um in:

$$(x^2 - y^2 + l^2) dy - 2xy dx = 0.$$

Auch hier kann wie im sechsten Beispiel die Integration durchaus nicht „auf Anhieb“ erfolgen. Es liegt aber nahe: $x^2 = z$, $2x dx = dz$ zu setzen. Es wird dann:

$$z dy - y dz = dy (y^2 - l^2)$$

und nun dividiere man durch y^2:

$$\frac{z dy - y dz}{y^2} = dy \left(1 - \frac{l^2}{y^2}\right),$$

also, wenn man jetzt integriert (vgl. VI):

$$-\frac{z}{y} = y + \frac{l^2}{y} + C,$$

oder nach Wiedereinführung von x und Umformung:

$$x^2 + y^2 + l^2 + Cy = 0. \tag{9}$$

Auch (9) ist eine Kreisschar[1]), in der A und B Grenzpunkte vorstellen.

VIII. Eine Linse zu konstruieren, so daß alle parallel zu einer Richtung auffallenden Lichtstrahlen nach einem festen Punkte F hin gebrochen werden (Fig. 144). Es sei PQ die Normale und n der Brechungsexponent des Glases. Nach dem Brechungsgesetz ist:

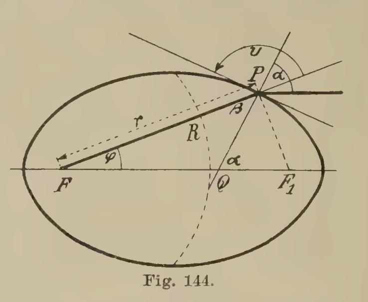


Fig. 144.

$$\sin \alpha = \sin(\varphi + \beta) = n \sin \beta,$$
$$\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi = n \sin \beta,$$
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \varphi}{n - \cos \varphi},$$

andererseits ist: $\beta = u - 90^0$, also nach IIa [170], in Polarkoordinaten r und φ

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\operatorname{tg} u} = -\frac{dr}{r d\varphi},$$

folglich:

$$\frac{-dr}{r} = \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{n - \cos \varphi}.$$

Die Integration ergibt sofort:

$$\ln r = -\ln(n - \cos \varphi) + C, \ \ln(r(n - \cos \varphi)) = C,$$

oder, wenn $e^c = nk$ gesetzt wird:

$$r = \frac{k}{1 - \frac{\cos \varphi}{n}}.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, welche F zum Brennpunkt hat. Ihre numerische Exentrizität ist $= 1 : n$ und ihr Halbparameter ist $= k$, also beliebig. Schneidet man von ihr, oder vielmehr von dem durch Drehung entstandenen Umdrehungsellipsoid mittelst einer Kugel (punktiert) eine Linse aus, so vereinigen sich die Lichtstrahlen in F, da sie auf die Kugel senkrecht auffallen, also in R nicht etwa zum zweiten Mal gebrochen werden. Leider hat sich dieses von Cartesius aufgestellte Ideal einer Linse nicht verwirklichen lassen. Erstens ist man nicht imstande, Glas genau elliptisch zu schleifen und zweitens haben die verschiedenen Farben, aus denen das weiße Licht zusammengesetzt ist, verschiedene Brechungsexponenten n.

302. Die acht Beispiele zeigen wohl deutlich genug, wie man auf Differentialgleichungen erster Ordnung kommen kann

1) In der stereographischen Projektion der Kugel sind (6) die Meridiane und (9) die Parallelkreise.

und auch wie man in einfacheren Fällen integriert. Stets enthielt die Lösung eine willkürliche Konstante, die aufzufindende allgemeine Funktion war von der Form:

$$y = f(x, C), \tag{1}$$

oder implizite von der Form:

$$\varphi(x, y, C) = 0. \tag{2}$$

Geometrisch ausgedrückt stellt (2) eine Kurvenschar vor. Jede Kurve dieser Schar erfüllt die vorgelegte Differentialgleichung.

Wenn umgekehrt irgendeine Kurvenschar (2) gegeben ist, so läßt sich wie folgt diejenige Differentialgleichung ermitteln, welcher jede Kurve genügt. Man differenziere (2) total und beachte, daß C konstant ist. Es folgt:

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0, \tag{3}$$

oder:

$$\varphi'_x + \varphi'_y \cdot y' = 0. \tag{3a}$$

Eliminiert man C aus (2) und (3a), so bleibt eine Endgleichung zwischen x, y, y', d. h. die gesuchte Differentialgleichung:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{4}$$

Beispiel. Es ist die Differentialgleichung für eine Schar konfokaler Kegelschnitte zu ermitteln. Gleichung (2) lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0, \tag{5}$$

wo e die gegebene, allen Kegelschnitten gemeinsame Exentrizität ist und a^2 die Stelle der Konstante C vertritt. Gleichung (2) wird:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{a^2 - e^2} = 0. \tag{6}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y', die zweite mit $-y$, so folgt durch Addition:

$$\frac{x}{a^2}(xy' - y) = y', \quad a^2 = \frac{x(xy' - y)}{y'}.$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\frac{y}{a^2 - e^2}(xy' - y) = -1, \quad a^2 - e^2 = -y(xy' - y),$$

und also nach Elimination von a^2:

$$\frac{x(xy' - y)}{y'} + y(xy' - y) = e^2,$$

oder:

$$xy(y')^2 + (x^2 - y^2 - e^2)y' - xy = 0. \tag{7}$$

(7) ist die gesuchte Differentialgleichung. Ihr muß jede Ellipse und Hyperbel aus der Schar (5) genügen.

Zum allgemeinen Fall sei noch nachgetragen:

Erstens. Bestimmung der Integrationskonstanten. In (2) hat man wegen der Konstanten C sozusagen unendlich viele Lösungen. Wenn nun, wie bei bestimmten Aufgaben oft der Fall, nur eine ganz bestimmte Lösung in Betracht kommt, so ist sie aus der allgemeinen Schar herauszugreifen durch Bestimmung von C, die aber meist erst hinterher durch „Anfangsbedingungen" erfolgt und also mit der eigentlichen Lösung der Differentialgleichung an sich gar nichts zu tun hat. So kann etwa im vierten Beispiel [301] gefordert werden, daß die Kurve durch O geht, was $C = 0$ ergeben würde, oder im achten Beispiel, daß die Linse eine bestimmte Größe haben soll, was zur Bestimmung von k führt usw.

Zweitens. Die sogenannte singuläre Lösung. Wenn (4) aus (2) und (3) oder (3a) durch Elimination von C entstanden ist, so kann umgekehrt (2) und (3) oder (3a) statt (4) nach Wiedereinführung einer Hilfsgröße C genommen werden. Ob aber dieses C nun wirklich konstant ist, läßt sich wie folgt ausmachen. Man differenziere (2) total nach x, y und C. Es ergibt sich:

$$\varphi_x' dx + \varphi_y' dy + \varphi_C' dC = 0,$$

also nach (3):

$$\varphi_C' dC = 0,$$

mithin entweder $dC = 0$, d. h. C ist eine Konstante, wie anfänglich vorausgesetzt wurde, oder:

$$\varphi_C' = 0.$$

Diese Gleichung gibt in Verbindung mit (3) nach § 24 die Einhüllende der Kurvenschar, d. h. die sogenannte singuläre Lösung, welche in der allgemeinen Lösung nicht enthalten ist, also nicht aus ihr durch Einsetzen eines besonderen Wertes für C folgt.

303. Der Übergang von einer gegebenen allgemeinen Gleichung (2) [302] zur zugehörigen Differentialgleichung (4) ist also streng vorgezeichnet und erfordert eine Differentiation und eine Elimination. Anders aber, wenn irgendeine Differentialgleichung:

$$F(x, y, y') = 0$$

als gegeben vorliegt und die vorläufig gänzlich unbekannte allgemeine Hauptgleichung

$$y = f(x, C) \text{ oder } \varphi(x, y, C) = 0$$

gesucht wird. Man wird, wie die acht Beispiele gezeigt haben, integrieren müssen, das steht fest! Aber wie das 7. und 8. Beispiel weiter gezeigt haben, sind, ehe es soweit kommt, erst Umformungen zu machen. Welche aber, das herauszubringen, macht eben die besonderen Schwierigkeiten bei der Lösung einer gegebenen Differential-

gleichung aus. Während z. B. jeder, der differenzieren kann, in [302] von (5) zu (7) auf vorgeschriebenem Wege gelangt, muß man schon sehr gründlich mit der Lösung von Differentialgleichungen vertraut sein, um von (7), wenn diese Gleichung ohne jede Erläuterung, so wie sie ist, vorgelegt wird, auf (5) kommen zu können. Denn (7) kann niemand, und sei er der genialste Mathematiker der Welt, sofort ansehen, daß sie aus (5) und (6), die gar nicht gegeben sind, durch Elimination von a^2 entstehen würde.

Es gibt auch keine für alle Differentialgleichungen gültige Vorschrift betreffend eine Umformung, welche die Integration erst möglich machen solle. Man hat sich vielmehr auf besondere Vorschriften beschränken müssen, die aber nur in besonderen Fällen passen. Die einfachsten unter ihnen sind in den folgenden Nummern enthalten.

304. Erster Fall. In der Differentialgleichung fehle y, d. h. sie sei von der Form:

$$F(x, y') = 0,$$

oder, wenn y' explizit berechnet wird:

$$y' = f(x), \quad dy = f(x)dx,$$

d. h. zu $f(x)$ ist die Integralfunktion:

$$y = \int f(x)dx + C$$

zu ermitteln. Das Problem, eine gegebene Funktion $f(x)$ zu integrieren, dem der größte Teil des siebenten und der ganze achte Abschnitt gewidmet war, erscheint hiernach trotz seiner großen Allgemeinheit erst als der einfachste Fall des Problems, Differentialgleichungen zu lösen. Man betrachtet deshalb in der Regel eine gegebene Differentialgleichung bereits als gelöst, wenn sie auf Integrale oder auch, wie man sagt, auf Quadraturen zurückgeführt worden ist.

Zweiter Fall. In der Differentialgleichung fehle x, d. h. sie sei von der Form:

$$F(y, y') = 0,$$

oder, wenn y' explizit berechnet wird:

$$y' = f(y), \quad dy = f(y)dx, \quad \frac{dy}{f(y)} = dx.$$

Die Integration ergibt:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C.$$

Nach Ausführung der Integration wird x eine Funktion von y und durch Umkehrung y eine Funktion von x. Die Differentialgleichung ist gelöst. Beispiel:

$$y' = \sqrt{a^2 - y^2}, \; dy = \sqrt{a^2 - y^2}\,dx, \; dx = \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \int \frac{d\left(\frac{y}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}},$$

$$x = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{a}\right) + C, \; \frac{y}{a} = \sin(x - C),$$

$$y = a \sin(x - C).$$

Dritter Fall. Die Differentialgleichung sei homogen in bezug auf x und y, d. h. alle ihre Glieder seien in bezug auf x und y von demselben Grade. Dann wird y' nach expliziter Auflösung einer solchen Gleichung eine Funktion von $y:x$,

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \; dy = f\left(\frac{y}{x}\right) dx.$$

Man setze:

$$\frac{y}{x} = z, \; y = xz, \; dy = x\,dz + z\,dx$$

und die Differentialgleichung erhält die Form:

$$x\,dz + z\,dx = f(z)\,dx; \; x\,dz = dx(f(z) - z),$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}; \; \ln x = \int \frac{dz}{f(z) - z} + C.$$

Nach Ausführung der Integration rechts und Wiederherstellung des Wertes für z entsteht die Endgleichung zwischen x und y.

Erstes Beispiel:

$$(x + y)\,dx + (x + 3y)\,dy = 0.$$

Die Substitution von z ergibt:

$$(x + xz)\,dx + (x + 3xz)(x\,dz + z\,dx) = 0,$$

oder nach Division durch x

$$(1 + 2z + 3z^2)\,dx + x\,dz(1 + 3z) = 0, \; \frac{dx}{x} = -\frac{dz(1 + 3z)}{1 + 2z + 3z^2},$$

$$\ln x = -\int \frac{dz(1 + 3z)}{1 + 2z + 3z^2} + C = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1 + 2z + 3z^2)}{1 + 2z + 3z^2} + C,$$

$$\ln x = -\tfrac{1}{2} \ln(1 + 2z + 3z^2) + C,$$

oder

$$\ln(x^2) + \ln(1 + 2z + 3z^2) = 2C, \; \ln(x^2(1 + 2z + 3z^2)) = 2C,$$

oder, wenn $e^{2C} = k$ gesetzt wird:

$$x^2(1 + 2z + 3z^2) = k,$$

oder

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = k.$$

Zweites Beispiel:

$$(x + y + 3)dx + (x + 3y + 5)dy = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist zwar nicht homogen, kann aber homogen gemacht werden. Man setze:

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta, \quad dx = dx_1, \quad dy = dy_1,$$

$$(x_1 + \alpha + y_1 + \beta + 3)dx_1 + (x_1 + \alpha + 3y_1 + 3\beta + 5)dy_1 = 0.$$

α und β können so bestimmt werden, daß:

$$\alpha + \beta + 3 = 0; \quad \alpha + 3\beta + 5 = 0$$

wird. Die Auflösung ergibt:

$$\alpha = -2, \quad \beta = -1.$$

Die Differentialgleichung wird alsdann:

$$(x_1 + y_1)dx_1 + (x_1 + 3y_1)dy_1 = 0,$$

also identisch mit derjenigen des ersten Beispiels, nur x_1 und y_1 statt x und y geschrieben. Ihre Lösung ist daher:

$$x_1^2 + 2x_1y_1 + 3y_1^2 = k,$$

oder nach Wiedereinsetzung von:

$$x_1 = x - \alpha = x + 2, \quad y_1 = y - \beta = y + 1,$$

$$(x + 2)^2 + 2(x + 2)(y + 1) + 3(y + 1)^2 = k$$

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x + 10y + k_1 = 0; \quad k_1 = 11 - k.$$

Vierter Fall. Die Differentialgleichung ist linear, d. h. in bezug auf y und y' vom ersten Grade, aber in bezug auf x beliebig geartet. Sie soll also die Form haben:

$$f(x)y + \varphi(x)y' + \psi(x) = 0. \tag{1}$$

Man nennt die Funktion $\psi(x)$ das Störungsglied. Wenn es nicht vorhanden ist, also die Gleichung lautet

$$f(x)y + \varphi(x)y' = 0, \text{ oder } f(x)y + \varphi(x)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{1a}$$

so lassen sich die Veränderlichen sofort trennen. Man erhält:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx, \text{ also } \ln y = -\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx + C.$$

Die Integration rechts kann selbstverständlich erst ausgeführt werden, wenn die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ gegeben sind. Sie möge die Funktion:

$$\lambda(x) = -\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx \tag{2}$$

ergeben. So folgt:

$$y = e^{\lambda(x)+C} = e^C \cdot e^{\lambda(x)} = ke^{\lambda(x)}, \tag{3}$$

wo zur Abkürzung k für e^C gesetzt wird.

Ist aber das Störungsglied wirklich vorhanden, so hilft eine Methode, welche von Lagrange herrührt und die Variation der Konstanten heißt, wobei aber sogleich bemerkt sei, daß diese Methode viel, viel weiter trägt, als dieser allereinfachste Fall erwarten läßt. Sie beruht, wie ihre Benennung erraten läßt, darauf, daß eine Größe, die anfänglich konstant sein sollte, später als veränderlich gesetzt wird.

Im vorliegenden Falle nimmt man an, daß (3), d. h. die Lösung von (1a), auch die Lösung von (1) sei, aber mit dem Unterschied, daß k jetzt nicht mehr konstant, sondern eine noch zu bestimmende Funktion von x sein soll. Mit diesem Vorbehalt folgt aus (3)

$$y' = k' e^{\lambda(x)} + k e^{\lambda(x)} \cdot \lambda'(x),$$

andererseits ist (nach (2)):

$$\lambda'(x) = -\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

daher:

$$y' = k' e^{\lambda x} - k e^{\lambda x} \cdot \frac{f(x)}{\varphi(x)}. \tag{3a}$$

Setzt man in (1) ein, so ergibt sich:

$$f(x) \cdot k e^{\lambda(x)} + \varphi(x) k' e^{\lambda(x)} - k e^{\lambda(x)} f(x) + \psi(x) = 0,$$

es hebt sich das erste gegen das dritte Glied und man erhält:

$$dk = -\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} e^{-\lambda(x)} dx, \quad k = \int -\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} e^{-\lambda(x)} dx + k_1, \tag{4}$$

wo k_1 jetzt eine Konstante bezeichnet. Nach Ausführung der Integration und Einsetzung von (4) in (3) entsteht die Lösung von (1)

Der Gang ist also kurz folgender: Wenn (1) zum Integrieren vorgelegt wird, so lasse man zunächst das Störungsglied fort und integriere also (1a). Dann setze man das Störungsglied wieder hin, nehme die Lösung von (1a), betrachte aber k als eine zu bestimmende Funktion von x usw.

Beispiel:

$$y + 2xy' - \frac{5}{x^3} = 0. \tag{5}$$

Das Störungsglied ist $-5 : x^3$. Man lasse es zunächst fort:

$$y + 2xy' = 0, \quad y\,dx + 2x\,dy = 0, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{2x}$$

$$\ln y = -\frac{1}{2}\ln x + C, \quad y = e^{-\frac{1}{2}\ln x + C} = k e^{-\frac{1}{2}\ln x},$$

oder

$$y = \frac{k}{\sqrt{x}}.$$

Nun setze man das Störungsglied wieder hin und differenziere y in

dem angegebenen Sinne. Es folgt:

$$y' = \frac{k'}{\sqrt{x}} - \frac{k}{2\sqrt{x^3}};$$

in (5) eingesetzt:

$$\frac{k}{\sqrt{x}} + 2k'\sqrt{x} - \frac{k}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^3} = 0; \quad k' = \frac{5}{2\sqrt{x^7}}$$

$$k = \int \frac{5\,dx}{2\sqrt{x^7}} = -\frac{1}{\sqrt{x^5}} + k_1$$

$$y = \frac{k}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{x^3} + \frac{k_1}{\sqrt{x}}.$$

Diese Gleichung, in der k_1 jetzt die willkürliche Konstante bezeichnet, ist die Lösung von (1). Zur Prüfung differenziere man:

$$y' = \frac{3}{x^4} - \frac{k_1}{2\sqrt{x^3}}$$

und setze in (5) ein. Es ergibt sich:

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{k_1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3} - \frac{k_1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^3} = 0, \quad 0 = 0 \text{ (stimmt).}$$

Fünfter Fall. Die Differentialgleichung ist exakt, d. h. von der Form:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy = 0 \quad \text{oder} \quad p\,dx + q\,dy = 0. \tag{6}$$

Nach (2) [164] ist dann die linke Seite das totale (oder exakte) Differential der Funktion $F(x, y)$. Es soll verschwinden, d. h. diese Funktion muß konstant sein, oder:

$$F(x, y) = C \tag{7}$$

ist die Lösung von (6). Aber nicht jede in die Form:

$$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy = 0 \tag{8}$$

gebrachte Differentialgleichung ist exakt. Denn dann müßte sein:

$$p = f(x, y), \quad q = \varphi(x, y). \tag{9}$$

Die beiden partiellen Differentialquotienten p und q sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern [167] an die Bedingung geknüpft:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}, \tag{10}$$

also: Eine Differentialgleichung (6) kann nur exakt sein, wenn identisch ist:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}. \tag{11}$$

Aber diese Bedingung reicht auch uns. Es soll zunächst werden nach (8) und (6)

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}. \tag{12}$$

Daher durch „Integration nach x“:

$$F(x, y) = \int f(x, y) dx + \psi(y) \tag{13}$$

(statt der Integrationskonstante ist eine willkürliche Funktion von y zu setzen, da y, also auch $\psi(y)$ bei der Integration nach x als konstant angenommen wird). Differenziert man nun (13) nach y, so folgt unter Rücksichtnahme auf [297]:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx + \psi'(y), \quad \text{oder nach (11)}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} dx + \psi'(y), \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \varphi(x,y) + \psi'(y);$$

oder:

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial (F(x, y) - \psi(y))}{\partial y}. \tag{14}$$

Setzt man also zur Abkürzung:

$$F(x, y) - \psi(y) = F_1(x, y),$$

so wird mit (12)

$$f(x, y) = \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x}, \quad \varphi(x, y) = \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y},$$

d. h. die Differentialgleichung ist in der Tat exakt.

Erstes Beispiel:

$$(x + y + 3)dx + (x + 3y + 5)dy = 0$$

(schon einmal in Fall 3 behandelt). Man erhält:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (x + y + 3)}{\partial y} = +1, \quad \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (x + 3y + 5)}{\partial x} = +1.$$

Die Bedingung (1) ist erfüllt, also ist die Differentialgleichung exakt. Die Integration nach x gibt zunächst:

$$F(x, y) = \int (x + y + 3) dx = \frac{x^2}{2} + xy + 3x + \psi(y),$$

daher nach y differenziert:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x + \psi'(y) = x + 3y + 5.$$

$$\psi'(y) = 3y + 5, \quad \psi(y) = \frac{3y^2}{2} + 5y.$$

Die Lösung lautet also:

$$\frac{x^2}{2} + xy + \frac{3y^2}{2} + 3x + 5y = C.$$

Zweites Beispiel:

$$\left(\ln y + \frac{y}{x}\right) dx + \left(\ln x + \frac{x}{y}\right) dy = 0 .$$

Man erhält:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Die Differentialgleichung ist exakt. Die Integration nach x ergibt:

$$F(x,y) = \int \left(\ln y + \frac{y}{x}\right) dx = x \ln y + y \ln x + \psi(y),$$

daher nach y differenziert:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{y} + \ln x + \psi'(y) = \varphi(x,y) = \ln x + \frac{x}{y},$$

also:

$$\psi'(y) = 0, \quad \psi(y) = 0 .$$

Die Lösung ist daher:

$$x \ln y + y \ln x = C,$$

oder auch:

$$\ln(y^x) + \ln(x^y) = C, \quad \ln(y^x \cdot x^y) = C,$$

d. h.

$$y^x \cdot x^y = k .$$

305. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß eine Differentialgleichung auf mehrere der fünf in [304] erwähnten Fälle paßt. Dann läßt sie sich eben auf mehrere Weisen lösen, wie das Beispiel

$$(x + y + 3) dx + (x + 3y + 5) dy = 0$$

gezeigt hat.

Andererseits kann sie aber auch auf nicht einen einzigen der fünf Fälle passen. Dann muß man zunächst versuchen, wenn irgend Aussicht auf Erfolg zu sein scheint, sie durch geeignete Umformungen passend zu machen. Freilich liegen solche Umformungen manchmal gar nicht so nahe. Als erstes Beispiel diene die sogenannte Bernoullische Differentialgleichung:

$$f(x) y + \varphi(x) y' + \psi(x) \cdot y^m = 0 . \tag{1}$$

Sie hat, wenn m beliebig gegeben ist, keine der fünf Formen, außer für $m = 0$, da $y^0 = 1$ ist; also die lineare Form mit Störungsglied eintritt. Man setze:

$$y = z^\lambda, \quad y' = \lambda z^{\lambda - 1} \cdot z' .$$

Die Differentialgleichung wird:

$$f(x) z^\lambda + \varphi(x) \lambda z^{\lambda - 1} z' + \psi(x) z^{m\lambda} = 0$$

oder nach Division durch $z^{\lambda - 1}$:

$$f(x) z + \lambda \varphi(x) z' + \psi(x) z^{m\lambda - \lambda + 1} = 0, \tag{2}$$

bestimmt man also λ so, daß

$$m\lambda - \lambda + 1 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{1-m}$$

ist, so wird (2) linear, also vierter Fall. Beispiel:

$$y + 2xy' - x^2y^3 = 0. \tag{3}$$

Hier ist

$$m = 3, \quad \lambda = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2},$$

$$y = z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad y' = -\frac{1}{2\sqrt{z^3}}z',$$

eingesetzt:

$$\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{xz'}{\sqrt{z^3}} - \frac{x^2}{\sqrt{z^3}} = 0,$$

oder:

$$z - xz' - x^2 = 0;$$

zunächst wird das Störungsglied fortgelassen:

$$z - xz' = 0, \quad zdx - xdz = 0, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \quad \ln z = \ln x + C,$$

$$\frac{z}{x} = k, \quad z = kx.$$

Und nun, da k variabel werden soll:

$$z' = k + xk'$$

eingesetzt, nachdem das Störungsglied $-x^2$ wieder zugesetzt worden ist:

$$kx - kx - x^2k' - x^2 = 0, \quad k' = -1, \quad k = -x + k_1,$$

$$z = kx = -x^2 + k_1x,$$

also:

$$y = \frac{1}{\sqrt{k_1x - x^2}}.$$

Dies ist die Lösung von (3) mit k_1 als willkürlicher Konstante. Die Differentiation ergibt:

$$y' = \frac{2x - k_1}{2\sqrt{k_1x - x^2}^3},$$

in (3) eingesetzt:

$$\frac{1}{\sqrt{k_1x - x^2}} + \frac{2x^2 - k_1x}{\sqrt{k_1x - x^2}^3} - \frac{x^2}{\sqrt{k_1x - x^2}^3} = 0$$

oder

$$k_1x - x^2 + 2x^2 - k_1x - x^2 = 0, \quad 0 = 0 \text{ (stimmt).}$$

Als zweites Beispiel diene die Verwandlung einer nicht exakten Differentialgleichung:

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0 \tag{4}$$

mittelst des sogenannten integrierenden Faktors in eine exakte Differentialgleichung. Man multipliziere sie mit einer zunächst ganz willkürlichen Funktion $\psi(x, y)$:

$$f(x, y) \cdot \psi(x, y) \cdot dx + \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y) dy = 0, \tag{4a}$$

suche aber ψ sofort so zu bestimmen, daß nun eine exakte Differentialgleichung entstanden ist. Es muß dann sein [304]:

$$\frac{\partial(f \cdot \psi)}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi \cdot \psi)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\psi + f\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\psi + \varphi\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

oder

$$\psi\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + f\frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Genügt ψ dieser Bedingung (5), so ist (4a) exakt geworden. Doch stellt (5) eine sogenannte partielle Differentialgleichung für ψ vor und da deren Theorie allgemein noch erheblich größere Schwierigkeiten bietet, kann diese Methode trotz ihrer völligen Allgemeinheit doch nur dann empfohlen werden, wenn von vornherein eine einfache Lösung von (5) erkennbar wird, was selten genug der Fall ist. Es sei etwa vorgelegt:

$$y(3y^3 - 3x^2)dx + x(8y^3 - 3x^2)dy = 0.$$

Sie ist nicht exakt. Denn man erhält:

$$\frac{\partial(y(3y^3 - 3x^2))}{\partial y} = 3y^3 - 3x^2 + 9y^3 = 12y^3 - 3x^2$$

$$\frac{\partial(x(8y^3 - 3x^2))}{\partial x} = 8y^3 - 3x^2 - 6x^2 = 8y^3 - 9x^2.$$

Die Gleichung (5) wird:

$$\psi(4y^3 + 6x^2) + y\frac{\partial \psi}{\partial y}(3y^3 - 3x^2) + x\frac{\partial \psi}{\partial x}(-8y^3 + 3x^2) = 0.$$

Es ist nur eine einzige Lösung notwendig, ohne willkürliche Konstante. Man versuche mit:

$$\psi \equiv x^a y^b, \quad y\frac{\partial \psi}{\partial y} = b x^a y^b = b\psi, \quad x\frac{\partial \psi}{\partial x} = a\psi$$

und erhält nach Division durch ψ:

$$4y^3 + 6x^2 + b(3y^3 - 3x^2) + a(-8y^3 + 3x^2) = 0$$

$$y^3(4 + 3b - 8a) + x^2(6 - 3b + 3a) = 0$$

also, da a und b konstant sein sollen:

$$\left.\begin{array}{l} 4 + 3b - 8a = 0 \\ 6 - 3b + 3a = 0 \end{array}\right\} \quad a = +2, \quad b = +4.$$

Der (oder vielmehr ein) integrierender Faktor nämlich x^2y^4 ist also durch eine „glückliche Eingebung“ gefunden. Man multipliziere mit

ihm, so muß die neue Differentialgleichung:

$$(3x^2y^8 - 3x^4y^5)dx + (8x^3y^7 - 3x^5y^4)dy = 0$$

exakt sein. Daher:

$$F(x, y) = \int (3x^2y^8 - 3x^4y^5)dx = x^3y^8 - \tfrac{3}{5}x^5y^5 + \lambda(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 8x^3y^7 - 3x^5y^4 + \lambda'(y) = 8x^3y^7 - 3x^5y^4$$

$$\lambda'(y) = 0, \quad \lambda(y) = 0.$$

Die Lösung ist also:

$$x^3y^8 - \tfrac{3}{5}x^5y^5 = C.$$

Wenn man auf den Grund geht, sind in [304] der erste, zweite, dritte und vierte Fall eigentlich in dem fünften enthalten. Denn in jedem der vier ersten Fälle wird eine Trennung der Veränderlichen erzielt, d. h. eine Differentialgleichung von der Form:

$$f(x)dx + \varphi(y)dy = 0,$$

welche offenbar exakt ist, da die linke Seite als ein totales Differentiale, nämlich als:

$$d\left(\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy\right)$$

geschrieben werden kann. Somit hat der integrierende Faktor, d. h. derjenige Faktor, welcher eine Differentialgleichung erst integrierbar macht, wirklich allgemeine Bedeutung. Leider ist er, wie gesagt, nicht immer leicht zu finden.

306. Falls die Lösung einer Differentialgleichung:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

oder in expliziter Form:

$$y' = f(x, y) \tag{1a}$$

durch einen geschlossenen Ausdruck und sei es auch nur ausschließlich einer übrigbleibenden Quadratur [304] nicht möglich ist oder allzu umständlich sein würde, so bleibt immer noch der Versuch einer angenäherten Lösung übrig.

Man kann ihn, geometrisch ausgedrückt, auf folgende unendlich oft zu wiederholende „infinitesimale“ Konstruktion gründen. Man nehme irgend einen Punkt $P(x, y)$ als der Lösung angehörig an und ändere x um dx. Dann ändert sich y um:

$$dy = y'dx = f(x, y)dx$$

und man gelangt so zu einem Nachbarpunkte $P_1(x_1, y_1)$,

$$x_1 = x + dx, \quad y_1 = y + dy = y + f(x, y)dx.$$

Es stellt dann die unendlich kleine Strecke PP_1 ein unendlich kleines Stück der Lösung vor.

Von P_1 geht man wieder zu einem Nachbarpunkt $P_2(x_2, y_2)$ über:

$$x_2 = x_1 + dx_1, \quad y_2 = y_1 + dy_1 = y_1 + f(x_1, y_1)dx_1$$

usw. usw.

Auf diese Weise kann man, mit einer beliebigen Abszisse x_0 anfangend und bei einer beliebigen anderen Abszisse x_n endigend, indem man das Intervall zwischen ihnen in unendlich viele Differentiale teilt und die zu x_0 zugehörige Anfangsordinate y_0 willkürlich annimmt, die Lösung in diesem Intervall „konstruieren". Oder vielmehr man könnte es, wenn es wirklich möglich, d. h. wirklich rechnerisch oder geometrisch ausführbar wäre, etwas Endliches in unendlich viele Differentiale zu zerlegen.

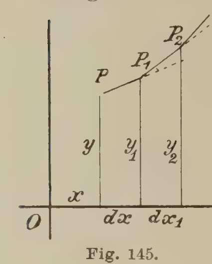


Fig. 145.

Aber in beliebige kleine, in „sehr" kleine Teile Δx, Δx_1, Δx_2... kann man teilen und dann jedesmal statt des Differentials von y:

$$dy = y' dx = f(x, y)dx$$

eine Differenz von y durch die angenäherte Formel [136 2]

$$\Delta y = y' \Delta x = f(x, y)\Delta x \tag{2}$$

bestimmen. So entsteht ein aus geradlinigen beliebig kleinen Strecken $PP_1P_2P_3$ . . . zusammengesetzter Streckenzug, welcher der wirklichen Kurve sich überall genau genug annähert, wenn die Δx, Δx_1, Δx_2,... klein genug sind, da ja die infinitesimale und unendlich genaue Konstruktion der „Grenzfall" dieser Konstruktion ist (Fig. 145).

Selbstverständlich ist bei numerischen Rechnungen nach dieser äußerst einfachen Methode in jedem Falle erst zu untersuchen, wie klein man die Δx nehmen muß, damit der Fehler in den y nirgends die zulässige Fehlergrenze überschreitet. Man hat hierüber Kriterien aufgestellt, welche etwa den Restbetrachtungen für die Taylorsche Reihe entsprechen und die Funktion $f(x, y)$ angehen, von der ja alles abhängt.

Stellen sich die Δx, wenn die vorgeschriebene Genauigkeit erreicht werden soll, als gar zu klein heraus, so daß die Rechnung allzuoft wiederholt werden müßte, so kann man (2) durch Mitnehmen von Gliedern höherer Ordnung verbessern und so die Grenze, innerhalb welcher die Δx bleiben müssen, erheblich erweitern. Man nehme etwa das Glied mit $(\Delta x)^2$ mit und schreibe nach Taylor:

$$\Delta y = y' \Delta x + \tfrac{1}{2} y'' (\Delta x)^2,$$

doch ist erst y'' zu finden. Hierzu differenziere man (1a) total:

$$dy' = f_x'\,dx + f_y'\,dy,$$

also nach Division durch dx:

$$\frac{dy'}{dx} = y'' = f'(x) + f_y'y' = f_x' + f_y' \cdot f(x, y)$$

also

$$\Delta y = f(x, y)\Delta x + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\Delta x)^2. \tag{2a}$$

Dies leitet zu einer anderen Methode über. Ebenso wie aus

$$y' = f(x, y)$$

durch Differenzieren berechnet worden ist:

$$y'' = f_x' + f_y'y',$$

also y'' auch als eine Funktion von x und y, nämlich:

$$f_1(x, y) = f_x' + f \cdot f_y',$$

bestimmt, so berechne man aus: $y'' = f(x, y)$ durch abermaliges Differenzieren

$$y''' = f'_{1,x} + f'_{1,y}f = f_2(x, y), \text{ darauf weiter:}$$

$$y'''' = f'_{2,x}(x, y) + f'_{2,y}f = f_3(x, y)$$

usw. usw. Alsdann gibt der Taylorsche Lehrsatz:

$$\Delta y = f(x, y)\Delta x + \frac{1}{2!}f_1(x, y)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f_2(x, y)(\Delta x)^3 + \frac{1}{4!}f_3(x,y)(\Delta x)^4 + \cdots \text{ in inf.}$$

Freilich wird die Berechnung der Funktionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ mit fortschreitendem Index in der Regel immer umständlicher. Auch sind ja meist der Konvergenz der Taylorschen Reihe Grenzen gesetzt, so daß Δx einen gewissen Spielraum nicht überschreiten darf. Es kommt eben, wie schon vorhin gesagt, alles auf die Funktion $f(x, y)$ an, auf ihre Eindeutigkeit, nötigenfalls im beschränkten Sinne, auf ihre Stetigkeit, auf ihre Differenzierbarkeit usw. z. B. [53].

Doch gehören die betreffenden Untersuchungen nicht hierher, sondern in ein ausführliches Handbuch über Differentialgleichungen.

307. Die vielen vergeblichen Versuche, sogar an sich sehr einfache Differentialgleichungen auf elementare Weise zu integrieren, haben nach und nach den Standpunkt der Mathematiker diesen Gebilden gegenüber vollständig verschoben. Während zu Anfang die Losung war, eine vorgelegte Gleichung:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

mittelst „bekannter“ Funktionen so oder so zu integrieren und möglichst viele Fälle zu „entdecken“, in denen es gelingen wollte, pflegt

man jetzt zunächst von der Unterscheidung bekannter und unbekannter Funktionen abzusehen und zu fragen: Welche Arten von Funktionen werden durch die und die Arten von Differentialgleichungen zunächst implizite bestimmt oder definiert? Wie ist es möglich, die wesentlichen Eigenschaften der ersteren aus den letzteren herauszulesen?

Dieser höhere Gesichtspunkt, der schon bei der gewöhnlichen Integralrechnung in [263] kurz hervorgekehrt worden ist, hat sich vielfach als sehr erfolgreich erwiesen zur Einführung neuer Funktionen mit ausgezeichneten Eigenschaften. Aber auch die bekannten elementaren Funktionen lehrt er anders sehen, als früher, nämlich verknüpft mit sehr einfachen Differentialgleichungen und zwar mit nur algebraischen Differentialgleichungen, auch wenn sie selbst transzendent sind.

So ist die Potenz:

$$y = x^n$$

im weitesten Sinne, d. h. bei beliebigen algebraischen Wertes von n diejenige Funktion, welche der Differentialgleichung:

$$y' = \frac{ny}{x}$$

genügt, mit der Anfangsbedingung, daß $x = 1$ stets $y = 1$ zu entsprechen hat. Ferner:

$$y = e^x$$

ist diejenige Funktion, welche der Differentialgleichung:

$$y' = y$$

genügt, mit der Anfangsbedingung, daß $x = 0$ entsprechen soll $y = 1$. Drittens:

$$y = \sin x$$

ist diejenige Funktion, welche der Differentialgleichung:

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

genügt, mit der Anfangsbedingung, daß $x = 0$ entsprechen soll $y = 0$ (und $y' = +1$) usw. Diese Differentialgleichungen sind in der Tat, wie man sieht, algebraisch und äußerst einfach. Sie können gelten als die einfachsten und daher besten Definitionen der betreffenden Funktionen. Freilich sind diese Definitionen impliziter Art, aber das wäre kein Grund, ihnen aus dem Wege zu gehen. Ist es doch eine der Hauptaufgaben der Mathematik überhaupt, das implizite gegebene zu erforschen.

Übungen zu § 39.

1) Die Differentialgleichung für alle Kreise zu ermitteln, welche die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ in zwei zur y Achse symmetrischen Punkten berühren.

2) Die Differentialgleichung für alle Krümmungskreise der Parabel ist zu ermitteln.

3) Die Differentialgleichung:

$$(5x + 7y - 3)dx + (3x - 5y + 8)dy = 0$$

ist zu integrieren.

4) $y' = y + xy^4$ ist zu integrieren.

5) Eine Kurve zu finden, für welche die Länge der Tangente vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der x-Achse konstant $= l$ ist.

§ 40. Differentialgleichungen höherer Ordnung.

308. Eine (gewöhnliche) Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist eine Gleichung zwischen einer ursprünglichen Veränderlichen x, einer Veränderlichen y, welche von ihr abhängig werden soll und der ersten, zweiten . . . bis n^{ten} Ableitung von y nach x; also eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, y', y'', \dots y^n) = 0 \text{[1]} \tag{1}$$

oder, wenn die n^{te} Ableitung explizite entwickelt wird:

$$y^n = \varphi(x, y, y', y'', \dots y^{n-1}). \tag{1a}$$

Es darf x, oder y, oder y', oder y'' bis y^{n-1} in 1) fehlen, nicht aber y^n, weil sonst die Differentialgleichung aufhören würde, von der n^{ten} Ordnung zu sein.

Sie integrieren, heißt y als Funktion von x so bestimmen, daß nach Einsetzung derselben und ihrer Ableitungen:

$$y = f(x),\ y' = f'(x),\ y'' = f''(x), \cdots y^n = f^n(x)$$

eine Identität entsteht:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x) \cdots f^n(x)) \equiv 0.$$

Die im vorigen Paragraphen betonten Schwierigkeiten der Integration zeigen sich bei der zweiten, dritten ... Ordnung selbstverständlich in verstärktem Maße. Falls es überhaupt gelingt, sie im gegebenen Falle zu bewältigen, so geschieht es meist so, daß man stufenweise

1) n ist hier selbstverständlich nicht Potenzexponent, sondern steht für n Differentiationsstriche.

zu Werke geht, also aus (1) oder (1a) durch einmalige Integration eine Differentialgleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung, dann aus dieser durch nochmalige Integration eine solche $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung usw. erhält, bis nach n Integrationen die Endgleichung zwischen x und y entstanden ist. Da jede Integration eine neue willkürliche Konstante mit sich führt, muß das allgemeinste Integral n willkürliche Konstanten enthalten. Sind weniger in einer Lösung vorhanden, so ist sie entweder eine partikuläre oder eine singuläre Lösung.

Man betrachte z. B. den sehr einfachen Fall, daß nur x und y^n vorhanden sei, also (1a) die Form habe:

$$y^n = \varphi(x).$$

Da $y^n = d(y^{n-1}) : dx$ ist, so folgt:

$$d(y^{n-1}) = y^n dx = \varphi(x)\, dx$$

und durch Integration:

$$y^{n-1} = \int y^n\, dx = \int \varphi(x)\, dx + C.$$

Darauf durch nochmalige Integration

$$y^{n-2} = \int y^{n-1} dx = \int \left(\int \varphi(x)\, dx\right) dx + Cx + D,$$

darauf abermals:

$$y^{n-3} = \int \left(\int \left(\int \varphi(x)\, dx\right) dx\right) dx + \frac{Cx^2}{2} + Dx + E$$

usw., bis die letzte Integration y als Funktion von x mit n willkürlichen Konstanten $C, D, E, \ldots$ ergibt.

Es sei umgekehrt eine beliebige Gleichung:

$$\psi(x, y, C, D, E, \ldots) = 0 \tag{2}$$

zwischen x, y und n Konstanten $C, D, E, \ldots$ gegeben, oder einfacher in expliziter Form:

$$y = f(x, C, D, E, \ldots). \tag{2a}$$

Man differenziere (2a) $n$mal hintereinander nach x

$$y' = f'(x, C, \ldots),\ y'' = f''(x, C, \ldots) \ldots y^n = f^n(x, C, \ldots) \tag{3}$$

und eliminiere aus (2a) und (3) die n Konstanten $C, D, E, \ldots$, so entsteht eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von der Form (1) oder (1a), vgl. [302]. Selbstverständlich wird vorausgesetzt, daß die n Konstanten nicht auf eine geringere Anzahl zurückführbar seien. Wenn z. B. C und D nur in der Verbindung $C + D$ vorkommen, so sind sie beide nur einer unabhängigen Konstanten $(C + D)$ gleichwertig.

309. Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad \text{oder}: y'' = \varphi(x, y, y'),$$

oder auch

$$d(y') - \varphi(x, y, y')dx = 0.$$

Um eine erste Integration vornehmen zu können, mache man die Differentialgleichung exakt, falls sie noch nicht exakt sein sollte und multipliziere hierzu beide Seiten mit dem, oder vielmehr mit „einem“ integrierenden Faktor. Da dessen Auffindung aber meist sehr erhebliche Schwierigkeiten bietet, so seien nur einige einfachere Fälle betrachtet.

Erster Fall. Es fehle y und y', d. h. die Gleichung sei von der Form:

$$y'' = \varphi(x) \text{ oder } d(y') = \varphi(x)dx.$$

Man integriere einmal:

$$y' = \int \varphi(x)dx + C.$$

Man multipliziere abermals mit dx und integriere noch einmal:

$$y = \int \left(\int \varphi(x)dx\right)dx + Cx + D.$$

Zweiter Fall. Es fehle x und y', d. h. die Gleichung sei von der Form:

$$y'' = \varphi(y) \quad \text{oder} \quad d(y') = \varphi(y)dx.$$

Hier kann nicht sofort integriert werden, da die Differentialgleichung noch nicht exakt ist. Aber es ist nicht schwer einen integrierenden Faktor zu finden, nämlich y'. Denn nach Multiplikation mit y' wird die linke Seite sofort und die rechte Seite nach der folgenden Umformung:

$$y' \cdot \varphi(y)dx = \frac{dy}{dx} \cdot \varphi(y)dx = \varphi(y)dy$$

ein totales Differential. Die Integration ergibt ein „erstes Integral“:

$$\frac{y'^2}{2} = \int \varphi(y)dy + C.$$

Man setze zur Abkürzung des Integral rechts $= \psi(y)$ und berechne explizite:

$$y' = \sqrt{2(\psi(y) + C)},$$

diese Differentialgleichung erster Ordnung gehört zu [304], zweiter Fall. Man erhält also:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2(\psi(y) + C)}} + D$$

und nach Ausführung der Integration die Endgleichung zwischen x und y mit den beiden willkürlichen Konstanten C und D.

Beispiel aus der Mechanik: Ein Punkt P, der auf einer Geraden beweglich ist, wird von einem festen Punkte O nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz angezogen. Wie bewegt er sich? Man bezeichne mit x die Abzsisse von P und mit t die Zeit, so soll sein:

$$\frac{d^2x}{(dt)^2} = -\frac{k^2}{x^2};$$

Fig. 146.

(k ist eine Konstante und das — Zeichen rechts kündet eine Anziehung an, wie ein + Zeichen eine Abstoßung ankündigen würde). Da diese Differentialgleichung offenbar zum zweiten Fall gehört, nur das t statt x und x statt y steht, so multipliziere man mit dx

$$dx\,\frac{d^2x}{(dt)^2} = -k^2\,\frac{dx}{x^2}.$$

Die linke Seite ist:

$$dx\,\frac{d^2x}{(dt)^2} = dx\,.\,\frac{d\,\frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot d\left(\frac{dx}{dt}\right) = d\,\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

also ergibt die erste Integration:

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{2} = \frac{k^2}{x} + C,$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2\left(\frac{k^2}{x} + C\right)}, \qquad dt = \frac{dx}{\sqrt{2\left(\frac{k^2}{x} + C\right)}}$$

$$t = \int\frac{dx}{\sqrt{2\left(\frac{k^2}{x} + C\right)}} + D.$$

Die Behandlung des Integrals kann nach [282], dritte Methode erfolgen,

$$\sqrt{2\left(\frac{k^2}{x} + C\right)} = z$$

usw. vgl. auch [318]. Man erhält, je nachdem C positiv, null oder negativ ist, nach Ausführung der Integrationen:

a) $t = \frac{\sqrt{2\,(k^2x + Cx^2)}}{2C} - \frac{k^2}{2C\sqrt{2C}}\,\mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Cof} = 1 + x\frac{2C}{k^2}\right) + D, \ (C > 0)$

b) $t = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{x}^3}{3k} + D$ $\qquad (C = 0)$

c) $t = \frac{\sqrt{2\,(k^2x + Cx^2)}}{2C} - \frac{k^2}{2C\sqrt{-2C}}\,\text{arc}\left(\cos = 1 + \frac{x\,2C}{k^2}\right) + D, \ (C < 0).$

Durch Umkehrung entsteht x als Funktion von t.

Dritter Fall. Es fehle x und y, d. h. die Gleichung sei von der Form:

$$y'' = \varphi(y'); \quad dy' = \varphi(y')\, dx.$$

Der integrierende Faktor ist hier $1 : \varphi(y')$. Man erhält:

$$x = \int \frac{dy'}{\varphi(y')} + C = \psi(y') + C,$$

oder umgekehrt, wenn man y' explizit ausdrückt:

$$y' = \lambda(x, C),$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung [304], erster Fall. Die nochmalige Integration ergibt die Endgleichung:

$$y = \int \lambda(x, C)\, dx + D.$$

Erstes Beispiel. Es soll eine ebene Kurve gefunden werden, deren Krümmungsradius [180 1]:

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}$$

konstant ist. Es folgt:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}^3} = \frac{dx}{\varrho}, \quad \int \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}^3} = \frac{x - a}{\varrho},$$

wo $\frac{a}{\varrho}$ die erste Integrationskonstante bezeichnet. Oder nach [284 6]:

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{x - a}{\varrho}; \quad \varrho^2 y'^2 = (x - a)^2 + (x - a)^2 y'^2$$

$$y' = \frac{x - a}{\sqrt{\varrho^2 - (x - a)^2}}; \quad y = \int \frac{(x - a)\, dx}{\sqrt{\varrho^2 - (x - a)^2}} + b,$$

wo b die zweite Integrationskonstante bezeichnet. Also nach Ausführung der Integration:

$$y = -\sqrt{\varrho^2 - (x - a)^2} + b,$$

oder

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - \varrho^2 = 0.$$

Gleichung eines Kreises mit ϱ als Radius und dem beliebigen Mittelpunkt $M(a, b)$, wie vorauszusehen war:

Zweites Beispiel, aus der Mechanik: Die Gleichung der Kettenlinie [64] ist abzuleiten (Fig. 147). Es sei γ das Gewicht der Längeneinheit und $ds = PP'$[1]) ein unendlich kleines Element der Kette. Auf dasselbe wirken drei äußere Kräfte, nämlich:

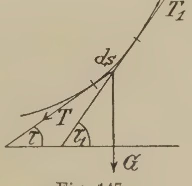


Fig. 147.

1. Das Gewicht von ds. Es ist $= \gamma\, ds$ und seine Komponenten sind:

$$0 \text{ und } -\gamma\, ds.$$

1) P und P' in Fig. 147 durch die kleinen Querstriche angedeutet.

2. Die Spannung T in P. Ihre Komponenten sind:

$$-T\cos\tau;\quad -T\sin\tau.$$

3. Die Spannung $T_1 = T + dT$ in P_1. Ihre Komponenten sind:

$$+T_1\cos\tau_1;\quad +T_1\sin\tau_1,$$

oder:

$$T\cos\tau + d(T\cos\tau),\quad T\sin\tau + d(T\sin\tau).$$

Daher nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte und dem Satz vom Gleichgewicht in der Statik:

$$d(T\cos\tau) = 0,\quad d(T\sin\tau) = \gamma\, ds.$$

Die erste Gleichung gibt auf der Stelle durch Integration:

$$T\cos\tau = H,\quad T = \frac{H}{\cos\tau},$$

wo H eine Konstante, die Horizontalspannung bezeichnet. Also wird die zweite Gleichung:

$$H\, d(\operatorname{tg}\tau) = \gamma\, ds,$$

oder

$$h\, dy' = dx\sqrt{1+y'^2},\quad \left(h = \frac{H}{\gamma}\right),$$

$$\frac{dx}{h} = \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}};$$

integriert:

$$\frac{x-a}{h} = \int\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \ln\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right),$$

wo $-\frac{a}{h}$ eine Integrationskonstante bezeichnet. Die Umkehrung ergibt:

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x-a}{h}};\quad \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x-a}{h}} - y',$$

$$1 + y'^2 = y'^2 - 2y'e^{\frac{x-a}{h}} + e^{2\frac{x-a}{h}},$$

$$y' = \frac{e^{2\frac{x-a}{h}} - 1}{2e^{\frac{x-a}{h}}} = \frac{e^{\frac{x-a}{h}} - e^{-\frac{x-a}{h}}}{2}$$

und nach einer zweiten Integration, wenn b die zweite Konstante bezeichnet:

$$y - b = \int\frac{e^{\frac{x-a}{h}} - e^{-\frac{x-a}{h}}}{2}\,dx = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x-a}{h}} + e^{-\frac{x-a}{h}}\right).$$

Durch eine Parallelverschiebung kann man a und b zum Verschwinden bringen. Die Gleichung der Kettenlinie wird dann in der einfachsten Form (vgl. [64]) Fig. 25:

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = h\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{h}.$$

Vierter Fall. Es fehle nur y, d. h. die Gleichung habe die Form:

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Man führe y' als neue Veränderliche ein und setze, um dies zum Ausdruck zu bringen

$$y' = z, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = z',$$

so entsteht

$$F(x, z, z') = 0,$$

d. h. eine Differentialgleichung erster Ordnung. Nach Lösung derselben, welche

$$z = \psi(x, C)$$

ergeben möge, ist nur noch eine Quadratur erforderlich. Denn wird für z sein Wert zurückgesetzt, so folgt:

$$dy = \psi(x, C)\, dx,$$

$$y = \int \psi(x, C)\, dx + D.$$

Beispiel:

$$x + y' - y'' = 0,$$

$$x + z - z' = 0,$$

$$x + z = \frac{dz}{dx}.$$

Man setze

$$x + z = u, \quad z = u - x, \quad dz = du - dx,$$

so wird die Differentialgleichung:

$$u = \frac{du - dx}{dx} = \frac{du}{dx} - 1,$$

$$dx = \frac{du}{1 + u},$$

$$x = \ln(1 + u) + C = \ln(1 + x + z) + C,$$

$$1 + x + z = e^{x - C} = ke^x,$$

$$z = \frac{dy}{dx} = ke^x - 1 - x,$$

$$y = ke^x - x - \frac{x^2}{2} + l.$$

Dies ist die Lösung mit den beiden Integrationskonstanten k und l.

Fünfter Fall. Es fehle nur x, d. h. die Gleichung sei von der Form:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Auch sie läßt sich auf die erste Ordnung bringen, wenn man abhängige und unabhängige Veränderliche vertauscht. Es wird dann:

$$x' = \frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y'}, \quad y' = \frac{1}{x'},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\frac{1}{x'}}{dx} = \frac{d\frac{1}{x'}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x'^2} \cdot \frac{dx'}{dy} : \frac{dx}{dy}$$

$$= -\frac{1}{x'^2} \cdot x'' \cdot \frac{1}{x'} = -\frac{x''}{x'^3}.$$

Die Gleichung wird daher:

$$F\left(y, \frac{1}{x'}, \ -\frac{x''}{x'^3}\right) = 0,$$

also wenn x' als Veränderliche eingeführt und deswegen

$$x' = z, \quad x'' = \frac{dx'}{dy} = \frac{dz}{dy}$$

gesetzt wird:

$$F\left(y, \ \frac{1}{z}, \ -\frac{\frac{dz}{dy}}{z^3}\right) = 0$$

mithin in der Tat eine Gleichung erster Ordnung zwischen y und z. Ihre Integration möge ergeben:

$$\frac{dx}{dy} = z = \varphi(y, C),$$

worauf die zweite Integration, welche eine reine Quadratur darstellt, zur Endgleichung führt:

$$x = \int \varphi(y, C)\, dy + D.$$

Beispiel:

$$yy'' = (y')^2,$$

$$y \cdot \left(-\frac{x''}{x'^3}\right) = \frac{1}{x'^2},$$

$$y \cdot \left(-\frac{dz}{dy}\right) = z, \quad ydz + zdy = 0,$$

$$d(yz) = 0, \quad yz = C,$$

$$z = \frac{dx}{dy} = \frac{C}{y},$$

$$x = C \ln y + D,$$

$$y = e^{\frac{x-D}{C}}$$

oder nach Ersetzung der Konstanten C und D durch zwei andere a und b.

$$y = a \cdot e^{bx}.$$

Sechster Fall. Es fehle nur y'. D. h. die Gleichung sei von der Form:

$$F(x, y, y'') = 0.$$

Eine in Betracht kommende Vereinfachung gegenüber dem allgemeinen Fall scheint nicht möglich zu sein. So ist z. B. eine Reduktion auf eine Differentialgleichung erster Ordnung nebst nachfolgender Quadratur, wie im vierten und fünften Fall, ausgeschlossen.

310. Die Überlegungen in [309] auf Differentialgleichungen dritter, vierter ... Ordnung zu übertragen, ist leicht genug. Fälle, in denen eine Erniedrigung der Ordnung oder sonstwie eine wesentliche Erleichterung mühelos erreichbar sein würde, lassen sich immer angeben. Doch sind und bleiben es besondere Fälle, welche die Schwierigkeiten des allgemeinen Falles nicht im geringsten vermindern, eher noch grell beleuchten.

Merkwürdiger Weise kommt man hin und wieder einfacher zur Lösung, wenn man die Ordnung einer gegebenen Differentialgleichung nicht durch Integrieren oder anderswie erniedrigt, sondern durch Differenzieren zunächst erhöht, wenn nämlich die Erhöhung in anderer Weise eine Vereinfachung mit sich bringt. Gesetzt z. B. es sei folgende Differentialgleichung gegeben:

$$F(u, v) = 0, \tag{1}$$

wo u und v Abkürzungen sind für:

$$u = y - xy', \quad v = y', \tag{2}$$

also:

$$F(y - y'x, y') = 0. \tag{1a}$$

Man differenziere (1) und (2) total:

$$F_u' \, du + F_v' \, dv = 0,$$

$$du = dy - x dy' - y' dx = - x dy' = - xy'' dx, \tag{3}$$

$$dv = dy' = y'' dx,$$

so folgt durch Einsetzen, nach Division durch dx

$$y'' \cdot (- F'_u \cdot x + F'_v) = 0,$$

also entweder

$$\text{A)} \qquad y'' = 0,$$

d. h. die allereinfachste Differentialgleichung zweiter Ordnung überhaupt. Ihre vollständige Lösung ist:

$$y = ax + b. \tag{4}$$

Soll aber (4) auch eine Lösung von (1) werden, so setze man (4) zunächst in (2) ein. Es folgt:

$$u = y - xy' = ax + b - x \cdot a = b; \quad v = y' = a,$$

also nach (1):

$$F(b, a) = 0,$$

oder:

$$F(y - ax, a) = 0, \tag{5}$$

d. h. (4) ist die allgemeine Lösung von (1), wenn zwischen b und a die Gleichung (5) angenommen wird. Sie entsteht also ohne jede Integration aus (1a), indem y' konstant $= a$ angenommen wird und bedeutet in geometrischer Deutung eine Schar gerader Linien.

Oder:

$$\text{B)} \qquad -F_u' \cdot x + F_v' = 0. \tag{6}$$

Diese Differentialgleichung ist wie (1a) von der ersten Ordnung. Sollen sie beide zusammen bestehen, so erübrigt sich eine Integration, da man aus (1a) und (6) auch durch Elimination von y' die Endgleichung zwischen x und y erhält. Aber da sie keine willkürliche Konstante hat, kann es sich nur um eine partikulare oder die singuläre Lösung handeln. Hier ist es die singuläre Lösung, nämlich die Einhüllende der vorhin genannten Linienschar.

Beispiel:

$$y - xy' - r\sqrt{1 + y'^2} = 0.$$

Die totale Differentiation ergibt:

$$dy - x\,dy' - y'\,dx - \frac{ry'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\,dy' = 0,$$

oder, da

$$dy = y'\,dx, \quad dy' = y''\,dx$$

ist, nach Division durch dx

$$y''\left(-x - \frac{ry'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\right) = 0.$$

Entweder:

$$\text{A)} \qquad y'' = 0, \quad y = ax + b, \quad y' = a,$$

$$y = ax + r\sqrt{1 + a^2},$$

Oder:

$$\text{B)} \qquad -x - \frac{ry'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0, \quad x = -\frac{ry'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

eingesetzt in die ursprüngliche Gleichung

$$y = -\frac{ry'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{r(1 + y'^2)}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{r}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

und nach Elimination von y':

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Dies ist die singuläre Lösung. Sie stellt einen Kreis vor mit dem Radius r. Die allgemeine Lösung A) besteht aus sämtlichen Tangenten des Kreises.

311. Die linearen Differentialgleichungen bilden eine besonders vielfach durchforschte und vielfach angewendete Klasse. Sie

sind, wenn von einem Störungsglied abgesehen wird (vgl. [304] vierten Fall), von der Form:

$$ay^n + by^{n-1} + cy^{n-2} + \cdots + ky' + ly = 0 \tag{1}$$

(selbstverständlich sind hier n, $n-1$, ... keine Potenzexponenten, sondern stehen für n, $n-1$, ... Differentiationsstriche; $abc \ldots kl$ sollen beliebige gegebene Funktionen von x sein).

Erster Satz: Ist $y_1 = f(x)$ eine Lösung von (1), so ist auch:

$$y = Cy_1 = Cf(x) \tag{2}$$

eine Lösung von (1).

Beweis: Es soll sein nach Voraussetzung:

$$ay_1{}^n + by_1{}^{n-1} + cy_1{}^{n-2} + \cdots + ky_1{}' + ly_1 = 0 \tag{3}$$

Andererseits folgt aus (2) durch n maliges Differenzieren

$$y' = Cy_1', \; y'' = Cy_1'', \cdots y^n = Cy_1^n$$

daher nach Multiplikation von (3) mit C auch:

$$ay^n + by^{n-1} + cy^{n-2} + \cdots + ky' + ly = 0.$$

Zweiter Satz. Sind $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x) \cdots y_p = f_p(x)$ sämtlich Lösungen von (1) so ist auch:

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_p \tag{4}$$

eine Lösung von (1).

Beweis. Es soll sein nach Voraussetzung:

$$ay_1^n + by_1^{n-1} + \cdots + ky_1' + ly_1 = 0$$
$$ay_2^n + by_2^{n-1} + \cdots + ky_2' + ly_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

also ist auch:

$$a(y_1^n + y_2^n + \cdots) + b(y_1^{n-1} + y_2^{n-1} + \cdots) + \cdots + k(y_1' + y_2' + \cdots)$$
$$+ l(y_1 + y_2 + \cdots) = 0$$

d. h. nach (4):

$$ay^n + by^{n-1} + \cdots + ky' + ly = 0.$$

Erste Folgerung: Sind $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x) \cdots, y_p = f_p(x)$ sämtlich Lösungen von (1), so ist auch

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \cdots + C_p y_p$$

eine Lösung von (1). Denn zunächst darf nach dem ersten Satz jede der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... mit einer beliebigen Konstanten multipliziert werden und darauf darf man nach dem zweiten Satz addieren.

Zweite Folgerung. Sind $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x) \cdots y_n = f_n(x)$ n voneinander linear unabhängige Lösungen von (1) so ist

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \cdots + C_n y_n \tag{5}$$

die allgemeinste Lösung von (1). Denn daß (5) überhaupt eine Lösung von (1) ist, geht aus der ersten Folgerung hervor; daß (5) aber die allgemeinste Lösung ist, geht aus dem Vorhandensein von n Konstanten hervor, welche man auf keine geringere Anzahl bringen kann, da ja nach Voraussetzung keine der n Lösungen $y_1, y_2 \dots y_n$ von den übrigen linear abhängt, d. h. keine Identität von der Form:

$$\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 \cdots + \lambda y_n = 0$$

existiert, wo $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$ konstant wären. Wäre es so, dann allerdings könnte man eine oder mehrere der Lösungen $y_1, y_2, \dots y_{n-1}, y_n$ durch die anderen linear ausdrücken, worauf nach Einsetzen in (5) nur eine geringere Anzahl willkürlicher Konstanten übrig bliebe.

Ein charakteristisches Merkmal linearer Differentialgleichungen ist also, daß durch n besondere und linear unabhängige Lösungen die allgemeinste Lösung bestimmt wird und noch dazu auf die allereinfachste Weise, nämlich nach (5) durch lineare Verbindung. Für lineare Differentialgleichungen kommt also die vollständige Integration auf die Auffindung von n solchen partikulären Lösungen heraus. Und durch diese Eigentümlichkeit unterscheiden sie sich von allen anderen Differentialgleichungen.

312. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Es sollten die Koeffizienten $a, b, c, \dots k, l$ beliebig gegebene Funktionen von x sein dürfen. Dann aber ist die Auffindung auch nur einer partikulären Lösung meist mit großen Schwierigkeiten verknüpft und auf elementare Weise überhaupt nicht möglich. Sind sie statt dessen aber sämtlich konstant, so lassen sich stets nicht nur eine, sondern gerade so viel, als gebraucht werden, also n partikuläre Lösungen folgendermaßen ermitteln. Die Differentialgleichung sei:

$$ay^n + by^{n-1} + cy^{n-2} + \cdots + ky' + ly = 0, \tag{1}$$

$a, b, c, \dots k, l$ seien konstante, aber beliebig gegebene Koeffizienten. Man versuche, ob etwa eine partikuläre Lösung von der Form

$$y = e^{\lambda x} \tag{2}$$

existiere, in der λ konstant ist. Man würde dann erhalten:

$$y = e^{\lambda x},\ y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \cdots y^{n-1} = \lambda^{n-1} e^{\lambda x},\ y^n = \lambda^n e^{\lambda x}$$

also nach Einsetzen in (1) und Fortlassung des Faktors $e^{\lambda x}$:

$$a\lambda^n + b\lambda^{n-1} + c\lambda^{n-2} \cdots + k\lambda + l = 0. \tag{3}$$

Die Frage nach der obigen partikulären Lösung ist also auf die Lösung der Gleichung n^{ten} Grades (3) zurückgeführt worden. Hat sie n verschiedene (reelle) Wurzeln:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n,$$

so entstehen auf diese Weise n unabhängige Lösungen und damit die allgemeine Lösung:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}. \tag{4}$$

Beispiel:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0. \tag{5}$$

Gleichung (3) wird im vorliegenden Falle:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0,$$

sie hat die drei Wurzeln

$$\lambda_1 = +1, \quad \lambda_2 = +2, \quad \lambda_3 = +3.$$

Folglich ist die allgemeinste Lösung:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}. \tag{6}$$

Zur Probe berechne man:

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{3x}$$
$$y'' = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} + 9C_3 e^{3x}$$
$$y''' = C_1 e^x + 8C_2 e^{2x} + 27C_3 e^{3x}$$

und setze in (5) ein. Es ergibt sich die Identität $0 = 0$.

Man muß aber mit drei Möglichkeiten rechnen: erstens, daß Gleichung (3) mehrfache (reelle) Wurzeln hat; zweitens, daß sie komplexe Wurzeln hat; drittens, daß sie mehrfache komplexe Wurzeln hat. Also:

Erstens. Eine Wurzel, etwa λ_1 sei eine mehrfache Wurzel, etwa eine doppelte (reelle) Wurzel. Es sei λ_2 die ihr gleiche Wurzel, also $\lambda_1 = \lambda_2$. Dann sind die beiden partikulären Lösungen

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

identisch und ihre lineare Verbindung:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2)$$

würde statt zweier Konstanten nur eine, nämlich $C_1 + C_2$ ergeben. Es fehlt also noch eine partikuläre Lösung, welche man durch folgende Limesrechnung erhält. Man setze nicht unmittelbar $\lambda_2 = \lambda_1$, sondern zunächst

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \varepsilon$$

mit der Absicht ε immer kleiner werden zu lassen. Es wird

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{(\lambda_1 + \varepsilon)x}$$
$$= e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 e^{\varepsilon x}).$$

Nach § 12 ist:

$$e^{\varepsilon x} = 1 + \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2}{2!}x^2 + \frac{\varepsilon^3}{3!}x^3 + \cdots,$$

also:

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x}\Big((C_1 + C_2) + C_2 \varepsilon x + C_2 \frac{\varepsilon^2}{2!} x^2 + \cdots\Big)$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$C_1 + C_2 = A, \quad C_2 \varepsilon = B$$

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x}\Big(A + Bx + \frac{B\varepsilon}{2!} x^2 + \frac{B\varepsilon^2}{3!} x^3 + \cdots\Big).$$

Nun nehme man an, A und B seien beliebig, aber ε werde unendlich klein, so wird:

$$\lim C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x}(A + Bx)$$

also, wenn nachher statt A und B wieder C_1 und C_2 geschrieben werden und auch sofort von einer Doppelwurzel auf eine $p$fache Wurzel verallgemeinert wird:

Ist λ_1 eine $p$fache Wurzel der Gleichung (3) so entsprechen ihr die p Lösungen

$$e^{\lambda_1 x}, \quad x e^{\lambda_1 x}, \quad x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots x^{p-1} e^{\lambda_1 x}$$

durch deren Zusammensetzung die Lösung:

$$e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots C_p x^{p-1})$$

entsteht.

Beispiel.

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Die kubische Gleichung wird:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Sie hat die drei Wurzeln:

$$\lambda_1 = +1, \quad \lambda_2 = +1, \quad \lambda_3 = -1$$

mithin ist die allgemeinste Lösung:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-x}.$$

Zur Probe berechne man auch:

$$y' = (C_1 + C_2 + C_2 x) e^x - C_3 e^{-x}$$
$$y'' = (C_1 + 2C_2 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-x}$$
$$y''' = (C_1 + 3C_2 + C_2 x) e^x - C_3 e^{-x}$$

und setze ein. Es ergibt sich identisch $0 = 0$.

Zweitens. Die Gleichung (3) habe komplexe Wurzeln. Es sei $\lambda_1 = p + qi$ eine solche. Da $a, b, \ldots k, l$ reell sein sollen, hat sie auch die konjugierte komplexe Wurzel. Sie sei: $\lambda_2 = p - qi$. Man setze entsprechend:

$$C_1 = A + Bi, \quad C_2 = A - Bi,$$

so wird:

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = (A + Bi)e^{(p+qi)x} + (A - Bi)e^{(p-qi)x}$$
$$= e^{px}(A(e^{iqx} + e^{-iqx}) + Bi(e^{iqx} - e^{-iqx}))$$

also nach den Formeln von Euler [227 3]

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = 2Ae^{px}\cos qx - 2Be^{px}\sin qx,$$

d. h. wenn man statt $2A$ und $-2B$ zuletzt wieder C_1 und C_2 schreibt: Sind:

$$\lambda_1 = p + qi, \quad \lambda_2 = p - qi$$

zwei konjugierte komplexe Wurzeln von (3), so hat (1) die beiden partikulären Lösungen:

$$e^{px}\cos qx \text{ und } e^{px}\sin qx,$$

die sich zu der Lösung:

$$C_1 e^{px}\cos qx + C_2 e^{px}\sin qx$$

vereinigen lassen. Statt dieser zwei kann man auch ein Glied, nämlich

$$Ae^{px}\cos q(x + a)$$

schreiben mit den willkürlichen Konstanten A und a, da:

$$\cos q(x + a) = \cos qx \cos qa - \sin qx \sin qa$$

ist, also:

$$C_1 = A\cos qa, \quad C_2 = -A\sin qa$$

zu setzen wäre. Selbstverständlich kann man auch:

$$Ae^{px}\sin q(x + a_1)$$

schreiben. Man sieht, aus den reinen Exponentialfunktionen werden für den Fall komplexer Wurzeln Verbindungen von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen. Ja, wenn die Wurzeln rein imaginär sind, also $p = 0$ ist, so werden die betreffenden Glieder rein trigonometrisch, nämlich:

$$C_1\cos qx + C_2\sin qx \text{ oder } A\cos q(x + a) \text{ oder } A\sin q(x + a_1).$$

Erstes Beispiel. Ein auf einer Geraden beweglicher Punkt P wird von einem festen Punkt so angezogen, daß die Anziehung dem Abstand proportional ist. Wie bewegt er sich? Vgl. [309], Fig. 146. Es soll sein:

$$\frac{d^2x}{(dt)^2} = -k^2x. \tag{7}$$

Die Differentialgleichung ist linear mit konstanten Koeffizienten; man setze also:

$$x = e^{\lambda t}, \quad \frac{dx}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \frac{d^2x}{(dt)^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

und erhält nach Division durch $e^{\lambda t}$ für λ die quadratische Gleichung:

$$\lambda^2 = -k^2, \quad \lambda = \pm ki.$$

Die allgemeine Lösung ist daher:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

oder auch:

$$x = A \cos (k(t + a)). \tag{8}$$

Die Bewegung ist also periodisch. Die Periode, nämlich:

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

ist von den Konstanten A und a gänzlich unabhängig. Die äußersten Ausschläge sind $x = \pm A$, also nach beiden Seiten von 0 gleich groß, aber sonst, da A eine Integrationskonstante ist, ganz beliebig. Auch irgend einer der Zeitpunkte, in denen sie erreicht werden, nämlich z. B. $t = -a$ ist ganz beliebig.

Man nennt Bewegungen, wie sie durch Gleichungen von der Form (8) bestimmt werden, harmonische Schwingungen. Sie sind die Grundbewegungen vollkommen elastischer schwingender Körper und spielen besonders in der Akustik und Optik eine hervorragende Rolle. Um A und a zu ermitteln, müssen Anfangsbedingungen gegeben sein, etwa so, daß P zur Zeit $t = 0$ eine bestimmte Abszisse $x_0 = A \cos ka$ und auch eine bestimmte Geschwindigkeit: $v_0 = -Ak \sin ka$ habe. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich A und a.

Zweites Beispiel.

$$y''' = y.$$

Die kubische Gleichung lautet: $\lambda^3 = 1$. Sie hat die drei Wurzeln

$$\lambda_1 = +1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3},$$

also ist die allgemeinste Lösung:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right) + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right).$$

Nach dreimaligem Differenzieren wird man in der Tat wieder y selbst erhalten.

Drittens. Die Gleichung (3) habe mehrfache komplexe Wurzeln. Sie habe etwa die Wurzel: $\lambda_1 = p + qi$, also auch die konjugierte Wurzel $\lambda_2 = p - qi$ als $m$fache Wurzeln.

Dann entsprechen diesen $2m$ Wurzeln die Glieder:

$$(C_1 + C_2 x + \cdots C_m x^{m-1}) e^{px} \cos qx + (C_{m+1} + C_{m+2} x + \cdots C_{2m} x^{m-1}) e^{px} \sin qx$$

(Beweis durch einen entsprechenden Grenzprozeß wie unter Erstens.)

Beispiel:

$$y'''' + 2y'' + y = 0.$$

Die Gleichung vierten Grades ist

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0, \quad (\lambda^2 + 1)^2 = 0;$$

sie hat die Wurzeln:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = +i, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -i,$$

also ist die allgemeinste Lösung:

$$y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x.$$

313. Wenn eine lineare Differentialgleichung beliebiger Ordnung ein Störungsglied hat, so lasse man es, wie in [304], vierter Fall zunächst fort, integriere ohne Störungsglied, setze es dann wieder hin und variiere die Konstanten. Wie, soll das folgende Beispiel lehren:

$$y'' + y = x^2. \tag{1}$$

Die Lösung ohne das Störungsglied, nämlich ohne x^2, ist:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{2}$$

Man nehme sie auch als Lösung von (1), betrachte aber C_1 und C_2 als noch zu ermittelnde Funktionen von x und differenziere zunächst einmal:

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \left(\cos x \frac{dC_1}{dx} + \sin x \frac{dC_2}{dx}\right). \tag{3}$$

Nun denke man sich C_1 und C_2 so bestimmt, daß die eingeklammerte Größe verschwindet:

$$\cos x \frac{dC_1}{dx} + \sin x \frac{dC_2}{dx} = 0 \tag{4}$$

und differenziere unter dieser Annahme noch einmal. Es folgt

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x - \sin x \frac{dC_1}{dx} + \cos x \frac{dC_2}{dx} \tag{5}$$

und nach Einsetzen von (2) und (5) in (1):

$$-\sin x \frac{dC_1}{dx} + \cos x \frac{dC_2}{dx} = x^2 \tag{6}$$

aus (4) und (6) folgt:

$$\frac{dC_1}{dx} = -x^2 \sin x; \quad \frac{dC_2}{dx} = +x^2 \cos x$$

und durch Integration nach [293]:

$$C_1 = (x^2 - 2) \cos x - 2x \sin x + A$$
$$C_2 = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + B.$$

Man setze in (2) ein. Es ergibt sich verhältnismäßig einfach:

$$y = x^2 - 2 + A \cos x + B \sin x \tag{7}$$

mit den Integrationskonstanten A und B.

So kann man jede lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit Störungsglied bewältigen, wenn man sie zunächst ohne Störungsglied bewältigt hat. Es erübrigen sich dann noch n Quadraturen. Aber auch diese sind unter Umständen entbehrlich, wenn man sich

nämlich auf andere Weise auch nur eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung mit Störungsglied verschafft hat. So ist z. B. leicht erkennbar, daß (1) eine partikuläre Lösung von der Form

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

haben wird. Dies gibt in (1) eingesetzt:

$$2\gamma + \alpha + \beta x + \gamma x^2 = x^2,$$

also durch Koeffizientengleichung:

$$2\gamma + \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \alpha = -2,$$

also

$$y = x^2 - 2$$

und daher entsteht die allgemeine Lösung, indem man in (2) rechts $x^2 - 2$ addiert, dann aber C_1 und C_2 konstant läßt, wie ja auch (7) ergibt, wo nur A und B für C_1 und C_2 geschrieben ist.

Oder es sei gegeben:

$$y'' + y = e^x,$$

so versuche man mit $y = ae^x$, $y'' = ae^x$. Man erhält:

$$2a = 1, \quad a = \tfrac{1}{2}.$$

Also ist die allgemeinste Lösung:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \tfrac{1}{2} e^x.$$

Oder es sei gegeben:

$$y'' + y = \sin 3x.$$

Man versuche mit $y = a \sin 3x$, $y'' = -9a \sin 3x$. Es folgt:

$$a = -\tfrac{1}{8}.$$

Also ist die allgemeinste Lösung:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \tfrac{1}{8} \sin 3x.$$

Oder es sei gegeben:

$$y'' + y = \sin x.$$

Hier führt der Ansatz: $y = a \sin x$ zu $a = \pm\infty$. Er versagt also. Aber man versuche mit:

$$y = ax \cos x, \quad y' = -ax \sin x + a \cos x, \quad y'' = -ax \cos x - 2a \sin x$$

und erhält:

$$-2a = 1, \quad a = -\tfrac{1}{2}.$$

Also ist die allgemeinste Lösung:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x \cos x}{2}$$

usw. Wenn man also durch einen „glücklichen Treffer“ eine parti-

kuläre Lösung ausgeklügelt hat, so braucht man die Methode der Variation der Konstanten nicht. Doch nützt aller Scharfsinn hier nur in besonderen Fällen.

Übungen zu § 40.

1) Es ist die Differentialgleichung a) für alle Geraden, b) für alle Kreise in der Ebene aufzustellen.

2) Versuch, ob die Differentialgleichung:

$$Ay + Bxy' + Cx^2y''' + Dx^3y''' + \cdots + Lx^ny^n = 0$$

eine partikuläre Lösung von der Form $y = x^k$ hat.

3) $$6y - 4xy' + x^2y'' = x^7.$$

4) $$4y - 3xy' + x^2y'' = x^2.$$

5) Gegeben die Differentialgleichung:

$$y' = f(x) + \varphi(x)y + \psi(x)y^2.$$

Man soll aus ihr eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten ohne Störungsglied. Setze $y = \lambda(x)z' : z$.

§ 41. Simultane Differentialgleichungen.

314. Wenn mehrere Differentialgleichungen zusammen gegeben sind, in denen aber eine einzige ursprüngliche Veränderliche x und beliebig viele zu ermittelnde Funktionen $y, z, u, \ldots$ von x nebst deren Ableitungen nach x bis zu irgendeiner Ordnung vorkommen, so nennt man sie simultan. Ein System simultaner Differentialgleichungen heißt vollständig, wenn ihre Anzahl mit der Anzahl der zu bestimmenden Funktionen übereinstimmt; wobei vorausgesetzt wird, daß keine der Gleichungen von den übrigen irgendwie abhängt.

Am einfachsten würde der Sachverhalt sein, wenn das System gänzlich zerfällt, d. h. wenn es besteht erstens in einer Differentialgleichung, welche außer x nur y nebst deren Ableitungen $y', y'', \ldots$ bis zu einer beliebigen Ordnung enthält, dagegen von $z, u, \ldots$ und deren Ableitungen gänzlich frei ist, zweitens in einer Differentialgleichung, welche außer x nur z nebst deren Ableitungen $z', z'', \ldots$ bis zu einer beliebigen Ordnung enthält, dagegen von $y, u, \ldots$ und deren Ableitungen gänzlich frei ist usw. Dann kann jede unabhängig von den anderen gelöst werden; sie mögen dann wohl in anderer Hinsicht zusammengehören, aber im eigentlichen Sinne sind sie nicht mehr simultan.

Das Wort simultan soll vielmehr bedeuten, daß jede Differentialgleichung erstens x und zweitens alle Funktionen $y, z, u, \ldots$ nebst deren Ableitungen $y', y'', \ldots; z', z'', \ldots; u', u'', \ldots$ jede bis zu einer

beliebigen Ordnung enthalten könne, also gar keine Möglichkeit vorliege, sie getrennt und unabhängig voneinander zu behandeln. Die Frage ist, was man mit einem solchen System anzufangen habe, wenn es integriert werden soll, d. h. wenn $y, z, u, \ldots$ als Funktionen von x

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x), \quad u = \psi(x) \ldots$$

so bestimmt werden sollen, daß nach Einsetzung derselben, nebst deren Ableitungen

$$y' = f'(x), \quad z' = \varphi'(x), \quad u' = \psi'(x) \ldots$$

usw. die Differentialgleichungen identisch, d. h. für jeden Wert von x erfüllt werden.

Am nächsten liegt der Versuch durch fortschreitende Elimination alle Funktionen nebst deren Ableitungen außer einer einzigen zu entfernen, so daß für diese eine einzige Differentialgleichung beliebiger Ordnung übrig bliebe. Also etwa so, wie man aus n Gleichungen mit n Unbekannten diese sämtlich bis auf eine eliminiert, so daß eine Endgleichung mit nur einer Unbekannten übrigbleibt.

Um mit dem leichtesten Falle zu beginnen, nehme man an, es seien zwei Differentialgleichungen, jede von der ersten Ordnung:

$$F(x, y, y', z, z') = 0 \tag{1}$$

$$\Psi(x, y, y', z, z') = 0 \tag{2}$$

gegeben. Solange F und Ψ ganz beliebige Funktionen von x, y, y', z, z' bleiben, ist die Möglichkeit aus ihnen entweder y und y' oder z und z' zu eliminieren, völlig ausgeschlossen; es wäre eine Ausnahme, wenn es ginge. Wenn man sich also auf (1) und (2) beschränkt, kann man nur sagen, es geht im allgemeinen nicht.

Aber man braucht sich ja nicht auf (1) und (2) zu beschränken, sondern kann aus jeder von ihnen durch Differenzieren und Wiederholung dieser Operation soviel neue Differentialgleichungen bilden, wie man will. Sie sind mit (1) und (2) implizite gegeben, aber von höherer Ordnung. Entwickelt man sie, soweit es nötig ist, und fügt sie zu (1) und (2) hinzu, so liegt die Sache freilich ganz anders.

Man differenziere also (1) und (2) total:

$$F_x'\,dx + F_y'\,dy + F_{y'}'\,dy' + F_z'\,dz + F_{z'}'\,dz' = 0$$

$$\Psi_x'\,dx + \Psi_y'\,dy + \Psi_{y'}'\,dy' + \Psi_z'\,dz + \Psi_{z'}'\,dz' = 0$$

und setze darauf:

$$dy = y'dx, \quad dy' = y''dx, \quad dz = z'dx, \quad dz' = z''dx,$$

so folgt nach Division durch dx:

$$F_x' + y'F_y' + y''F_{y'}' + z'F_z' + z''F_{z'}' = 0 \tag{3}$$

$$\Psi_x' + y'\Psi_y' + y''\Psi_{y'}' + z'\Psi_z' + z''\Psi_{z'}' = 0. \tag{4}$$

(3) und (4) sind Gleichungen zwischen $x, y, y', y'', z, z', z''$. Nimmt man sie zu (1) und (2) hinzu, so ist es sehr wohl möglich z, z' und z'' zu eliminieren, da man nun vier Gleichungen und nur drei fortzuschaffende Größen hat. Was übrig bleibt, ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\varphi(x, y, y', y'') = 0. \tag{5}$$

zwischen x und y, deren Integration nunmehr zu leisten wäre.

Weitere Integrationen sind dann nicht mehr nötig. Denn schon die Gleichungen (1) und (2) reichen aus, um nach Auffindung von y, also auch von y' die einstweilen eliminierte Funktion z zu ermitteln. Selbstverständlich hätte man auch umgekehrt erst y eliminieren können und wäre dann zu einer Enddifferentialgleichung von der Form:

$$f(x, z, z', z'') = 0 \tag{6}$$

gelangt, nach deren Lösung y ebenfalls ohne weitere Integration sich ergeben hätte.

Beispiel:

$$y' = z, \quad z' = -y. \tag{7}$$

Hier ist die Elimination von z äußerst einfach. Man differenziere die erste Gleichung noch einmal:

$$y'' = z'$$

und setze in die zweite Gleichung ein. Es folgt:

$$y'' = -y.$$

Die Lösung ist:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Alsdann folgt:

$$z = y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Die Lösung des simultanen Systems (7) ist also:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

mit den willkürlichen Konstanten C_1 und C_2, oder auch:

$$y = A \cos(x + a), \quad z = -A \sin(x + a)$$

mit den willkürlichen Konstanten A und a.

315. Die soeben in dem einfachen Falle zweier Differentialgleichungen erster Ordnung auseinandergesetzte Methode, aus einem simultanem System durch Differentiation und Elimination eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung zwischen nur zwei Veränderlichen x und y abzuleiten, hat man mit peinlichster Sorgfalt auf ihre allgemeine Anwendbarkeit geprüft. Das Ergebnis ist durchaus günstig gewesen, denn es gibt keine Ausnahme, in welcher die Überführung in eine solche Schlußdifferentialgleichung, nach deren Integration

weitere Integrationen nicht mehr nötig sind, ausgeschlossen wäre. Die Ordnung n dieser Schlußgleichung kann man durch ein einfaches, auf alle Fälle passendes Verfahren ermitteln.

Aber auch umgekehrt. Jede Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$F(x, y, y', y'' \cdots y^n) = 0 \tag{1}$$

läßt sich, und sogar auf unendlich viele Weisen, verwandeln in ein vollständiges System simultaner Differentialgleichungen, deren jede von geringerer Ordnung ist. Man hat hierzu geeignete Verbindungen von $x, y, y' \cdots$ als selbständige Veränderliche einzuführen unter Beilegung neuer Buchstaben. Ja, wenn man $y', y'' \cdots$ bis y^{n-1} als diese neuen Veränderlichen betrachtet, so wird jede dieser Differentialgleichungen von der ersten Ordnung. Denn setzt man z. B. $n = 3$ und

$$y' = z, \quad y'' = u, \tag{2}$$

oder

$$y' = z, \quad z' = u, \tag{3}$$

so geht (1) über, da $y''' = u'$ ist, in:

$$F(x, y, z, u, u') = 0. \tag{4}$$

(3) und (4) bilden zusammen ein simultanes System mit der ursprünglichen Veränderlichen x und den drei zu bestimmenden Funktionen y, z, u. Und jede der drei Differentialgleichungen dieses Systems ist von der ersten Ordnung. Nimmt man sie umgekehrt als ursprünglich gegeben an, so führt die Elimination von z und u wieder mühelos auf (1) zurück.

Faßt man zusammen, so folgt:

A) Jedes simultane vollständige System von Differentialgleichungen läßt sich durch Differentiationen und Eliminationen überführen in eine einzige Differentialgleichung von höherer Ordnung n, als jede der ursprünglichen, in der Weise, daß nach Lösung der letzteren weitere Integrationen nicht mehr erforderlich sind. Die Zahl n heißt die Ordnung des Systems.

B) Jedes simultane vollständige System von Differentialgleichungen beliebiger Ordnungen und von der Gesamtordnung n läßt sich unter Einführung einer hinreichenden Anzahl von Verbindungen der alten Veränderlichen und ihrer Ableitungen überführen in ein simultanes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung.

Daß auch B) richtig ist, folgt aus A), wenn man die Schlußdifferentialgleichung n^{ter} Ordnung, wie oben erläutert, in n Differentialgleichungen erster Ordnung auseinanderzieht. Doch ist auch die Überführung B) oft unmittelbar und sogar auf sehr einfache Weise möglich, so daß es einen sehr großen Umweg bedeuten würde, erst die Überführung A) vorzunehmen.

Beispiel. Gegeben sei das simultane System:

$$\frac{d^2x}{(dt)^2} = -\frac{k^2x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}, \quad \frac{d^2y}{(dt)^2} = -\frac{k^2y}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \tag{5}$$

mit der ursprünglichen Veränderlichen t und den zwei zu ermittelnden Funktionen x und y. Man führe außer x und y als selbständige Veränderliche ein:

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}.$$

Da dann

$$\frac{d^2x}{(dt)^2} = \frac{du}{dt}; \quad \frac{d^2y}{(dt)^2} = \frac{dv}{dt}$$

ist, so läßt sich (5) auseinanderziehen in die vier Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = v; \quad \frac{du}{dt} = -\frac{k^2x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k^2y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}. \tag{6}$$

Was soll man vorziehen, System (5) oder System (6)? Ersteres hat nur zwei Gleichungen, letzteres vier. Dies spricht für (5). Ersteres besteht aus Differentialgleichungen zweiter, letzteres aus solchen erster Ordnung. Dies spricht für (6). Im vorliegenden Falle sind beide Systeme so einfach ineinander überführbar, daß es kaum einen Unterschied macht, ob man das eine oder das andere nimmt. Im allgemeinen aber wird man ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung einem äquivalenten System einer geringeren Anzahl Differentialgleichungen höherer Ordnung doch vorziehen.

316. Aus A) folgt ferner unter Berücksichtigung von [308]:

Die allgemeinste Lösung eines Systems von Differentialgleichungen von der Gesamtordnung n enthält n voneinander unabhängige, willkürliche und nicht zu einer kleineren Anzahl zusammenziehbare Konstanten. Jede Lösung mit weniger Konstanten ist entweder partikulär oder singulär.

Die infinitesimale Konstruktion der allgemeinen Lösung kann folgendermaßen erfolgen, vgl. [306]. Man verwandle, wie soeben erläutert, das System in n Differentialgleichungen erster Ordnung mit der ursprünglichen Veränderlichen x und den zu bestimmenden Funktionen $y, z, u \cdots$ und löse sie nach:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad z' = \frac{dz}{dx}, \quad u' = \frac{du}{dx} \cdots$$

auf. So erhält man das System in expliziter Form:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, u \cdots) \\ z' &= \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, u \cdots) \\ u' &= \frac{du}{dx} = f_3(x, y, z, u \cdots) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und nehme an, daß einem bestimmten Wert von x, etwa $x = x_0$, beliebig gegebene Werte von $y, z, u \cdots$, etwa $y_0, z_0, u_0 \cdots$ entsprechen. Man setze in (1) ein, ändere x_0 um ein Differential dx_0 und berechne entsprechend:

$$dy_0 = f_1(x_0, y_0, z_0, u_0 \cdots) dx_0 \cdots$$

usw. und gehe so zu einem benachbarten Wertesystem:

$$x_1 = x_0 + dx_0, \quad y_1 = y_0 + dy_0 \cdots$$

über. Ebenso von $x_1, y_1, z_1 \cdots$ zu x_2, y_2, z_2 usf. in inf., ganz wie in [306]. Werden, auch wie in [306], statt der Differentiale hinreichend kleine Differenzen gesetzt, so lassen sich hinreichend genaue Lösungen wirklich bestimmen, so lange die Funktionen $f_1, f_2 \ldots$ endlich und stetig bleiben.

Doch wird man diesen Weg, der immer, selbst bei zweckmäßigster Anlage der Rechnung, ermüdend und langwierig zu beschreiten ist, nur wählen, wenn die Integration in geschlossener Form durch bekannte Funktionen nicht oder nur bis zu einem gewissen Punkte möglich oder allzu umständlich erscheint. Diese „eigentliche" Art der Integration beruht auf der Auffindung integrierender Faktoren, durch welche man exakte Differentialausdrücke erhält, genau wie in § 39 und § 40. Doch sei im folgenden nur ein einziges Beispiel gegeben.

317. Ein für alle Zeit klassisches Beispiel der Lösung eines Systems von Differentialgleichungen ist die Ableitung der drei Keplerschen Gesetze für die Bahnen der Planeten um die Sonne aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz, welches durch die Formel:

$$K = \frac{k^2 M m}{r^2}$$

ausgedrückt wird, wo M und m die Massen der beiden sich anziehenden Körper O und P, r ihren Abstand, k die sogenannte Gravitationskonstante und K die Stärke der Anziehung bedeuten. Setzt man O als „fest" voraus (die Sonne), nimmt als selbstverständlich an, daß die Bahn von P (Planet) in einer Ebene liegt, welche durch O geht, legt durch O in dieser Ebene die x- und y-Achse, so ist zunächst, wenn P die Koordinaten x und y hat:

Fig. 148.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ferner sind die Komponenten der Kraft nach den Achsen (das — Zeichen bedeutet Anziehung; $M = 1$ gesetzt):

$$X = -K \cos \varphi = -\frac{Kx}{r} = -\frac{k^2 m x}{r^3}$$

$$Y = -K \sin \varphi = -\frac{Ky}{r} = -\frac{k^2 m y}{r^3}$$

Nach dem dynamischen Grundgesetz:

Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung

angewendet auf beide Projektionen der Bewegung ist ferner:

$$m\frac{d^2x}{(dt)^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{(dt)^2} = Y,$$

also, wenn man die Werte für X und Y einsetzt und beide Seiten durch m dividiert:

$$\alpha)\ \frac{d^2x}{(dt)^2} = -\frac{k^2x}{r^3}; \quad \beta)\ \frac{d^2y}{(dt)^2} = -\frac{k^2y}{r^3}; \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2}\right) \tag{1}$$

Dieses System ist schon in [315 5] kurz betrachtet werden. Es ist von der vierten Ordnung, erfordert also zu seiner Auflösung vier Integrationen.

Ein erstes Paar integrierender Faktoren sind $-y\,dt$ und $x\,dt$. Man erhält

$$x\frac{d^2y}{(dt)^2}dt - y\frac{d^2x}{(dt)^2}dt = 0.$$

Die linke Seite läßt sich umformen in:

$$x\,dy' - y\,dx' = (x\,dy' + y'\,dx) - (y\,dx' + x'\,dy) - (y'\,dx - x'\,dy).$$

Das dritte Glied rechts verschwindet, wenn

$$y' = \frac{dy}{dt} \text{ und } x' = \frac{dx}{dt}$$

eingesetzt wird. Daher:

$$x\,dy' - y'\,dx = d(xy' - yx')$$

und nach Integration

$$xy' - yx' = C, \tag{2}$$

wo C eine erste Integrationskonstante bezeichnet.

Ein zweites Paar integrierender Faktoren sind dx und dy. Man erhält:

$$dx\frac{d^2x}{(dt)^2} + dy\frac{d^2y}{(dt)^2} = -\frac{k^2}{r^3}(x\,dx + y\,dy).$$

Die linke Seite läßt sich umformen in:

$$dx\frac{dx'}{dt} + dy\frac{dy'}{dt} = \frac{dx}{dt}dx' + \frac{dy}{dt}dy' = x'\,dx' + y'\,dy' = \tfrac{1}{2}d(x'^2 + y'^2).$$

Die rechte Seite läßt sich umformen in:

$$-\frac{k^2}{r^3}r\,dr = -\frac{k^2\,dr}{r^2} = d\left(\frac{k^2}{r}\right),$$

da aus $r^2 = x^2 + y^2$ folgt: $r\,dr = x\,dx + y\,dy$. Also nach Integration

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = \frac{k^2}{r} + D. \tag{3}$$

Ein drittes und viertes Paar integrierender Faktoren von (1) zu ermitteln, würde nicht ganz leicht sein. Man braucht es aber auch gar nicht, wenn man (1) verläßt und (2) und (3) als gegeben betrachtet. Denn (2) und (3) bilden auch zusammen ein vollständiges System von Differentialgleichungen zwischen x, y und t, welches zwar nicht so symmetrisch und einfach aussieht, wie (1), aber dafür den großen Vorzug einer niederen, nämlich der zweiten, Ordnung hat. Daher werde jetzt (1) verlassen und (2) und (3) genommen.

Wie der Erfolg alsbald zeigen wird, empfiehlt sich alsdann die Einführung von Polarkordinaten. Man setze also:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

und nach totaler Differentiation, immer nach t als der unabhängigen Veränderlichen:

$$x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi', \quad y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi'\cdot$$

$$\left(r' = \frac{dr}{dt}, \ \varphi' = \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

(2) und (3) werden dann nach möglichster Vereinfachung:

$$r^2\varphi' = C \text{ oder } r^2\frac{d\varphi}{dt} = C, \tag{2a}$$

$$r'^2 + r^2\varphi'^2 = 2\frac{k^2}{r} + 2D$$

oder:

$$\frac{(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2}{(dt)^2} = \frac{2k^2}{r} + 2D. \tag{3a}$$

Die Veränderlichen φ und t kommen in (2a) und (3a) nur als Differentiale $d\varphi$ und dt vor. Ihre Berechnung ergibt:

$$d\varphi = \frac{C\,dr}{r\sqrt{2Dr^2 + 2k^2r - C^2}}, \quad dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{2Dr^2 + 2k^2r - C^2}} \tag{4}$$

und schließlich durch Integration:

$$\varphi = \int\frac{C\,dr}{r\sqrt{2Dr^2 + 2kr - C^2}} + B, \quad t = \int\frac{r\,dr}{\sqrt{2Dr^2 + 2k^2r - C^2}} + F \tag{5}$$

wo B und F als dritte und vierte Integrationskonstante zu den beiden vorigen C und D hinzutreten. Damit ist die Integration von (1) in der Hauptsache erledigt.

Es sind aber noch die beiden Quadraturen in (5) auszuführen. Außerdem fehlt noch die Deutung der abgeleiteten Gleichungen.

318. Die beiden Quadraturen in [317 5] sind nach § 36 vorzunehmen. Wegen der ersten setze man nach [284] erstes Beispiel:

$$r = \frac{1}{\varrho}, \quad dr = -\frac{d\varrho}{\varrho^2};$$

es wird:

$$\varphi = -\int \frac{C d\varrho}{\sqrt{2D + 2k^2\varrho - C^2\varrho^2}} + B$$

und nach Einführung der quadratischen Ergänzung und Substitution von

$$\varrho - \frac{k^2}{C^2} = z, \quad d\varrho = dz$$

$$\varphi = -\int \frac{C\,dz}{\sqrt{\left(2D + \frac{k^4}{C^2}\right) - C^2 z^2}} + B.$$

Und wenn weiter gesetzt wird:

$$Cz = u\sqrt{2D + \frac{k^4}{C^2}},$$

so folgt nach Integraltafel [251 10a]:

$$\varphi = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + B = \operatorname{arc}(\cos = u) + B$$

und nach Wiedereinsetzen von r:

$$\left(u = \frac{Cz}{\sqrt{2D + \frac{k^4}{C^2}}} = \frac{C\left(\frac{1}{r} - \frac{k^2}{C^2}\right)}{\sqrt{2D + \frac{k^4}{C^2}}}\right)$$

$$\varphi = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{C\left(\frac{1}{r} - \frac{k^2}{C^2}\right)}{\sqrt{2D + \frac{k^4}{C^2}}}\right) + B. \tag{1}$$

Die erste Quadratur in [317 5] ist erledigt. Um die zweite vorzubereiten setze man sofort (am besten):

$$\sqrt{2Dr^2 + 2k^2 r - C^2} = v; \quad r = \frac{-k^2 + \sqrt{k^4 + 2C^2D + 2Dv^2}}{2D}$$

$$dr = \frac{v\,dv}{\sqrt{k^4 + 2C^2D + 2Dv^2}}; \quad \frac{r\,dr}{v} = -\frac{k^2 dv}{2D\sqrt{k^4 + 2C^2D + 2Dv^2}} + \frac{dv}{2D}$$

$$t = \int \frac{r\,dr}{v} + F = -\frac{k^2}{2D}\int \frac{dv}{\sqrt{k^4 + 2C^2D + 2Dv^2}} + \frac{1}{2D}\int dv + F.$$

Das letzte Integral rechts ist v selbst. Im ersten Integral setze man, je nachdem D negativ oder positiv ist

$$v = \frac{w}{\sqrt{-2D}}\sqrt{k^4 + 2C^2D},$$

oder:

$$v = \frac{w}{\sqrt{2D}}\sqrt{k^4 + 2C^2D},$$

also nach den zugehörigen Integralformeln:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{k^4 + 2C^2D + 2v^2D}} = \frac{\operatorname{arc}(\sin = w)}{\sqrt{-2D}} = \frac{1}{\sqrt{-2D}} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{v\sqrt{-2D}}{\sqrt{k^4 + 2C^2D}}\right) \quad (D < 0)$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{k^4 + 2C^2D + 2v^2D}} = \frac{\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = w)}{\sqrt{2D}} = \frac{1}{\sqrt{2D}} \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Sin} = \frac{v\sqrt{2D}}{\sqrt{k^4 + 2C^2D}}\right). \quad (D > 0)$$

Ist aber $D = 0$, so wird die Lösung rein algebraisch:

$$\sqrt{2k^2r - C^2} = v^2, \quad r = \frac{C^2 + v^2}{2k^2}, \quad dr = \frac{v\,dv}{k^2}$$

$$t = \int \frac{r\,dr}{v} + F = \int \frac{(C^2 + v^2)}{2k^4} dv + F = \frac{1}{2k^4} \cdot \left(C^2v + \frac{v^3}{3}\right) + F.$$

Also zusammengefaßt (vgl. auch [309] zweiter Fall):

$$t = \frac{v}{2D} - \frac{k^2}{2D\sqrt{-2D}} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{v\sqrt{-2D}}{\sqrt{k^4 + 2C^2D}}\right) + F, \quad (D < 0) \quad (2a)$$

$$t = \frac{1}{2k^4}\left(C^2v + \frac{v^3}{3}\right) + F, \quad (D = 0) \quad (2b)$$

$$t = \frac{v}{2D} - \frac{k^2}{2D\sqrt{2D}} \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Sin} = \frac{v\sqrt{2D}}{\sqrt{k^4 + 2C^2D}}\right) + F, \quad (D > 0) \quad (2c)$$

und in allen drei Fällen ist:

$$v = \sqrt{2Dr^2 + 2k^2r - C^2}. \quad (3)$$

319. Für die Planeten ist D negativ, wie sich zeigen wird. Die Zusammenstellung aus [317] und [318] ergibt daher folgende vier Integralgleichungen in Polarkoordinaten:

$$\text{I.} \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C.$$

$$\text{II.} \quad \frac{(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2}{(dt)^2} = \frac{2k^2}{r} + 2D.$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{C\left(\frac{1}{r} - \frac{k^2}{C}\right)}{\sqrt{2D + \frac{k^4}{C^2}}}\right) + B.$$

$$\text{IV.} \quad t = \frac{\sqrt{2Dr^2 + 2k^2r - C^2}}{2D} - \frac{k^2}{2D\sqrt{-2D}} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{-2D}\sqrt{2Dr^2 + 2k^2r - C^2}}{\sqrt{k^4 + 2C^2D}}\right) + \quad (D < 0)$$

Diese Integrale sind nun noch zu deuten.

Deutung von I. Nach IIIa in [170] ist $r^2 d\varphi$ das Doppelte des Sektors dS, den r beschreibt. Aus I wird daher

$$\frac{2\,dS}{dt} = C \quad \text{oder} \quad \frac{dS}{dt} = \frac{C}{2},$$

d. h. die Flächengeschwindigkeit ist konstant. Oder auch:

Zweites Keplersches Gesetz. Die von dem Radiusvektor nach der Sonne in gleichen Zeiten beschriebenen Flächen sind einander gleich.

Dasselbe Gesetz gilt übrigens für alle sog. Zentralbewegungen d. h. für alle Bewegungen, welche unter dem Einfluß einer nach einem festen Punkte hin oder von einem festen Punkte fortgerichteten Kraft (Anziehung oder Abstoßung von einem festen Punkte) erfolgen. Ferner sei erwähnt, daß das zweite Keplersche Gesetz der erste und einfachste Fall gewesen ist für das allgemeine sog. Prinzip der Flächen, welches in der Mechanik eine sehr große Bedeutung erlangt hat.

Deutung von II. Nach [170] ist: $(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 = (ds)^2$. Aus II wird daher:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{r} + 2D \text{ oder } v^2 = \frac{2k^2}{r} + 2D,$$

wo v die Bahngeschwindigkeit bezeichnet. Daher nach Multiplikation mit $\frac{m}{2}$ und Berücksichtigung, daß $M = 1$ gesetzt wurde:

$$m\frac{v^2}{2} = \frac{k^2 Mm}{r} + Dm.$$

Die linke Seite ist die sog. lebendige Kraft oder vis viva oder Bewegungsenergie des Planeten in seiner Bewegung um die Sonne. Rechts steht die sog. potentielle Arbeit der Kraft, einschließlich einer Konstanten Dm. Also bedeutet II die Äquivalenz zwischen Arbeit und Bewegungsenergie im vorliegenden Falle. Bekanntlich besteht diese Äquivalenz ganz allgemein und nach abermaliger Erweiterung wird sie zu dem Satz von der Erhaltung der Energie, welcher neben dem Satz von der Erhaltung der Masse als Grundpfeiler der heutigen Naturwissenschaften gilt.

Deutung von III. Da r und φ Polarkoordinaten sind, so handelt es sich um die Polargleichung der Bahn des Planeten in einer allerdings sehr unbequemen Form, die daher noch der Umgestaltung bedarf. Zunächst gibt die Umkehrung:

$$\frac{C\left(\frac{1}{r} - \frac{k^2}{C^2}\right)}{\sqrt{2D + \frac{k^4}{C^2}}} = \cos(\varphi - B)$$

und hieraus folgt nach Berechnung von r:

$$r = \frac{\frac{C^2}{k^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2DC^2}{k^4}}\cos(\varphi - B)}. \tag{IIIa}$$

Diese Form läßt sofort die Bahn erkennen, wenn man weiß, daß:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \psi} \tag{IIIb}$$

die Polargleichung eines Kegelschnittes ist, bezogen auf einen Brennpunkt als Pol, wobei die Anfangsrichtung mit der zugehörigen Hauptachse zusammenfällt. (IIIa) wird mit (IIIb) identisch, wenn gesetzt wird:

$$\varphi - B = \psi, \tag{1}$$

$$p = \frac{C^2}{k^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2DC^2}{k^4}}. \tag{2}$$

Es entspricht (1) einer Drehung um den konstanten Winkel B. Da aber auch einerseits D, C und k^2 in (IIIa), andererseits p und ε konstant sind, so folgt, daß die Bahn ein solcher Kegelschnitt ist. Er ist, wie die analytische Geometrie zeigt, eine Ellipse, wenn $\varepsilon < 1$, also D negativ, eine Parabel, wenn $\varepsilon = 1$, also $D = 0$, und eine Hyperbel, wenn $\varepsilon > 1$, also D positiv ist. Für einen Planeten kann selbstverständlich nur das erste von den dreien eintreten. Daher:

Erstes Keplersches Gesetz. Die Bahn des Planeten ist eine Ellipse und die Sonne steht in einem Brennpunkte.

Es sei a die große, b die kleine Halbachse der Bahn. So ist bekanntlich:

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

und umgekehrt:

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \tag{3}$$

und nach (2):

$$a = \frac{k^2}{-2D}, \quad b = \frac{C}{\sqrt{-2D}} \tag{4}$$

(D ist hier negativ). Oder auch:

$$D = -\frac{k^2}{2a}, \quad C = k\sqrt{p} = \frac{kb}{\sqrt{a}}, \tag{5}$$

womit die Bedeutung der Integrationskonstanten C und D für die Bahn aufgezeigt ist.

Deutung von IV. Man erhält zunächst für die auftretende Wurzel nach (5):

$$\sqrt{2Dr^2 + 2k^2r - C^2} = \sqrt{-\frac{k^2}{a}r^2 + 2k^2r - \frac{k^2(a^2 - e^2)}{a}} = \frac{k}{\sqrt{a}}\sqrt{e^2 - (r-a)^2}.$$

Nach (IIIb) ist:

$$r - a = \frac{b^2}{a + e\cos\psi} - a = \frac{b^2 - a^2 - ea\cos\psi}{a + e\cos\psi} = -e\frac{\cos\psi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\psi},$$

daher:

$$\sqrt{2Dr^2+2k^2r-C^2} = \frac{ke}{\sqrt{a}}\sqrt{1-\left(\frac{\cos\psi+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\psi}\right)^2} = \frac{ke\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{1-\cos^2\psi}}{1+\varepsilon\cos\psi},$$

also zuletzt, da $\sqrt{1-\cos^2\psi} = \sin\psi$ ist (eigentlich $= \pm\sin\psi$, da aber nach (IIIb) das Vorzeichen von ψ nicht bestimmt werden kann, so ist das $+$Zeichen genommen worden):

$$\sqrt{2Dr^2+2k^2r-C^2} = \frac{keb}{a\sqrt{a}}\cdot\frac{\sin\psi}{1+\varepsilon\cos\psi}.$$

Dies ist in (IV) einzusetzen. Außerdem ist noch

$$2D = -\frac{k^2}{a}$$

und

$$\sqrt{k^4+2C^2D} = \sqrt{k^4-\frac{k^2}{a}\cdot\frac{k^2b^2}{a}} = k^2\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}} = k^2\varepsilon$$

einzusetzen. Man erhält nach Ausführung der Zwischenrechnungen:

$$t = \frac{a\sqrt{a}}{k}\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\psi}{1+\varepsilon\cos\psi} + \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{\sin\psi}{1+\varepsilon\cos\psi}\right)\right) + F. \quad \text{(IVa)}$$

Um diese Gleichung, welche nunmehr die Zeit t nicht mehr durch r, sondern durch ψ ausdrückt, so viel als möglich zu vereinfachen, setze man den arcus $= E$, also:

$$E = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sin\psi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\varepsilon\cos\psi}\right) \quad (6)$$

oder umgekehrt:

$$\sin E = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{\sin\psi}{1+\varepsilon\cos\psi} = \frac{b}{a}\,\frac{\sin\psi}{1+\varepsilon\cos\psi}. \quad (7)$$

Diese Beziehung zwischen E und ψ läßt sich mannigfach abändern, so z. B. berechne man:

$$\cos E = \sqrt{1-\sin^2 E} = \frac{\sqrt{(1+\varepsilon\cos\psi)^2-(1-\varepsilon^2)\sin^2\psi}}{1+\varepsilon\cos\psi}$$

$$= \frac{\sqrt{(1+\varepsilon\cos\psi)^2-(1-\varepsilon^2)(1-\cos^2\psi)}}{1+\varepsilon\cos\psi}$$

oder, da der Radikand in $(\varepsilon+\cos\psi)^2$ umgeformt werden kann:

$$\cos E = \frac{\varepsilon+\cos\psi}{1+\varepsilon\cos\psi} \quad \text{oder:} \quad \cos\psi = \frac{-\varepsilon+\cos E}{1-\varepsilon\cos E}. \quad \text{(7a)}$$

Noch einfacher ist folgende Form: Man berechne:

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \frac{\sin\frac{E}{2}}{\cos\frac{E}{2}} = \frac{\sin E}{1+\cos E} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\psi}{(1+\varepsilon\cos\psi)+(\varepsilon+\cos\psi)} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\psi}{(1+\varepsilon)(1+\cos\psi)}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}; \quad \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \quad \text{(7b)}$$

Ferner führe man in (IVa) die Abkürzungen ein:

$$\alpha)\quad \frac{k}{a\sqrt{a}} = n; \qquad \beta)\quad n(t-F) = M. \tag{8}$$

Dann geht (IVa) (F auf die linke Seite gebracht, mit n multipliziert und rechts beide Glieder vertauscht) über in:

$$M = E - \varepsilon \sin E. \tag{IVb}$$

Diese sog. Keplersche Gleichung tritt an die Stelle von (IV). Um nun zu irgendeiner Zeit die Lage des Planeten, d. h. ψ und r zu bestimmen, berechne man sofort aus t nach (8β) die Hilfsgröße M. Dann ergibt (IVb) durch Auflösung E, und aus E folgt nach (7a) oder (7b) ψ und endlich nach (IIIa) den Radiusvektor r. Übrigens ist F die Epoche des Perihels, d. h. der Augenblick (oder vielmehr ein Augenblick) in dem der Planet durch das Perihel geht. Denn setzt man $t = F$, so ergibt (8) $M = 0$, also nach (IVb) $E = 0$ und nach (7b) $\psi = 0$.

Vermehrt man E um 2π ($=$ arc 360^0), so vermehrt man auch M um 2π und nach (7b), da E und ψ gleichzeitig wachsen, auch ψ um 2π. Dagegen wird t nach (8) um $\frac{2\pi}{n}$ vermehrt. Nun entspricht der Vermehrung von ψ um 2π offenbar ein voller Umlauf des Planeten in seiner Bahn. Also ist die Umlaufszeit oder das Jahr T des Planeten:

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{k}. \tag{9}$$

Aus (9) folgt, da k für alle Planeten denselben Wert hat, wenn irgend zwei von ihnen herausgegriffen und ihnen die Indizes 1 und 2 beigelegt werden, die Proportion:

$$T_1 : T_2 = a_1\sqrt{a_1} : a_2\sqrt{a_2} \quad \text{oder:}\quad T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3, \tag{10}$$

d. h.

Drittes Keplersches Gesetz. Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der mittleren Entfernungen von der Sonne

320. Noch drei Nachträge A), B) und C) zu [319].

A) Die Integration (IV) in [319] hätte man durch eine geometrische Ableitung ersetzen können wie folgt: Es ist nach (I) und [319 5]:

$$\frac{r^2 d\varphi}{2} = dS = \frac{C}{2}\,dt = \frac{k}{2}\,\frac{b}{\sqrt{a}}\,dt.$$

In der Zeit t wird also der Sektor $S = \frac{k}{2}\,\frac{b}{\sqrt{a}}\,t$ beschrieben. Setzt man hier für t die Umlaufszeit T, so wird S zum Flächeninhalt der

Ellipse $= \pi a b$. Also:

$$\pi a b = \frac{k}{2} \frac{b}{\sqrt{a}} T, \qquad T = \frac{2 \pi a \sqrt{a}}{k},$$

d. h. (9) und damit das dritte Keplersche Gesetz sind wieder gefunden.

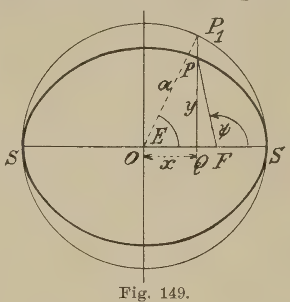


Fig. 149.

Man bezeichne ferner mit G die Epoche des Perihels. (Also nicht mit F wie in [318] und [319], weil jetzt dieser Buchstabe für den Brennpunkt beschlagnahmt wird.) Dann folgt für einen beliebigen Zeitpunkt:

$$\text{Sektor } SFP = \frac{k}{2} \frac{b}{\sqrt{a}} (t - G).$$

Nun ist ferner die Ellipse Projektion des Scheitelkreises (in der Figur noch FP_1 zu ziehen), also:

$$\text{Sektor } SFP = \frac{b}{a} \text{ Sektor } SFP_1 = \frac{b}{a} \text{ Sektor } SOP_1 - \frac{b}{a} \Delta OFP_1$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot E - \frac{b}{a} \cdot \frac{e}{2} a \sin E = \frac{ab}{2} (E - \varepsilon \sin E)$$

Eingesetzt, durch $\frac{ab}{2}$ dividiert und wie vorhin die Abkürzungen (8) eingeführt, folgt wieder (IVb), d. h. die Keplersche Gleichung ist wieder gefunden. Überdies aber ist jetzt die geometrische Bedeutung von E nachgewiesen. Endlich ist (vgl. IIIb):

$$y = r \sin \psi = \frac{p \sin \psi}{1 + \varepsilon \cos \psi}; \quad Y = QP_1 = a \sin E$$

und $Y = \frac{a}{b} y$. Eingesetzt, und $p = \frac{b^2}{a}$ geschrieben, folgt sofort wieder (7), d. h. die Beziehung zwischen E und ψ ist wieder gefunden.

Es sei noch angemerkt, daß M, E und ψ als Anomalien bezeichnet werden und zwar M als „mittlere", E als „exzentrische" (d. h. aus dem Zentrum der Ellipse genommene) und ψ als „wahre" Anomalie (M fehlt in Fig. 149). Sie fallen alle drei im Perihel und Aphel zusammen. Ist aber die Ellipse ein Kreis oder $\varepsilon = 0$, so fallen die drei Anomalien überhaupt zusammen.

B) Selbstverständlich hätte man auch anders integrieren können, als in [318] geschehen. Viel einfacher z. B. wäre der folgende, freilich recht versteckte Weg gewesen.

Man leite zunächst das Flächenintegral ab

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C \tag{1}$$

wie in [318 2]. Dann schreibe man die Grundgleichungen [318 1] in der Form:

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{-k^2 x}{r^3}\,dt, \quad d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-k^2 y}{r^3}\,dt$$

und führe rechts $dt = \frac{x\,dy - y\,dx}{C}$ aus (1) ein. Es folgt:

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{k^2}{C}\,\frac{x(x\,dy - y\,dx)}{r^3}, \quad d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{k^2}{C}\,\frac{y(x\,dy - y\,dx)}{r^3}.$$

Die beiden Brüche mit dem Nenner r^3 sind, wie man sich, wenn für r sein Wert $\sqrt{x^2 + y^2}$ gesetzt wird, überzeuge, exakte Differentiale, nämlich von $+\frac{y}{r}$ und $-\frac{x}{r}\cdot$ (Hierin liegt die vorhin genannte Versteckheit, denn wer sieht das diesen Brüchen sofort an?). Die Integration ergibt daher:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k^2}{C}\,\frac{y}{r} + C_1, \quad \frac{dy}{dt} = +\frac{k^2}{C}\,\frac{x}{r} + C_2 \tag{2}$$

wenn C_1 und C_2 zwei neue Integrationskonstanten sind.

Durch Einsetzen von (2) in (1) entsteht die Gleichung der Bahn, welche sich, wie man sehr leicht erkennt, nach Einführung von Polarkoordinaten ohne große Mühe in die Form IIIb bringen läßt. Alsdann kann die vierte Integration wieder wie früher vorgenommen oder auch durch die vorige geometrische Ableitung ersetzt werden.

Man hat aber noch manche andere sehr beachtenswerte Lösungsarten gefunden. Es gilt eben die in [305] gemachte Bemerkung, daß oft eine Differentialgleichung oder ein System von Differentialgleichungen auf recht verschiedene Weisen gelöst werden kann.

C) Die Annahme, daß der eine Körper (die Sonne) fest sei, ist in Wirklichkeit nicht erfüllt. Auch zieht nicht nur die Sonne den Planeten, sondern (nach der Actio und Reaktio) auch der Planet die Sonne an mit gleicher Kraft. Trotzdem bleibt die gegebene Theorie anwendbar, wenn man sich auf die Relativbewegung des Planeten zur Sonne beschränkt. Da die Massen aller Planeten sehr klein gegen die Sonnenmasse sind, gelten die Keplerschen Gesetze sehr angenähert, so daß Kepler sie aus den astronomischen Beobachtungen durch deren gründlichste Untersuchung entdeckt hat. Wenn aber beliebig viel Körper mit beliebigen Massen unter dem Einfluß der Gravitation ihre Bewegungen gegeneinander ausführen, so entsteht ein Problem, das sogenannte Vielkörperproblem, welches trotz der unerhörtesten Anstrengungen der hervorragendsten Mathematiker noch nicht gelöst worden ist in dem Sinne, daß sich geschlossene Ausdrücke für die Bewegungen ergeben hätten, wie es bei nur zwei Körpern durch die Keplerschen Gesetze der Fall ist. Dennoch sind ihre Bemühungen in anderer Hinsicht von größtem Erfolge gewesen, insofern nämlich

durch sie die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen überhaupt auf erheblich größere Höhe gehoben worden ist. Das würde jedoch weit über die Elemente hinausgehen.

Übungen zu § 41.

1) Wenn der Mond in seinem jetzigen Abstand von der Erde mit seiner jetzigen Geschwindigkeit um diese in rund 28 Tagen einen Kreis beschreibt, in welcher Zeit würde er, wenn er durch einen Impuls zum Stillstand gebracht werden könnte, durch die Anziehungskraft der als fester Punkt betrachteten Erde auf sie herunter gekommen sein?

2) Das simultane System:

$$\frac{dy}{dx} = -3y + 7z - 3u, \quad \frac{dz}{dx} = -6y + 12z - 5u, \quad \frac{du}{dx} = -12y + 22z - 9u$$

ist zu integrieren.

§ 42. Partielle Differentialgleichungen.

321. Eine (gewöhnliche) partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F\left(x, y, z, \cdots, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \cdots\right) = 0 \tag{1}$$

ist eine Gleichung, in welcher enthalten sind 1) beliebige viele unabhängige Veränderliche $x, y, z, \ldots$ 2), eine einzige abhängige Veränderliche V, 3) die partiellen Differentialquotienten von V nach den unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ Die zu 1) und 2) genannten Größen dürfen zum Teil oder auch ganz in (1) fehlen; von den zu 3) genannten Größen dürfen aber nicht alle in (1) fehlen, weil (1) dann aufhören würde eine Differentialgleichung zu sein.

Eine solche Differentialgleichung integrieren heißt V als Funktion von $x, y, z \ldots$

$$V = f(x, y, z, \ldots) \tag{2}$$

so zu bestimmen, daß nach Einsetzen die Differentialgleichung zu einer Identität wird, die also für alle Werte von $x, y, z, \ldots$ richtig bleibt. Wie bei totalen Differentialgleichungen unterscheidet man auch hier zwischen besonderen Lösungen und der allgemeinsten Lösung. Erstere sind sämtlich in der letzteren als besondere Fälle enthalten.

Wie man auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung kommen, und wie man sie integrieren kann, wenn sie sehr einfach aussieht, sei an folgenden Beispielen erläutert.

Erstes Beispiel. Es soll die Bedingung aufgestellt werden, daß eine Veränderliche V, die im allgemeinen von $x, y, z \ldots$ abhängen darf, von einer der letzteren, etwa von x gänzlich unabhängig ist. Die Gleichung (2) soll lauten:

$$V = f(y, z, \ldots) \tag{3}$$

wo f eine beliebige Funktion von $y, z, \ldots$ ist, in welcher x überhaupt nicht vorkommt. Es ergibt sich durch partielle Differentiation nach x sofort:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

also eine partielle Differentialgleichung von der Form (1), allerdings so einfach, wie sie überhaupt nur sein kann. Ja, sie wird erst eine solche, wenn man weiß, daß V noch von anderen Veränderlichen $y, z, \ldots$ abhängen darf.

Ist umgekehrt (4) in diesem Sinne gegeben, so wird offenbar weder mehr noch weniger verlangt, als daß V nicht von x, sondern nur von $y, z, \ldots$ abhängt, d. h. (3) ist die allgemeinste Lösung oder das allgemeinste Integral von (4), wenn f eine beliebige Funktion von $y, z, \ldots$ bedeutet. Man achte also darauf, daß selbst in diesem allereinfachtsen Falle schon ein wesentlicher Unterschied zwischen partiellen und totalen Differentialgleichungen zu Tage tritt. Während bei letzteren das allgemeinste Integral nur eine oder mehrere willkürliche Konstanten enthält, tritt hier eine willkürliche Funktion auf, die aber nicht soviel unabhängige Veränderliche enthält, als ursprünglich vorhanden waren, sondern eine weniger. Es wird sich ein Gleiches bei allen partiellen Differentialgleichungen zeigen.

Überhaupt ist (4) trotz seiner äußersten Einfachheit in mancher Hinsicht vorbildlich für Gleichungen von der allgemeinen Form (1). Wenn es z. B. gelingt, in irgend einem Falle durch irgend welche Transformationen (1) in (4) umzuwandeln, so ist damit auch (1) sofort gelöst. Es gelingt aber leider nicht immer.

Zweites Beispiel. Es soll eine Funktion V von $x, y, z \ldots$ nur von den Differenzen dieser Veränderlichen abhängen.

Lösung: Die Differenzen bleiben unverändert, wenn man alle Veränderliche um ein und dieselbe Zahl h vermehrt. Setzt man daher:

$$x' = x + h, \quad y' = y + h, \quad z' = z + h, \ldots \tag{5}$$

so soll sein identisch:

$$V(x', y', z' \ldots) \equiv V(x, y, z, \ldots) \tag{6}$$

d. h. V soll von h gar nicht abhängen, also $\frac{\partial V}{\partial h} = 0$ sein. Nun ist nach [172 7]

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial h} + \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial h} + \frac{\partial V}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial h} + \cdots$$

Hier folgt aus (5) sofort $\frac{\partial x'}{\partial h} = \frac{\partial y'}{\partial h} = \frac{\partial z'}{\partial h} = \cdots = 1$. Also ergibt sich, wenn zuletzt wieder $h = 0$ gesetzt wird, die partielle Differentialgleichung:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} + \cdots \tag{7}$$

d. h. eine Gleichung von der Form (1), die zwar nicht ganz so einfach ist wie (4), aber doch einfach genug.

Ist umgekehrt (7) zur Integration vorgelegt, so transformiere man etwa wie folgt: Statt $x, y, z, \ldots$ werden ebensoviel andere Veränderliche $x_1, y_1, z_1, \ldots$ durch die Gleichungen:

$$x = x_1, \quad y - x = y_1, \quad z - x = z_1 \cdots \tag{8}$$

eingeführt; folglich auf Grund dieser Transformationen

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = +1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial z} = 0 \cdots$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y} = +1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z} = 0 \cdots$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z_1}{\partial z} = +1 \cdots$$

also nach [172]:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial y_1} - \frac{\partial V}{\partial z_1} \cdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z_1}, \cdots$$

Die Gleichung (7) wird daher transformiert in

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0,$$

d. h. in die Form (4). Das allgemeinste Integral ist daher

$$V = f(y_1, z_1, \ldots),$$

d. h. nach (8)

$$V = f(y - x, z - x, \ldots)$$

d. h. V hängt wirklich nur von den Differenzen der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ab.

Drittes Beispiel. Der Satz von den homogenen Funktionen. Man nennt V eine homogene Funktion n^{ter} Ordnung von $x, y, z, \ldots$, wenn nach der Transformation:

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z, \ldots \tag{9}$$

die Identität folgt:

$$V(x', y', z' \ldots) \equiv \lambda^n V(x, y, z \cdots). \tag{10}$$

Man differenziere partiell nach λ, siehe [172]. Es wird:

$$\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \lambda} + \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \lambda} + \frac{\partial V}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial \lambda} + \cdots = n\lambda^{n-1} \cdot V(x, y, z \cdots).$$

Es ist hier: $\frac{\partial x'}{\partial \lambda} = x$, $\frac{\partial y'}{\partial \lambda} = y$, $\frac{\partial z'}{\partial \lambda} = z$, $\cdots$ Daher wenn zuletzt $\lambda = 1$ gesetzt wird:

$$x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} \cdots = n V, \tag{11}$$

also eine partielle Differentialgleichung von der Form (1) (wenn $n V$ nach links gebracht wird). Ist umgekehrt (1) zur Integration vorgelegt, so transformiere man etwa wie folgt: Statt $x, y, z \ldots V$ werden ebenso viel andere Veränderliche $x_1, y_1, z_1 \ldots V_1$ durch die Gleichungen:

$$x_1 = x, \quad y_1 = \frac{y}{x}, \quad z_1 = \frac{z}{x} \cdots, \quad V = x^n V_1 \tag{12}$$

eingeführt. Es folgt hiernach:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = +1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial z} = 0, \cdots$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z} = 0, \cdots$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{z}{x^2}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z_1}{\partial z} = \frac{1}{x}, \cdots$$

also nach [172]:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x^n \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial V_1}{\partial y_1} - \frac{z}{x^2}\frac{\partial V_1}{\partial z_1} \cdots\right) + V_1 n x^{n-1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x^{n-1}\frac{\partial V_1}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = x^{n-1}\frac{\partial V_1}{\partial z_1}, \cdots$$

Damit wird (11) transformiert in:

$$x^{n+1}\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = 0$$

d. h. in (4). Das allgemeinste Integral ist daher:

$$V_1 = f(y_1, z_1, \ldots)$$

und daher umgekehrt:

$$V = x^n f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \cdots\right)$$

d. h. V ist in der Tat eine homogene Funktion n^{ter} Ordnung von $x, y, z, \ldots$ Denn nach Ausführung von (9) ist die Identität (10) erfüllt, weil $y:x$, $z:x$, $\ldots$ sich nicht ändern und $x_1{}^n = (\lambda x)^n = \lambda^n x^n$ wird.

Man nennt die Gleichung (11) den Satz von den homogenen Funktionen. Ist im besonderen $n = 0$, d. h. soll V nur von den Verhältnissen $x : y : z \ldots$ abhängen, so ergibt sich:

$$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} \cdots = 0. \tag{11a}$$

Viertes Beispiel. Es ist die Bedingung aufzustellen, daß eine Gleichung von der Form $z = f(x, y)$ eine Fläche vorstellt, die durch Umdrehung irgend einer Kurve um die z-Achse entstehen würde.

Lösung: (Fig. 150). Jeder Punkt der Kurve beschreibt einen Kreis, dessen Ebene zur z-Achse senkrecht steht und dessen Mittelpunkt auf ihr liegt. Sein Radius $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ hängt daher nur von z ab, folglich ist umgekehrt z eine Funktion von ϱ oder von ϱ^2

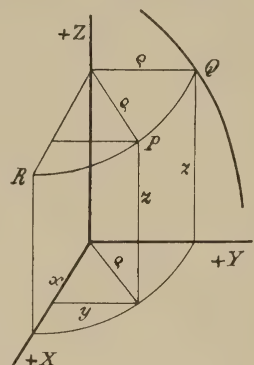


Fig. 150.

$$z = \varphi(\varrho^2) = \varphi(x^2 + y^2),$$

also:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial(\varrho^2)} \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial(\varrho^2)} \cdot 2y,$$

daher nach Elimination von $\frac{\partial z}{\partial(\varrho^2)}$:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{13}$$

d. h. eine partielle Differentialgleichung von der Form (1), nur z statt V geschrieben (in welcher $z = V$ selbst nicht vorhanden ist). Liegt umgekehrt (13) zur Integration vor, so transformiere man etwa wie folgt:

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x, \quad \left(\text{oder } x = v, \quad y = \sqrt{u^2 - v^2}\right).$$

Es ergibt sich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

also nach [172]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} 2x + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} 2y.$$

Damit wird (13) umgeformt in:

$$y\frac{\partial z}{\partial v} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

d. h. z hängt nur von u, aber nicht von v ab, d. h. die Lösung ist:

$$z = \varphi(u) = \varphi(x^2 + y^2).$$

Die Fläche ist also wirklich eine Umdrehungsfläche um die z-Achse.

322. Das zweite, dritte und vierte Beispiel in [321] sind auf das erste, d. h. auf die einfachste aller partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt, aber es ist auch hervorgehoben worden, daß dies nur ausnahmsweise möglich ist. Die beiden folgenden Beispiele gehören nicht zu diesen Ausnahmen.

Fünftes Beispiel. Die Gleichung einer Fläche sei $z = F(x, y)$. Es ist die Bedingung zu erfüllen, daß die Länge der Normalen bis zur xy-Ebene konstant $= r$ sei.

Lösung. Man bezeichne wie gewöhnlich $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Dann lauten die Gleichungen der Normalen [165], E.

$$X - x : Y - y : Z - z = p : q : -1$$

oder

$$X - x = \lambda p, \quad Y - y = \lambda q, \quad Z - z = -\lambda.$$

Für den Schnittpunkt mit der xy-Ebene ist $Z = 0$, also $\lambda = z$. Es soll sein: $(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = r^2$, daher:

$$z^2(p^2 + q^2 + 1) - r^2 = 0, \tag{1}$$

also eine partielle Differentialgleichung, in der x und y die ursprünglichen Veränderlichen, z eine gesuchte Funktion von ihnen, sowie p und q deren beide partielle Differentialquotienten nach x und nach y sind. (Es fehlen aber x und y selbst.) Um (1) zu integrieren, beachte man, daß offenbar eine Kugel mit dem Radius r, deren Mittelpunkt auf der xy-Ebene liegt und in ihr die beliebigen Koordinaten a und b hat, also eine Kugel mit der Gleichung:

$$\alpha) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 - r^2 = 0 \tag{2}$$

oder

$$\beta) \quad z = \sqrt{r^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}$$

eine besondere Lösung von (1) ergeben muß. In der Tat folgt:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{x - a}{\sqrt{r^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}} = - \frac{x - a}{z}, \tag{3}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{y - a}{\sqrt{r^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}} = - \frac{y - b}{z},$$

daher:

$$p^2 + q^2 + 1 = \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2}{z^2} = \frac{r^2}{z^2},$$

d. h. (1) ist erfüllt. Aber (2) bleibt auch dann eine Lösung, wenn man a und b nicht als konstant, sondern so als veränderlich ansieht, daß b eine beliebig gegebene Funktion:

$$b = \varphi(a) \tag{4}$$

ist und dafür die weitere Bedingung:

$$(x - a) + (y - b) \cdot \varphi'(a) = 0 \tag{5}$$

hinzufügt. Denn (2) gibt durch totale Differentiation nach allen Veränderlichen a, b, x, y, z:

$$(x - a)dx + (y - b)dy + z dz - (x - a)da - (y - b)db = 0.$$

Die Summe des vierten und fünften Gliedes verschwindet nach (5), da nach (4) $db = \varphi'(a)da$ ist. Also:

$$dz = - \frac{x - a}{z} dx - \frac{y - b}{z} dy \cdot$$

Andererseits ist immer: $dz = p\,dx + q\,dy$. Daher, da dx und dy zwar unendlich klein, sonst aber gänzlich unabhängig sind:

$$p = -\frac{x-a}{z}, \quad q = -\frac{y-b}{z}$$

d. h. genau wie in (3). Daraus ergibt sich ebenso, daß (1) erfüllt ist. Wollte man z explizite durch x und y selbst ausgedrückt haben, so müßte aus (2), (4) und (5) noch a und b eliminiert werden, was aber erst möglich wird, wenn die willkürliche Funktion $\varphi(a)$ in (4) gewählt worden ist. Setzt man z. B.

$$b = \sqrt{\varrho^2 - a^2} \ (\varrho \text{ konstant}) \text{ also } \varphi'(a) = -\frac{a}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}} = -\frac{a}{b},$$

so folgt:

$$(x-a) + (y-b)\left(-\frac{a}{b}\right) = 0, \quad bx - ay = 0, \quad bx = ay;$$

$$(\varrho^2 - a^2)x^2 = a^2y^2, \quad a = \frac{\varrho \cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad b = \frac{\varrho \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

also

$$z = \sqrt{r^2 - \left(x - \frac{\varrho x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 - \left(y - \frac{\varrho y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}$$

oder:

$$z = \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - \varrho\right)^2}.$$

Diese Fläche ist schon einmal in [185] Fig. 73 betrachtet worden. Allgemein wird die aufgefundene Lösung geometrisch gedeutet wie folgt: Man lasse eine Kugel mit dem gegebenen Radius r sich so bewegen, daß ihr Mittelpunkt $M(a, b, 0)$ auf der xy-Ebene bleibt, und dort eine beliebige Kurve (mit der Gleichung (4)) beschreibt. Dann erfüllt die Einhüllende dieser Kugelschar (§ 24) die partielle Differentialgleichung (1).

Es gehört nicht viel Induktionskraft dazu, diese Art Lösung auf alle Fälle zu verallgemeinern, in denen von einer gegebenen partiellen Differentialgleichung bereits ein besonderes Integral bekannt ist, welches eine hinreichend große Anzahl von willkürlichen Konstanten (hier zwei, nämlich a und b) enthält.

Sechstes Beispiel. Es ist die Bedingung für eine Fläche $z = f(x, y)$ aufzustellen, daß für jeden ihrer Punkte P die Tangente des Neigungswinkels zwischen der Berührungsebene und der xy-Ebene zu der Quadratwurzel aus z proportional ist.

Lösung: Der betreffende Neigungswinkel stimmt mit dem Winkel überein, den die Normale zu der Fläche in P mit der z-Achse bildet und der nach [165] durch die Formel

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{p^2+q^2}$$

bestimmt wird. Die Aufgabe verlangt

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{z}{l}} \quad (l \text{ konstant}),$$

daher

$$l(p^2 + q^2) - z = 0 \tag{6}$$

d. h. eine partielle Differentialgleichung, die mit der vorigen das Fehlen von x und y selbst gemeinsam hat.

Die allgemeinste Lösung kann in seiner Wesenheit beschrieben werden wie folgt. Man führe eine Hilfsgröße λ, sowie eine ganz beliebige Funktion $\varphi(\lambda)$ von λ ein und setze:

$$\alpha)\ x = 2\sqrt{zl}\cos\lambda + \int \sin\lambda\,\varphi(\lambda)\,d\lambda;\quad \beta)\ y = 2\sqrt{zl}\sin\lambda - \int\cos\lambda\,\varphi(\lambda)\,d\lambda. \tag{7}$$

Wird λ eliminiert, so entsteht eine Endgleichung zwischen x, y, z als Gleichung einer Fläche, welche die verlangte Eigenschaft hat.

Die Lösung selbst soll ebenso wenig wie im vorigen Beispiel hergeleitet, wohl aber jetzt hinterher als richtig erprobt werden.

Hierzu differenziere man (7_α) und (7_β) total (l ist konstant):

$$dx = dz\sqrt{\frac{l}{z}}\cos\lambda + \sin\lambda\,(-2\sqrt{zl} + \varphi(\lambda))\,d\lambda,$$

$$dy = dz\sqrt{\frac{l}{z}}\sin\lambda - \cos\lambda\,(-2\sqrt{zl} + \varphi(\lambda))\,d\lambda.$$

Die Elimination von $d\lambda$ ergibt:

$$dx\cos\lambda + dy\sin\lambda = dz\sqrt{\frac{l}{z}};\quad dz = dx\cos\lambda\sqrt{\frac{z}{l}} + dy\sin\lambda\sqrt{\frac{z}{l}}\,.$$

Daher entsprechend dem vorigen Beispiel:

$$p = \cos\lambda\sqrt{\frac{z}{l}},\quad q = \sin\lambda\sqrt{\frac{z}{l}} \tag{8}$$

und durch Elimination von λ aus diesen Werten entsteht wirklich (6).

Diese Elimination von λ aus (8) war sehr einfach, weil dort die willkürliche Funktion $\varphi(\lambda)$ nicht mehr (explizite) enthalten ist. Dagegen kann die vorhin geforderte Elimination von λ aus (7) erst erfolgen, wenn man über $\varphi(\lambda)$ verfügt hat. Man setze z. B. am einfachsten $\varphi(\lambda) = 0$ und die Integrale in (7) auch $= 0$, so wird:

$$x = 2\sqrt{zl}\cos\lambda,\quad y = 2\sqrt{zl}\sin\lambda,$$

daher:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4l}.$$

Die Fläche ist ein Umdrehungsparaboloid. Aber selbstverständlich ist dies nur eine ganz partikuläre Lösung, da $\varphi(\lambda)$ in (7), wie gezeigt, ganz willkürlich ist.

323. Zu [322] sei noch nachgetragen:

A) Zwar die Lösung selbst ist angegeben aber nicht der Weg zu ihr, da er sich gar zu weit von den Elementen entfernt. Es sei nur angedeutet, daß er zu einer Verknüpfung führt, welche bei allen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung möglich ist, nämlich zu einer Verknüpfung mit einem simultanen System nicht partieller, sondern totaler Differentialgleichungen. Aber mit welchem System und welcher Art die Verknüpfung ist, das gehört in ein Lehrbuch über partielle Differentialgleichungen.

B) Steigt man von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf zu solchen höherer Ordnung oder gar zu simultanen Systemen partieller Differentialgleichungen, so werden die Schwierigkeiten für eine durchgreifende mathematische Behandlung selbstverständlich noch sehr gesteigert. Zwar existiert eine große, große Fülle von vorzüglichen Einzelforschungen auf diesem schwer zugänglichen Gebiet, dem höchsten, welches die Differential- und Integralrechnung kennt, aber zu einer befriedigenden ganz allgemeinen Theorie haben sie nicht (oder vielleicht noch nicht) geführt. Sie haben aber durch die außerordentlich große Mannigfaltigkeit der Integrationsmethoden, welche bald hier, bald dort anwendbar sind, grelle Schlaglichter auf das Problem geworfen, auf seinen inneren Reichtum und seine umfassende Bedeutung.

C) Das wirklich sehr, sehr Wenige, was dieser letzte Paragraph über die partiellen Differentialgleichungen gebracht hat, läßt nicht entfernt erkennen, was alles die reine Analysis, die Geometrie, die Mechanik und die Naturwissenschaften von diesen mathematischen Gebilden haben. Man muß schon große Gesichtspunkte wählen und tiefere Studien treiben, um hierüber ein klares Urteil zu erhalten. Dann wird man z. B. erkennen, wie die Variationsrechnung oder wie weit ausschauende Aufgaben der Geometrie oder wie hydrodynamische Probleme mit Notwendigkeit zu partiellen Differentialgleichungen führen müssen, als der kürzesten und sachlichsten Form, in welcher der Mathematiker solche Untersuchungen führen kann.

Übungen zu § 42.

1) Die partielle Differentialgleichung:

$$z + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

soll durch die Substitution:

$$z = e^{k(x+y)} u$$

umgeformt, die Konstante k darauf zweckmäßig bestimmt und alsdann die Lösung ermittelt werden.

2) Entsprechend ist mit der partiellen Differentialgleichung

$$z + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

zu verfahren.

3) Es ist die partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Gleichungen aller Kugeln zu ermitteln, welche die z-Achse in den Abständen ± 1 vom Anfangspunkt schneiden, wobei vorausgesetzt wird, daß z explizite durch x und y ausgedrückt ist.

4) Nachweis, daß der in (3) genannten partiellen Differentialgleichung unter anderen auch die Fläche mit der Gleichung:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

genügt.

ANHANG

LÖSUNGEN DER ÜBUNGSAUFGABEN



§ 1.

1. Man setze rechts für a_2, b_2, c_2, d_2 ihre Ausdrücke ein und wende [204] an, so heben sich die von $2\sum ab$ herrührenden Glieder auf. Die anderen entstehen aber auch durch Multiplikation auf der linken Seite.

2. (In der Aufgabe lies $m = 1$ statt $p = 1$.) Es sei also zunächst, wenn $p - 1$ statt p gesetzt wird:

$$\binom{m+n}{p-1} = \binom{m}{p-1}\binom{n}{0} + \binom{m}{p-2}\binom{n}{1} + \binom{m}{p-3}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{m}{0}\binom{n}{p-1}.$$

Beide Seiten mit $x = [m + n - (p - 1)] : p$ multipliziert. Links entsteht $\binom{m+n}{p}$ nach 4γ in [17]. Rechts zerlege man diesen Faktor x der Reihe nach in:

$$\frac{m-p+1}{p} + \frac{n}{p}; \quad \frac{m-p+2}{p} + \frac{n-1}{p}; \quad \frac{m-p+3}{p} + \frac{n-2}{p} \cdots$$

und man erhält dann nach derselben Formel 4γ in [17]:

$$\binom{m}{p-1}\binom{n}{0} x = \binom{m}{p}\binom{n}{0} + \frac{1}{p}\binom{m}{p-1}\binom{n}{1};$$

$$\binom{m}{p-2}\binom{n}{1} x = \frac{p-1}{p}\binom{m}{p-1}\binom{n}{1} + \frac{2}{p}\binom{m}{p-2}\binom{n}{2}$$

usw. Die Addition ergibt also:

$$\binom{m+n}{p} = \binom{m}{p}\binom{n}{0} + \left[\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p}\right]\binom{m}{p-1}\binom{n}{1} + \left[\frac{2}{p} + \frac{p-2}{p}\right]\binom{m}{p-2}\binom{n}{2} + \cdots$$

die Ausdrücke in allen eckigen Klammern $= 1$.

3. Von irgendwelchen p aufeinander folgenden Zahlen sind entweder ebensoviel oder eine mehr durch eine beliebige ganze Zahl k teilbar, als die p Zahlen $1, 2, \ldots p$.

4. Schluß von $n - 1$ auf n. Es sei also:

$$x' = \frac{a_1 + a_2 \cdots + a_{n-1}}{n-1}, \quad y' = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} \quad \text{und} \quad x' > y'$$

$$x = \frac{(n-1)x' + a_n}{n}, \quad y = \sqrt[n]{(y')^{n-1} \cdot a_n}.$$

Ferner sei eingeführt:

$$z = \frac{(n-1)y' + a_n}{n},$$

(also $x > z$) und $a_n = y'u^n$ gesetzt, so:

$$y = y'u, \quad z = y'\frac{n-1+u^n}{n},$$

$$z - y = y'\left[\frac{n-1+u^n}{n} - u\right] = y'\frac{(u-1)(u^{n-1} + u^{n-2} \ldots + 1 - n)}{n}.$$

Ist $u > 1$, so sind beide Faktoren im Zähler positiv. Ist $u < 1$, so sind beide negativ. Also $z > y$ und erstrecht $x > y$. (Nur wenn die a sämtlich gleich sind, ist $x = y = a$.)

§ 2.

1. $S = \sum (2n+1)^3 = 8\sum n^3 + 12\sum n^2 + 6\sum n + 1\sum n^0.$
Die Grenzen für n sind 0 und 49, daher nach [27]:

$$S = 12005000 + 485100 + 7350 + 50 = \mathbf{12497500}.$$

Andere Berechnung. Es ist:

$$S = \sum_0^{100} n^3 - \sum_0^{50} (2n)^3 = \sum_0^{100} n^3 - 8\sum_0^{50} n^3 = (5050)^2 - 8\,(1275)^2$$
$$= 25502500 - 13005000 = 12497500.$$

2. $$\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}{5}.$$

(Am schnellsten bewiesen durch Schluß von n auf $n+1$.)

3. Erste Differenzreihe: $\binom{1}{p-1}, \binom{2}{p-1}, \binom{3}{p-1} \ldots$

Zweite Differenzreihe: $\binom{1}{p-2}, \binom{2}{p-2}, \binom{3}{p-2} \ldots$

usw. [17 11].

4. $$\frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2 + y^2 - xy.$$

(Soll auch gelten für $x = y = 0$.) Nach doppelter Summation:

$$\sum\sum x^2 = \sum\sum x^2 y^0 = \sum y^0 \sum x^2 = (n+1)\cdot\frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$
$$\sum\sum y^2 = \sum\sum y^2 x^0 = \sum x^0 \sum y^2 = (m+1)\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$\sum\sum xy = \sum x \cdot \sum y = \frac{(m+1)\cdot m}{2}\,\frac{(n+1)\cdot n}{2},$$
$$s = \frac{(m+1)(n+1)}{12}[2m(2m+1) + 2n(2n+1) - 3mn].$$

§ 3.

1. $$A = x_0^3 + x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2 + x_1^3;$$
$$B = 2[x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_0 + x_0x_1];$$
$$C = 6(x_0 + x_1 + x_2 + x_3);\quad D = 24;\quad E = 0;\quad F = 0;\ \ldots$$

2. Man leite die Formel ab:

$$B' = \frac{B_{1,2,3}(x_3 - x_1) + B_{0,1,2}(x_2 - x_0)}{(x_3 - x_1) + (x_2 - x_0)}.$$

$(x_3 - x_1)$ und $(x_2 - x_0)$ haben nach Voraussetzung gleiche Vorzeichen. Also ist nach [11 4] der Satz bewiesen.

3. $A = -\operatorname{tg}\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}$; $\quad B = -\frac{1}{\cos\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_2+\varphi_0}{2}}$.

$$C = \frac{-3\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}{2}}{2\cos\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_0+\varphi_2}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_0+\varphi_3}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_1+\varphi_3}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_2+\varphi_3}{2}}.$$

4. $A = -\frac{1!}{x_0 x_1}\left(\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}\right)$, $\quad B = +\frac{2!}{x_0 x_1 x_2}\left(\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$,

$$C = -\frac{3!}{x_0 x_1 x_2 x_3}\left(\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)$$

[Induktion liegt auf der Hand].

5. $A = \frac{1!}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_1}} = \frac{1!}{y_0+y_1}$; $\quad B = -\frac{2!}{(y_0+y_1)(y_1+y_2)(y_2+y_0)}$;

$$C = \frac{3!\,(y_0+y_1+y_2+y_3)}{(y_0+y_1)(y_0+y_2)(y_0+y_3)(y_1+y_2)(y_1+y_3)(y_2+y_3)}.$$

§ 4.

1. $+3,\quad +\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{3},\quad -3,\quad +\frac{1}{3},\quad +3,\quad -3.$

2. (In der Aufgabe lies x_2 statt x_4). $\frac{(x_3-x_0)(x_2-x_1)}{(x_2-x_0)(x_3-x_1)} = \frac{(y_3-y_0)(y_2-y_1)}{(y_2-y_0)(y_3-y_1)}$ (also Invariante [5]).

3. $b + c = 0,\quad c = -b,\quad b = -c.$

§ 5.

1. 4,769004; **2.** $214^0\,22'\,34{,}0''$.

3. Setze zur Abkürzung: $\cos\varphi = x$, $\sin\varphi = y$, so:

$\sin 2\varphi = 2xy,$	$\cos 2\varphi = x^2 - y^2,$
$\sin 3\varphi = 3x^2y - y^3,$	$\cos 3\varphi = x^3 - 3xy^2,$
$\sin 4\varphi = 4x^3y - 4xy^3,$	$\cos 4\varphi = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,$
$\sin 5\varphi = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5,$	$\cos 5\varphi = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4,$
$\sin 6\varphi = 6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5.$	$\cos 6\varphi = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6.$

Augenscheinlich Binomialkoeffizienten! Vgl. (5) und (6) in [233].

Setze ferner zur Abkürzung $\operatorname{tg}\varphi = z$, $\operatorname{cotg}\varphi = u = \frac{1}{z}$, so:

$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2z}{1-z^2},$	$\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{u^2-1}{2u},$

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}, \qquad \operatorname{cotg} 3\varphi = \frac{u^3 - 3u}{3u^2 - 1},$$

$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{4z - 4z^3}{1 - 6z^2 + z^4}, \qquad \operatorname{cotg} 4\varphi = \frac{u^4 - 6u^2 + 1}{4u^3 - 4u},$$

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5z - 10z^3 + z^5}{1 - 10z^2 + 5z^4}, \qquad \operatorname{cotg} 5\varphi = \frac{u^5 - 10u^3 + 5u}{5u^4 - 10u^2 + 1},$$

$$\operatorname{tg} 6\varphi = \frac{6z - 20z^3 + 6z^5}{1 - 15z^2 + 15z^4 - z^6}. \qquad \operatorname{cotg} 6\varphi = \frac{u^6 - 15u^4 + 15u^2 - 1}{6u^5 - 20u^3 + 6u}.$$

4. $+0{,}36043$; $-1{,}27934$; $+2{,}36689$; $+0{,}68080$.

§ 6.

1. $$y = \frac{x^3 + 3x}{2}.$$

2. Entweder: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$, oder: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

3. $$x = a \cos z \sqrt{\cos 2z}, \quad y = a \sin z \sqrt{\cos 2z}.$$

4. $$x = l + d\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = 2l\,\frac{t}{1 - t^2} + 2d\,\frac{t}{1 + t^2}.$$

§ 7.

1. $$\mathfrak{Sin}(u + v) = \mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Kof}\, v + \mathfrak{Kof}\, u\, \mathfrak{Sin}\, v$$

([65 3]). Setze:

$$\mathfrak{Sin}\, u = x, \quad \mathfrak{Sin}\, v = y, \quad \mathfrak{Kof}\, u = \sqrt{x^2 + 1}, \quad \mathfrak{Kof}\, v = \sqrt{y^2 + 1};$$

umgekehrt:

$$u = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x); \quad v = \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = y),$$

$$(u + v) = \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Sin} = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}\right),$$

$$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x) + \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = y) = \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Sin} = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Oder auf die zweite Art (Umformungen beachten!):

$$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x) + \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

$$= \ln\left(xy + x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 + 1}\right)$$

$$= \ln\left[x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1) + x^2y^2 + 2xy\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right]$$

$$= \ln\left[x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{\left(x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}\right)^2 + 1}\right]$$

$$= \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Sin} = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Entsprechend für die anderen. Das Formelsystem lautet:

$$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = x) \pm \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Sin} = y) = \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Sin} = x\sqrt{y^2 + 1} \pm y\sqrt{x^2 + 1}\right),$$

$$\mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kof} = x) \pm \mathfrak{Ar}(\mathfrak{Kof} = y) = \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Kof} = xy \pm \sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1}\right),$$

$$\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Tg} = x) \pm \mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Tg} = y) = \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Tg} = \frac{x \pm y}{1 \pm xy}\right),$$

$$\mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kotg} = x) \pm \mathfrak{Ar}\,(\mathfrak{Kotg} = y) = \mathfrak{Ar}\left(\mathfrak{Kotg} = \frac{xy \pm 1}{y \pm x}\right).$$

Vgl. mit [54 3].

2. Setze $\mathfrak{Kos}\, x = u$, $\mathfrak{Sin}\, x = v$, $\mathfrak{Tg}\, x = w$, $\mathfrak{Kotg}\, x = t$, so:

$\mathfrak{Sin}\, 2x = 2uv,$

$\mathfrak{Sin}\, 3x = 3u^2 v + v^3,$

$\mathfrak{Sin}\, 4x = 4u^3 v + 4uv^3,$

$\mathfrak{Sin}\, 5x = 5u^4 v + 10u^2 v^3 + v^5,$

$\mathfrak{Sin}\, 6x = 6u^5 v + 20u^3 v^3 + 6uv^5,$

$\mathfrak{Kos}\, 2x = u^2 + v^2$

$\mathfrak{Kos}\, 3x = u^3 + 3uv^2,$

$\mathfrak{Kos}\, 4x = u^4 + 6u^2 v^2 + v^4,$

$\mathfrak{Kos}\, 5x = u^5 + 10u^3 v^2 + 5uv^4,$

$\mathfrak{Kos}\, 6x = u^6 + 15u^4 v^2 + 15u^2 v^4 + v^6,$

$$\mathfrak{Tg}\, 2x = \frac{2w}{1 + w^2},$$

$$\mathfrak{Tg}\, 3x = \frac{3w + w^3}{1 + 3w^2},$$

$$\mathfrak{Tg}\, 4x = \frac{4w + 4w^3}{1 + 6w^2 + w^4},$$

$$\mathfrak{Tg}\, 5x = \frac{5w + 10w^3 + w^5}{1 + 10w^2 + 5w^4},$$

$$\mathfrak{Tg}\, 6x = \frac{6w + 20w^3 + 6w^5}{1 + 15w^2 + 15w^4 + w^6}.$$

$$\mathfrak{Kotg}\, 2x = \frac{t^2 + 1}{2t},$$

$$\mathfrak{Kotg}\, 3x = \frac{t^3 + 3t}{3t^2 + 1},$$

$$\mathfrak{Kotg}\, 4x = \frac{t^4 + 6t^2 + 1}{4t^3 + 4t},$$

$$\mathfrak{Kotg}\, 5x = \frac{t^5 + 10t^5 + 5t}{5t^4 + 10t^2 + 1},$$

$$\mathfrak{Kotg}\, 6x = \frac{t^6 + 15t^4 + 15t^2 + 1}{6t^5 + 20t^3 + 6t}.$$

(Absoluten Werte der Koeffizienten wie in Übung 3, § 5; doch hier alle Vorzeichen positiv, dort abwechselnd positiv und negativ.)

3. $-2{,}3939; \quad \pm 0{,}57431.$

4. $+5{,}3480; \quad +5{,}4407; \quad +0{,}98295; \quad +1{,}01735.$

§ 8.

1.
$$y = -\tfrac{5}{96}(x-2)(x-3)(x-7) + \tfrac{3}{5}(x+1)(x-3)(x-7)$$
$$- \tfrac{5}{8}(x+1)(x-2)(x-7) + \tfrac{1}{40}(x+1)(x-2)(x-3);$$
$$y = 5 + \tfrac{4}{3}(x+1) - \tfrac{1}{12}(x+1)(x-2) - \tfrac{5}{96}(x+1)(x-2)(x-3),$$
$$y = \tfrac{99}{16} + \tfrac{131}{96}x + \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{96}x^3.$$

Die verlangten Zwischewerte:

$$+\tfrac{99}{16}, \quad +\tfrac{61}{8}, \quad +\tfrac{165}{16}, \quad +\tfrac{77}{8}, \quad +\tfrac{61}{8}.$$

2.
$$4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x;$$
$$-4\cos^3 x + 3\cos x = \cos(\pi - 3x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right).$$
$$y = 3x - \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi; \quad \text{oder} \quad y = \frac{3}{2}\pi - 3x \pm 2k\pi.$$

3. $1 = a_1 a_1 + a_2 b_1 + a_3 c_1; \quad 0 = b_1 a_1 + b_2 b_1 + b_3 c_1$

usw. Neun Formeln. Vier völlig getrennte Lösungssysteme, nämlich:

$\alpha)\quad X = x,\qquad Y = y,\qquad Z = z.$

$\beta)\quad X = x + k_1 u,\qquad Y = y + k_2 u,\qquad Z = z + k_3 u.$

$\gamma)\quad X = -x - k_1 u,\qquad Y = -y - k_2 u,\qquad Z = -z - k_3 u.$

$\delta)\quad X = -x,\qquad Y = -y,\qquad Z = -z.$

$$\text{Abkürzung: } u = A_1 x + A_2 y + A_3 z,$$

$$\text{Bedingung: } k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 = -2.$$

4. Vorausgesetzt wird, daß $f(x)$ nach steigenden oder fallenden Potenzen von x geordnet sei. Schluß von n auf $n+1$. Multipliziere mit $x + |a|$, so im Produkt mindestens eine Zeichenfolge mehr. Multipliziere mit $x - |a|$, so im Produkt mindestens ein Zeichenwechsel mehr.

5. Folgt aus den beiden zu 4. angegebenen Hilfssätzen.

§ 9.

1.
$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Im zweiten Bruch ist der Nenner endlich, der Zähler vom zweiten Grade unendlich klein. [Dem entspricht, daß die exzentrische Stellung des Zentralkörpers schon vor über 2000 Jahren von Hipparch, dagegen die Abplattung der Planetenbahnen erst vor noch nicht 300 Jahren von Kepler nachgewiesen worden ist.]

2. Aus IX in [51] folgt $|x - \sin x| < x \cdot |1 - \cos x|$. Der erste Faktor ist von der ersten, der zweite von der zweiten Ordnung unendlich klein.

3.
$$\varepsilon = \sqrt[n]{a} - 1 = \frac{a-1}{1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}}, \quad (z = \sqrt[n]{a}),$$

daher:

$$|a - 1| > n\varepsilon > \left|\frac{a-1}{a}\right|; \quad \text{oder:} \quad |a - 1| < n\varepsilon < \left|\frac{n-1}{a}\right|,$$

je nachdem $a \gtrless 1$, also auch $z \gtrless 1$. Man setze nämlich im Nenner statt jedes der n Summanden einmal 1, das andere Mal $z^n = a$.

4.
$$Y - y = p - \sqrt{p^2 - x^2} - \frac{x^2}{2p} = \frac{x^2}{p + \sqrt{p^2 - x^2}} - \frac{x^2}{2p}$$
$$= \frac{x^4}{2p(p + \sqrt{p^2 - x^2})^2}.$$

In dem letzten Bruch ist der Nenner endlich, der Zähler von der vierten Ordnung unendlich klein. Vgl. erstes Beispiel in [159].

§ 10.

1. $$\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{x=0}^{x=n} x^p = \frac{1}{p+1} + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2} + \cdots$$

vgl. [27]. Der gesuchte limes ist also $= 1 : (p+1)$.

2. Es sei $a_1 > b_1$. Man erhält leicht:

$$a_2 > b_2,\ a_3 > b_3,\ a_4 > b_4 \ldots;\quad a_1 > a_2 > a_3 \ldots;\quad b_1 > b_2 > b_3 \ldots$$

Obgleich also die a ab-, die b zunehmen, ist doch (für jedes n) $a_n > b_n$. Da sie positiv sind, so folgt zunächst, daß $\lim a_n$ und $\lim b_n$ wirklich existieren. Ferner wird:

$$a_2 - b_2 = \frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1})^2}{2} < \frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1})(\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1})}{2};\quad a_2 - b_2 < \frac{a_1 - b_1}{2},$$

ebenso:

$$a_3 - b_3 < \frac{a_1 - b_1}{4},\quad a_4 - b_4 < \frac{a_1 - b_1}{8} \cdots,$$

d. h.

$$\lim_{(n=\infty)} a_n = \lim_{(n=\infty)} b_n.$$

3. Ist $a = 2$, so auch $a_1 = a_2 = a_3 \cdots = 2$, also $\lim a_n = 2$. Ist a beliebig (aber positiv), so wird:

$$a_1 - 2 = \sqrt{a+2} - 2 = \frac{a-2}{2+\sqrt{a+2}},\quad a_1 - 2 < \frac{a-2}{2},$$

ebenso:

$$a_2 - 2 < \frac{a-2}{4},\quad a_3 - 2 < \frac{a-2}{8} \cdots,$$

also auch $\lim a_n = 2$.

4. $$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x},\quad \cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}},\quad \cos\frac{x}{4} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{4}}, \cdots$$

Der Ausdruck kann daher umgeformt werden in:

$$\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

Sein limes ist daher $= \frac{\sin 2x}{2x}$, vgl. [88 3].

§ 11.

1. Die Glieder von s_0 und s_1 haben keinen limes, als ist die Gleichung $\lim u_n = 0$ umso weniger richtig. Nur wenn x ein Vielfaches von π ist,

erhält man $\cos nx = \pm 1$, $\sin nx = 0$ für jedes n. Also für s_0 auch Divergenz, für s_1 Konvergenz; $s_1 = 0$.

2. Multipliziere mit $2 \sin \frac{x}{2}$ und wende rechts auf jedes Glied die Formel an:

$$2 \cos \alpha \sin \beta = - \sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta);$$

es wird:

$$2 s_0 \cdot \sin \frac{x}{2} = - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3}{2} x \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \sin \frac{5}{2} x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots.$$

Nach Entfernung des ersten Gliedes wird die Reihe

$$(1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) \cdots$$

eine Majorante. Da diese konvergiert, so auch die erstere, also auch s_0 selbst. Auszunehmen wäre der Fall, daß $\sin \frac{x}{2} = 0$ ist, also $x = \pm 2k\pi$; $\cos x = \cos 2x = \cos 3x \cdots = 1$. Entsprechend für s_1.

3.
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots$$

ist eine Minorante, wenn $k < 1$; sie divergiert, also auch s. Ist $k > 1$, so betrachte man die Majorante:

$$s' = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{8^k} + \cdots$$

oder nach Zusammenfassung von 1, 2, 4, 8 ... Gliedern

$$s' = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \cdots \left(z = \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Sie ist eine konvergente geometrische Reihe, also konvergiert s erst recht.

4. $1 - \frac{x}{2} > \frac{1}{2}$, $\quad 1 - \frac{x}{3} > \frac{2}{3}$, $\quad 1 - \frac{x}{4} > \frac{3}{4} \cdots (0 < x < 1)$

folglich ist

$$1 - x + \frac{1-x}{2} + \frac{1-x}{3} + \frac{1-x}{4} \cdots$$

eine Minorante von s. Sie divergiert [92_6], also auch s. [Für $x > 1$ konvergiert die Reihe und zwar gegen -1 für jeden Wert von x; für $x = 1$ konvergiert sie gegen 0].

§ 12.

1. Setze

$$A_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{also} \quad A_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n,$$

so wird:

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n-1)^n}{n^{n+1} \cdot n^n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Der zweite Faktor ist $< \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$, wie der binome Lehrsatz zeigt. Also

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} < \left(1 - \frac{1}{n^4}\right)^n, \quad \text{also erst recht:} \quad \frac{A_n}{A_{n-1}} < 1, \quad A_n < A_{n-1}.$$

Ferner $\lim A_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$.

2. $K = \lim\limits_{n=\infty} C \cdot \left(1 + \frac{p}{n\,100}\right)^{tn} = C \lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\frac{pt}{100}} = Ce^{\frac{pt}{100}}$.

3. Der Ausdruck kann umgeformt werden in:

$$\left(1 + \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2}, \cdots + \frac{K}{n^p}\right)^{\alpha n + \beta} : \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \cdots + \frac{k}{n^p}\right)^{\alpha n + \beta}.$$

Der limes des Zählers ist $e^{\alpha\left(A + \frac{B}{n} + \cdots + \frac{K}{n^{p-1}}\right)} = e^{A\alpha}$ für $n = \infty$. Entsprechend der limes des Nenners. Also der gesuchte Grenzwert $= e^{\alpha(A-a)}$.

4. Die Vergleichung ist nicht leicht. Man forme etwa um wie folgt:

$$\frac{A_n^2}{A_{n-1}A_{n+1}} = \left(1 - \frac{2n+1}{n^3(n+2)}\right)^n \left(1 + \frac{2}{(n-1)(n+2)}\right)$$
$$> \left(1 - \frac{2n+1}{n^2(n+2)}\right)\left(1 + \frac{2}{(n-1)(n+2)}\right)$$

oder, nochmals umgeformt:

$$\frac{A_n^2}{A_{n-1}A_{n+1}} > 1 + \frac{1}{n(n+2)^2}, \quad \text{d. h.} \quad A_n^2 > A_{n-1}A_{n+1}.$$

§ 13.

1. Für $y = x^n$ ist

$$\varepsilon = \binom{n}{2} x^{n-2}\,dx + \binom{n}{3} x^{n-3}(dx)^2 + \cdots,$$

also von der ersten Ordnung in bezug auf dx.

Für $y = \sin x$ und $y = \cos x$ ist

$$\varepsilon = -\cos x \left(1 - \frac{\sin dx}{dx}\right) - 2\sin x \frac{\sin^2 \frac{dx}{2}}{dx}$$

und

$$\varepsilon = \sin x \left(1 - \frac{\sin dx}{dx}\right) - 2\cos x \frac{\sin^2 \frac{dx}{2}}{dx}.$$

Das erste Glied ist von der zweiten, das zweite von der ersten Ordnung in bezug auf dx.

Für $y = e^x$ ist

$$\varepsilon = e^x \left(\frac{dx}{2!} + \frac{(dx)^2}{3!} + \cdots\right),$$

also von der ersten Ordnung.

2.

$$y = \operatorname{tg} x;\; y' = \lim_{(h=0)} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \lim \frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h \cdot \cos x \cos(x+h)}$$

$$= \lim \frac{\sin h}{h} \cdot \lim \frac{1}{\cos x \cos(x+h)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \operatorname{cotg} x;\; y' = \lim_{(h=0)} \frac{\operatorname{cotg}(x+h) - \operatorname{cotg} x}{h} = \lim \frac{\cos(x+h)\sin x - \sin(x+h)\cos x}{h \sin x \sin x + h}$$

$$= -\lim \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h=0} \frac{1}{\sin x \sin(x+h)} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$y = \ln x;\; y' = \lim_{(h=0)} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{(z=0)} \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{x \lim \frac{e^z-1}{z}} \quad \text{für} \quad z = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x \lim\limits_{(z=0)} \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} \cdots\right)} = \frac{1}{x}$$

$$y = \sqrt[n]{x};\; y' = \lim_{(h=0)} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \lim \frac{x+h-x}{h(a^{n-1} + a^{n-2}b \cdots + b^{n-1})}$$

$$\left(\text{für } a = \sqrt[n]{x+h},\quad b = \sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$y = \operatorname{arc}(\sin = x);\quad y' = \lim \frac{\operatorname{arc}(\sin = x+h) - \operatorname{arc}(\sin - x)}{h}.$$

Setze hier $\operatorname{arc}(\sin = x) = y$, $\operatorname{arc}(\sin = x + h) = y + k$, $x = \sin y$, $x + h = \sin(y + k)$, so wird:

$$y' = \lim_{(k=0)} \frac{y+k-y}{\sin(y+k) - \sin y} = \frac{1}{\lim\limits_{(k=0)} \frac{\sin(y+k) - \sin y}{k}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§ 14.

1a. α) $\quad x^2 + 2xy + 3y^2 - 10x - 4y - 11 = 0$

$$p = 2x + 2y - 10,\quad q = 2x + 6y - 4,\quad r = 2,\quad s = 2,\quad t = 6.$$

β) $$y' = -\frac{p}{q} = -\frac{2x+2y-10}{2x+6y-4} = -\frac{x+y-5}{x+3y-2}.$$

γ) $$y'' = -\frac{rq^2 - 2sqp + tp^2}{q^3}$$

$$= -\frac{2(2x+6y-4)^2 - 4(2x+6y-4)(2x+2y-10) + 6(2x+2y-10)^2}{(2x+6y-4)^3}$$

$$= -\frac{2x^2 + 4xy + 6y^2 - 20x - 8y + 59}{(x+3y-2)^3} = -\frac{81}{(x+3y-2)^3}.$$

1b. $\alpha)\ y = \frac{1}{3}\left(2 - x + \sqrt{37 + 26x - 2x^2}\right)$

$$\beta)\ y' = \frac{1}{3}\left(-1 + \frac{13 - 2x}{\sqrt{37 + 26x - 2x^2}}\right)$$

$$\gamma)\ y'' = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{37 + 26x - 2x^2}\cdot(-2) - (13 - 2x)\cdot\frac{13 - 2x}{\sqrt{37 + 26x - 2x^2}}}{\sqrt{37 + 26x - 2x^2}^2}$$

$$= \frac{-81}{\sqrt{37 + 26x - 2x^2}^3}.$$

1c. $y = -3 + \lambda(x - 2)$. Setzt man in die gegebene Gleichung ein, so stellt sich links der Faktor $x - 2$ heraus, der (als im allgemeinen nicht verschwindend) fortgelassen werden kann. Es folgt dann:

$$3\lambda^2(x - 2) + 2\lambda(x - 11) + (x - 14) = 0;$$

hieraus:

$$\alpha)\qquad x = \frac{6\lambda^2 + 22\lambda + 14}{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}, \quad y = \frac{9\lambda^2 + 6\lambda - 3}{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}$$

und durch Differentiation nach λ

$$x_\lambda' = \frac{dx}{d\lambda} = \frac{-54\lambda^2 - 72\lambda - 6}{(3\lambda^2 + 2\lambda + 1)^2}, \quad y_\lambda' = \frac{dy}{d\lambda} = \frac{36\lambda + 12}{(3\lambda^2 + 2\lambda + 1)^2}.$$

$$\beta)\qquad y_x' = \frac{y_\lambda'}{x_\lambda'} = -\frac{6\lambda + 2}{9\lambda^2 + 12\lambda + 1}$$

$$(y_x')_\lambda' = \frac{dy_x'}{d\lambda} = \frac{18(3\lambda^2 + 2\lambda + 1)}{(9\lambda^2 + 12\lambda + 1)^2}$$

$$\gamma)\qquad y_x'' = \frac{(y_x')_\lambda'}{x_\lambda'} = -3\left(\frac{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}{9\lambda^2 + 12\lambda + 1}\right)^3.$$

[Die allgemeine Probe kann so erfolgen. Man setze in 1b) für die Wurzel zurück $x + 3y - 2$, so ergibt sich für y' und y'' die Identität mit den Werten in 1a). Setzt man aber in letztere statt x und y die Parameterausdrücke α) aus 1c) ein, so ergibt sich β) und γ) in 1c)]. Für $x = +2$, $y = -3$ ist zunächst die gegebene Gleichung erfüllt. Ferner wird α) in 1b) erfüllt, wenn die Wurzel negativ, also $= -9$ genommen wird. Um das zugehörige λ zu ermitteln, darf die ursprüngliche Formel $\lambda = (y + 3) : (x - 2)$ nicht benutzt werden, da sie $0 : 0$ ergibt. Setzt man aber $x = +2$, $y = -3$ in α) aus 1c) ein, so ergeben sich zwei quadratische Gleichungen für λ, welche nur die eine gemeinsame Wurzel $\lambda = -\frac{2}{3}$ haben (außerdem $\lambda = \infty$, $\lambda = 0$). Hiernach folgt dann aus β) und γ) sowohl in 1a) als auch in 1b) als auch in 1c) völlig übereinstimmend:

$$y' = -\tfrac{2}{3}, \quad y'' = +\tfrac{1}{9}.$$

§ 15.

1—6. $\frac{29}{(3 - 4x)^2}$, $\frac{3 + 12x + 3x^2}{(6 + 7x + 8x^2)^2}$, $7(1 + x)^6$, $-7(1 - x)^6$, $-14(3 - 2x)^6$, 1.

7—11. $\operatorname{cotg} x$, $-\operatorname{tg} x$, $e^x(\cos x + \sin x)$, $e^x(\cos x - \sin x)$, $\frac{x^6}{720} e^x$.

12—15. $\frac{x^8}{40320} \cos x$, $\frac{1-2x^2}{1+2x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}}$, -1, -1.

16—20. $+1$, $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, $+1$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

21—24. $4\sqrt{4x^2+12x+97}$, $4\sqrt{97+12x-4x^2}$,

$$\frac{176}{\sqrt{4x^2+12x+97}^3}, \quad -\frac{23232}{\sqrt{4x^2+12x+97}^5}.$$

25—28. $x^4 \cos^3 x$, $x^x(1+\ln x)$, $\cos(x^x)\, x^x (1+\ln x)$,

$$x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

29—33. $\frac{ab}{a^2+b^2x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ [1]).

34—39. $\frac{1}{1-x^2}$, 1, $\cos\left(x + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{4}{5}\right)\right)$, $-\sin x$,

$$-\frac{6}{(2x+3)(4x+3)}, \quad +\frac{3}{5+12x+9x^2}.$$

40—43. $\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2}$, $\frac{1}{(1+x)\sqrt{3+4x+5x^2}}$,

$$\frac{1-kx^2}{1+kx^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

44—50. -1, $+1$, $\frac{4}{\sqrt{4x^2+12x+27}}$, $\frac{2}{\sin 2x}$, $\frac{1+\operatorname{tg}^2(\ln x)}{x}$,

$$\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}, \quad \frac{1}{6-10\cos x}.$$

Es ließen sich noch manche lehrreiche Betrachtungen anknüpfen, z. B. wie es a priori zu erklären sei, daß in Nr. 30 dieselbe Ableitung herauskommt, als wenn man $\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)$ unmittelbar differentiiert hätte? Man blicke auf $[54_3]$ usw.

§ 16.

1. a) $y = -50 + 41x$, b) $y = -255 + 451x - 205x^2$.

2. Bis auf 8 Stellen hinter dem Komma.

3.
$$x_m = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3}.$$

1) In Nr. 33 lies a^2+1 statt a^2-1.

§ 17.

1. $$y = \left(25 - \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3} - 28\right)x + 7x^2.$$

2. Von der dritten Ordnung.

$$\text{Fläche} = -\frac{(dx)^3}{12}y''.$$

Umlaufssinn von $P(x, y)$ auf der Sehne zu $P_1(x + dx, y + dy)$ und dann auf dem Bogen von P_1 zu P zurück. Man berechne die Ordinate zu $x + \frac{dx}{2}$, darauf das Dreieck und dann das Segment nach Archimedes [91].

3. Länge der Sehne $= s$, Länge des Bogens $= l$, so:

$$l - s = \frac{s^3(y'')^2}{24(1 + y'^2)^3} = \frac{s^3}{24\varrho^2}.$$

ϱ ist der Krümmungsradius. (§ 21). Zur Ableitung am besten Integralformeln. Doch kann man sie umgehen, wenn der Bogen durch einen Polygonzug ersetzt wird, etwa durch Teilung von dx in n gleiche Teile. Dann wäre $\lim n = \infty$ zu setzen unter Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung. Nach richtiger (aber nicht müheloser) Ausführung dieser Limesrechnung ergibt sich die Formel, welche übrigens auch sehr einfach ableitbar ist, wenn der Bogen als Kreisbogen mit Radius ϱ betrachtet wird. Der Zenriwinkel sei φ, so $s = 2\varrho \sin\frac{\varphi}{2}$, $l = \varrho\varphi$, daher

$$\frac{l - s}{s^3} = \frac{1}{8\varrho^2} \cdot \frac{\varphi - 2\sin\frac{\varphi}{2}}{\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^3}.$$

Nun ist:

$$\lim_{(\varphi=0)} \frac{\varphi - 2\sin\frac{\varphi}{2}}{\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^3} = \frac{1}{3}, \ [188], \quad \text{also} \quad \lim \frac{l - s}{s^3} = \frac{1}{24\varrho^2}.$$

4. $x = r\cos\varphi = a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$, $y = r\sin\varphi = a\sin\varphi\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Man betrachte φ als Parameter. Es folgt [125] nach Ausführung:

$$y' = \operatorname{tg}\tau = -\operatorname{cotg} 3\varphi; \quad \tau = 90^0 + 3\varphi$$

und hieraus die einfache Konstruktion in [182], fünftes Beispiel.

5. $$x = a\cos\varphi e^{k\varphi}, \quad y = a\sin\varphi e^{k\varphi}$$

$$y' = \operatorname{tg}\tau = \frac{\cos\varphi + k\sin\varphi}{-\sin\varphi + k\cos\varphi} = \frac{\frac{1}{k} + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \frac{1}{k}\operatorname{tg}\varphi}; \quad \tau = \varphi + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{1}{k}\right).$$

Der Winkel $u = \tau - \varphi$ ist konstant [170]. Die Tangente bildet mit r einen konstanten Winkel.

§ 18.

1. $y = -1280 + 3526x - 3280x^2 + 1025x^3$

$y = -6405 + 24026x - 34030x^2 + 21525x^3 - 5125x^4.$

2. Die Aufgabe führt zwar zu vier Gleichungen für a, b, c, d, welche aber nur die gänzlich unbrauchbare Lösung $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0$ haben. Man darf also keine Berührung dritter Ordnung verlangen, sondern muß sich mit der zweiten Ordnung bescheiden. Für eine solche ergibt sich:

$$a : b : c : d = 172 : -900 : 25 : -171; \quad y = \frac{172x - 900}{25x - 171}.$$

3. I. $e^x\left(x^n + \binom{p}{1} n x^{n-1} + \binom{p}{2} n(n-1)x^{n-2} + \cdots\right).$

II. $\sin\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)\left(x^n - \binom{p}{2} n(n-1)x^{n-2} + \binom{p}{4} n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \cdots\right)$

$- \cos\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)\left(\binom{p}{1} n x^{n-1} - \binom{p}{3} n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots\right).$

III. $\cos\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)\left(x^n - \binom{p}{2} n(n-1)x^{n-2} + \binom{p}{4} n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \cdots\right)$

$+ \sin\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)\left(\binom{p}{1} n x^{n-1} - \binom{p}{3} n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots\right).$

Ia. $e^x\left(f(x) + \binom{p}{1} f'(x) + \binom{p}{2} f''(x) + \cdots\right).$

IIa. $\sin\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)\left(f(x) - \binom{p}{2} f''(x) + \binom{p}{4} f''''(x) + \cdots\right)$

$- \cos\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)\left(\binom{p}{1} f'(x) - \binom{p}{3} f'''(x) + \cdots\right).$

IIIa. $\cos\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)\left(f(x) - \binom{p}{2} f''(x) + \binom{p}{4} f''''(x) + \cdots\right)$

$+ \sin\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)\left(\binom{p}{1} f'(x) - \binom{p}{3} f'''(x) + \cdots\right).$

Anwendung von $[154_7]$.

4. Drei Lösungssysteme A), B), C)

A) $\quad a = -\frac{1}{6}; \quad x_1 = x_2 = +1; \quad \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} = 2 \pm i\sqrt{5}.$

B) $\quad a = -\frac{11}{96}; \quad x_1 = x_2 = +2; \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{26 \pm \sqrt{280}}{11}.$

C) $\quad a = -\frac{19}{162}; \quad x_1 = x_2 = +3; \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{24 \pm \sqrt{63}}{19}.$

§ 19.

1.
$$d^3z = [p d^3x + q d^3y] + 3[r dx d^2x + s(dx d^2y + dy d^2x) + t dy d^2y] + [\alpha(dx)^3 + 3\beta(dx)^2 dy + 3\gamma dx(dy)^2 + \delta(dy)^3]$$
$$\begin{aligned} d^4z = &[p d^4x + q d^4y] \\ &+ [r(4 dx d^3x + 3(d^2x)^2) + s(4(dx d^3y + dy d^3x) + 6 d^2x d^2y) \\ &\qquad + t(4 dy d^3y + 3(d^2y)^2)] \\ &+ 6[\alpha(dx)^2 d^2x + \beta((dx)^2 d^2y + 2 dx dy d^2x) \\ &\qquad + \gamma((dy)^2 d^2x + 2 dy dx d^2y) + \delta(dy)^2 d^2y] \\ &+ [A(dx)^4 + 4B(dx)^3 dy + 6C(dx)^2(dy)^2 \\ &\qquad + 4D dx(dy)^3 + E(dy)^4]. \end{aligned}$$

2. $y''' = -\frac{1}{q}[3(s + ty')y'' + \alpha + 3\beta y' + 3\gamma y'^2 + 3\delta y'^3]$

$$y'''' = -\frac{1}{q}\begin{bmatrix} 4(s + ty')y''' + 3t(y'')^2 + 6(\beta + 2\gamma y' + \delta y'^2)y'' \\ + A + 4By' + 6Cy'^2 + 4Dy'^3 + Ey'^4 \end{bmatrix}.$$

3. Sehr umfangreiche Differentiationen. Man erhält zunächst nach [172]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial z)^2} = &A\frac{\partial^2 U}{(\partial r)^2} + B\frac{\partial^2 U}{(\partial \varphi)^2} + C\frac{\partial^2 U}{(\partial \delta)^2} \\ &+ 2A_1\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\,\partial\delta} + 2B_1\frac{\partial^2 U}{\partial\delta\,\partial r} + 2C_1\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\varphi} \\ &+ A_2\frac{\partial U}{\partial r} + B_2\frac{\partial U}{\partial\varphi} + C_2\frac{\partial U}{\partial\delta}. \end{aligned}$$

Hier sind $A, B, C, \ldots$ Abkürzungen für die Ausdrücke:

$$A = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2; \quad A_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\delta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\delta}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\delta}{\partial z},$$
$$A_2 = \frac{\partial^2 r}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 r}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 r}{(\partial z)^2}.$$

usw. Für r, φ, δ sind hier bei der Bildung der Ableitungen die Formeln b) zu nehmen. Man erhält (umsichtig rechnen!):

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{r^2\cos^2\delta}, \quad C = \frac{1}{r^2}; \quad A_1 = B_1 = C_1 = 0,$$
$$A_2 = \frac{2}{r}, \quad B_2 = 0, \quad C_2 = -\frac{\operatorname{tg}\delta}{r^2}$$

und daher zuletzt:

$$\frac{\partial^2 U}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial z)^2} = \frac{\partial^2 U}{(\partial r)^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\delta}\frac{\partial^2 U}{(\partial\varphi)^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{(\partial\delta)^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg}\delta}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\delta}.$$

§ 20.

1. Länge der Seite $= a + b$. Wird im Berührungspunkt so geteilt, daß Strecke bis zur kleinen Achse $= a$, bis zur großen Achse $= b$.

2. Beide Aufgaben geben denselben Kegel mit der Höhe $h = \frac{4}{3} r$.

3. a) $h = 4r$; b) $h = r(2 + \sqrt{2})$.

4. Bedingung:

$$ax + by + cz = 2J = 2 \text{ Dreieck}.$$

Es folgt:

a) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2J}{a^2 + b^2 + c^2}$.

b) $ax = by = cz = \frac{2J}{3}$ (Schwerpunkt).

c) Erstens Schwerpunkt. Maximum. Zweitens Ecken selbst. Minimum.

d) $x = y = z = \frac{J}{s} = \frac{2J}{a + b + c}$ (Mittelpunkt des Inkreises).

5. Höhe = Durchmesser.

6. Günstigste Windstärke $= \frac{40}{3} \frac{\text{Kilometer}}{\text{Stunde}}$.

7. Schlau müßte setzen $10000\sqrt{30} - 2000 = 52772$ Mk. Der größte Reingewinn $= 250000 + \frac{1000}{3} - \frac{10000\sqrt{30}}{3} = 232076$ Mk.

§ 21.

1. a) $p = 3x^2 - ay$, $q = 3y^2 - ax$, $r = 6x$, $s = -a$, $t = 6y$.

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{(3x^2 - ay)^2 + (3y^2 - ax)^2}}{6x(3y^2 - ax)^2 + 2a(3y^2 - ax)(3x^2 - ay) + 6y(3x^2 - ay)^2} \quad [181_8].$$

b) $r = \frac{a \cos\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$,

$$r' = a \frac{\cos^5\varphi + 2\cos^3\varphi\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi\sin^3\varphi - \sin^5\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}$$

$$r'' = a \frac{5\cos\varphi\sin\varphi - 12\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 9\cos^3\varphi\sin^3\varphi - 2\cos^4\varphi\sin^4\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^3}.$$

Diese Werte wären in $[181_{10}]$ einzusetzen.

Für den Scheitel ist $x = y = \frac{a}{2}$, $\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dies gibt in a)

$$\varrho_{\min} = \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4}\right)^2}^3}{3a\frac{a^4}{16} + 2a\frac{a^4}{16} + 3a\frac{a^4}{16}} = \frac{a}{16}\sqrt{2}.$$

Und in b)

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2}\,, \quad r' = 0\,, \quad r'' = -\frac{7}{2}a\sqrt{2} = -7r$$

$$\varrho_{\min} = \frac{r^3}{r^2 - rr''} = \frac{r^3}{8r^2} = \frac{r}{8} = \frac{a}{16}\sqrt{2}\,.$$

2. Fig. 25 in [64]

$$y = h\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x}{h}, \quad y' = \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{h}, \quad y'' = \frac{\mathfrak{Cos}\,\frac{x}{h}}{h} = \frac{y}{h^2}$$

$$1 + y'^2 = 1 + \mathfrak{Sin}^2\,\frac{x}{h} = \mathfrak{Cos}^2\,\frac{x}{h} = \frac{y^2}{h^2}, \quad \operatorname{tg}\tau = y' = \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{h}, \quad \cos\tau = \frac{h}{y}.$$

Das Lot QR auf die Tangente ist also konstant $= h$. Konstruktion der Tangente und Normale hiermit angezeigt. Ferner

$$\varrho = \frac{y^3 : h^3}{y : h^2} = \frac{y^2}{h}.$$

Andererseits ist $PU = \frac{y}{\cos\tau} = \frac{y^2}{h}$, also $\varrho = PU$. Man verlängere die Normale UP über P um sich selbst, so ist M der Krümmungsmittelpunkt.

3. $$y = -\tfrac{23}{6} + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{6}x^2.$$

4. Zwei reelle Wendepunkte $P(0, +1)$, $P_1(0, -1)$. Die Rechnung ergibt noch sechs imaginäre Wendepunkte ($x^3 = -4$, $y^2 = -3$). Außerdem ist noch einer unendlichfern, also im ganzen neun.

§ 22.

1. $$x = \begin{cases} 0{,}86034 = \operatorname{arc} 49^0 17{,}61' \\ 3{,}42562 = \operatorname{arc} 196^0 16{,}41' \end{cases}.$$

2. Man forme um in:

$$[1 - (\ln 2 - \ln 1)] + \left[\frac{1}{2} - (\ln 3 - \ln 2)\right] + \cdots + \left[\frac{1}{k-1} - (\ln k - \ln(k-1)\right].$$

Nach $[134_4]$ ist $\ln k - \ln(k-1) = \frac{1}{(k-1)+\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 1)$, daher die Reihe

$$\left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\varepsilon_1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+\varepsilon_2}\right) \cdots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)+\varepsilon_k}\right).$$

Von ihr ist die Reihe $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) \cdots$ eine Majorante. Da sie konvergiert, so der Ausdruck auch.

3. $\frac{ab}{\alpha\beta}\,\frac{a^2 - b^2}{\alpha^2 - \beta^2}$. **4.** $\frac{\ln a - \ln b}{\ln c - \ln e}$. **5.** $a^a(\ln a - 1)$.

40*

§ 23.

1. $$x - y + 1 = 0, \qquad x - 2y + 3 = 0.$$

2. Man transformiere auf den Doppelpunkt, also $\xi = x - 2$, $\eta = y + 3$. Dann muß die Gleichung von der Form werden [196]

$$\xi^3 + a\eta^3 + \lambda\xi\eta = 0.$$

Für $\eta' = 0$ ergibt [195_{10}]: $\eta'' = -\frac{\alpha}{3s} = -\frac{6}{3\lambda}\cdot$ Andererseits ist nach [180_1] $\eta'' = \pm\frac{1}{6}$. Es muß das + Zeichen genommen werden (Krümmung um + η Achse), also $\lambda = -12$. Für den anderen Zweig ist [195 10] unbrauchbar ($\infty : \infty$). Man betrachte daher ξ als Funktion von η. Dann folgt $\xi' = 0$, $\xi'' = -\frac{\alpha}{3s} = -\frac{6a}{3\lambda}$; andererseits $\xi'' = \pm\frac{1}{\varrho} = \pm\frac{1}{3}$. Diesmal das — Zeichen. Daher

$$-\frac{2a}{\lambda} = -\frac{1}{3}, \quad a = \frac{\lambda}{6} = -2;$$

also:

$$\xi^3 - 2\eta^3 - 12\xi\eta = 0,$$

oder

$$(x-2)^3 - 2(y+3)^3 - 12(x-2)(y+3) = 0,$$

d. h.:

$$x^3 - 2y^3 - 6x^2 - 12xy - 18y^2 - 24x - 30y + 10 = 0.$$

3. Doppelpunkt zum Anfangspunkt gemacht, so müssen die Konstante und die Glieder ersten Grades fehlen. Daher $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$.

Die linke Seite zerfällt in zwei Faktoren ersten Grades.

4. Augenscheinlich nur zwei Parallele zur x-Achse. Ihr Abstand von der x-Achse ist

$$y = \pm\frac{a}{4}\sqrt{2}.$$

5. $$p = 3x^2, \quad q = 3y^2 + 1, \quad r = 6x, \quad s = 0, \quad t = 6y$$

also nach 3a) in [127]:

$$6x(3y^2+1)^2 + 6y\,9x^4 = 0$$

und unter Berücksichtigung der gegebenen Gleichung entweder $x = 0$ (und $y = 0$) oder:

$$-18y^2 + 6 = 0, \quad y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}};$$

also drei reelle Wendepunkte

$$1.\ x = 0,\ y = 0, \quad 2.\ x = +\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$3.\ x = -\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}, \quad y = +\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Sie liegen auf einer Geraden. (Wie ganz allgemein bei jeder Kurve dritter Ordnung die Verbindungslinie zweier Wendepunkte die Kurve noch in einem dritten Wendepunkt trifft.)

§ 24.

1. Krümmungskreis:

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2-\varrho^2=0,$$

also [182] zweites Beispiel

$$\left(X+\frac{x^3}{p^2}\right)^2+\left(Y-p-\frac{3x^2}{2p}\right)^2-p^2\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^3=0.$$

Hier steht x für λ in [199]. Verfährt man wie dort vorgeschrieben, so ergibt sich (nach recht langen Rechnungen)

$$\left(Y-\frac{X^2}{2p}\right)^2=0$$

d. h. die Parabel selbst, aber doppelt! (Weshalb doppelt?)

2. Schenkel seien x und y-Achse. Die gegebene Summe $=s$

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1=0,\quad p+q=s$$

und Endgleichung

$$x^2-2xy+y^2-2xs-2ys+s^2=0$$

(Parabel, welche die Achsen berührt).

3. Umfang $=2s$; $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}-1=0$;

$$p+q+\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos\omega}=2s,$$

d. h.

$$qx+py-pq=0,\quad pq(1+\cos\omega)-2ps-2qs+2s^2=0.$$

Das Ergebnis ist die Endgleichung:

$$x^2+y^2+2xy\cos\omega-2xs-2ys+s^2=0.$$

(Kreis in schiefwinkligen Koordinaten. Er berührt die x-Achse und y-Achse.)

4. Gegebener Kreis: Radius $=r$, seine Ebene xy-Ebene, sein Mittelpunkt Ursprung O, fester Punkt auf x-Achse im Abstand a von O. $P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ ein beliebiger Punkt des Kreises. So Kugelschar:

$$x^2+y^2+z^2-2r\cos\varphi(x-a)-2ry\sin\varphi-a^2=0.$$

Einhüllende:

$$(x^2-a^2+y^2+z^2)^2-4r^2((x-a)^2+y^2)=0.$$

5. Gegebener Radius $=r$, Mittelpunkt sei Ursprung, fester Punkt $(a, 0, 0)$. $P(x, y, z)$ beliebiger Punkt auf der gegebenen Kugel. So Kugelschar:

$$X^2+Y^2+Z^2-a^2-2x(X-a)-2yY-2zZ=0$$

nebst der Bedingung:

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0.$$

Einhüllende:

$$(X^2+Y^2+Z^2-a^2)^2-4r^2((X-a)^2+Y^2+Z^2)=0$$

§ 25.

1. Es ist $\ln \cos 0 = 0$, $\ln(\cos - x) = + \ln \cos x$, also Ansatz:

$$\ln(\cos x) = \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \cdots;$$

differenziert

$$-\operatorname{tg} x = 2\alpha x + 4\beta x^3 + 6\gamma x^5 + \cdots;$$

andererseits [209 3]

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + Ax^7 + Bx^9 + \cdots;$$

daher:

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{12}, \quad \gamma = -\frac{1}{45}, \quad \delta = -\frac{A}{8}, \quad \varepsilon = -\frac{B}{10} \cdots$$

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{Ax^8}{8} - \frac{Bx^{10}}{10} - \cdots;$$

ebenso

$$\ln(\mathfrak{Cos}\, x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} - \frac{Ax^8}{8} + \frac{Bx^{10}}{10} - \cdots.$$

Da die Reihen für $\operatorname{tg} x$ und $\mathfrak{Tg}\, x$ nur für $|x| < \frac{\pi}{2}$ konvergieren, so diese Reihen auch.

2. Setze zunächst allgemeiner: $f(E)$ statt $\sin E$, also: $E - ef(E) - M = 0$. Betrachte E implizite als Funktion von e, (also e statt x, E statt y). Man erhält, wenn nach dem Differenzieren $e = 0$, also $E = M$ gesetzt wird (Bezeichnungen: erste Übung § 19):

$$p = -f(M), \; q = 1; \quad r = 0, \; s = -f'(M), \; t = 0;$$

$$\alpha = \beta = \delta = 0, \; \gamma = -f''(M)$$

$$A = B = C = E = 0, \quad D = -f'''(M);$$

folglich (§ 19, zweite Übung):

$$E' = f(M); \; E'' = 2f'(M)\cdot f(M), \; E''' = 6f'(M)^2 \cdot f(M) + 3f''(M)(f(M))^2$$

$$E'''' = 24 f(M)\cdot(f'(M))^3 + 36(f(M))^2\cdot f'(M)\cdot f''(M) + 4(f(M))^3\cdot f'''(M)$$

usw. Oder wenn $f(M) = z$, $f'(M) = z' \ldots$ gesetzt wird:

$$E' = z; \quad E'' = 2z'\cdot z, \quad E''' = 6z'^2 z + 3z''z^2,$$

$$E'''' = 24 z z'^3 + 36 z^2 z' z'' + 4z^3 z'''.$$

Diese Formen lassen sich überraschend vereinfachen in:

$$E' = z, \; E'' = (z^2)', \; E''' = (z^3)'', \; E'''' = (z^4)''' \ldots.$$

(Doch wäre die Induktion noch zu beweisen.) Also nach Maclaurin:

$$E = M + \frac{e}{1!}z + \frac{e^2}{2!}(z^2)' + \frac{e^3}{3!}(z^3)'' + \frac{e^4}{4!}(z^4)''' + \cdots.$$

Im vorliegenden Falle ist $z = f(M) = \sin M$. Daher, wenn man die Potenzen von $\sin M$ nach [234] entwickelt und dann differenziert:

$$E = M + \frac{e}{1}\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M + e^3\left(\frac{3}{8}\sin 3M - \frac{1}{8}\sin M\right)$$
$$+ e^4\left(\frac{1}{3}\sin 4M - \frac{1}{6}\sin 2M\right) + e^5\left(\frac{125}{384}\sin 5M - \frac{27}{128}\sin 3M\right.$$
$$\left. + \frac{1}{192}\sin M\right) + e^6\left(\frac{27}{80}\sin 6M - \frac{4}{15}\sin 4M + \frac{1}{48}\sin 2M\right) + \cdots.$$

3. Verschiedene Methoden sind möglich, z. B.:

$$\sqrt{1 + 3x + 2x^2} = \sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+2x}$$
$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \cdots$$
$$\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}2x + \binom{\frac{1}{2}}{2}4x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}8x^3 + \cdots$$

und nach Multiplikation in diagonaler Anordnung [100]:

$$\sqrt{1+3x+2x^2} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}(1+2)x + \left[\binom{\frac{1}{2}}{2}(1+2^2) + \binom{\frac{1}{2}}{1}^2 1\cdot 2\right]x^2$$
$$+ \left[\binom{\frac{1}{2}}{3}(1+2^3) + \binom{\frac{1}{2}}{2}\binom{\frac{1}{2}}{1}(2^2+2^1)\right]x^3 + \cdots.$$

Das Gesetz für die Bildung der Koeffizienten ist klar. Nach Einsetzen der Werte für $\binom{\frac{1}{2}}{1}, \binom{\frac{1}{2}}{2} \cdots$

$$\sqrt{1+3x+2x^2} = 1 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{3}{16}x^3 - \tfrac{37}{128}x^4 + \tfrac{117}{256}x^5 - \tfrac{757}{1024}x^6 + \cdots.$$

Die Reihe für $\sqrt{1+x}$ konvergiert nur für $|x| < 1$; die für $\sqrt{1+2x}$ nur für $|x| < \frac{1}{2}$. Also ist die Konvergenz der aufgestellten Reihe nur sicher für $|x| < \frac{1}{2}$. Daß sie für $|x| > \frac{1}{2}$ divergiert, muß allerdings erst bewiesen werden, was aber tiefere Untersuchungen erfordern würde.

§ 26.

1.

Winkel	sinus	cosinus	tangens	cotangens
0°	0,0000000	1,0000000	0,0000000	∞
1°	0,0174524	0,9998477	0,0174551	57,289962
2°	0,0348995	0,9993908	0,0349208	28,636253
3°	0,0523360	0,9986295	0,0524078	19,081137
4°	0,0697565	0,9975641	0,0699268	14,300666
5°	0,0871557	0,9961947	0,0874887	11,430052

2. $\ln 1 = 0{,}0000000000$ $\ln 6 = 1{,}7917594692$
$\ln 2 = 0{,}6931471806$ $\ln 7 = 1{,}9459101491$
$\ln 3 = 1{,}0986122887$ $\ln 8 = 2{,}0794415417$
$\ln 4 = 1{,}3862943611$ $\ln 9 = 2{,}1972245773$
$\ln 5 = 1{,}6094379124$ $\ln 10 = 2{,}3025850930$.

§ 27.

1. $$\sqrt{1+i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,i\right)$$

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{4}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right),$$

oder

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right),$$

oder

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{4} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)$$

$$\sqrt[4]{1+i} = \pm\sqrt[8]{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\right),$$

oder

$$\sqrt[4]{1+i} = \pm\sqrt[8]{2}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\right).$$

2. $$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= [(a+bi)(a-bi)][(c+di)(c-di)] \\ &= [(a+bi)(c+di)][(a-bi)(c-di)] \\ &= [(ac-bd)+i(bc+ad)][(ac-bd) \\ &\qquad -i(bc+ad)] \\ &= (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2;\end{aligned}$$

oder auch:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2.$$

3. $$\frac{a+bi}{a-bi} = \frac{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi} = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

4. $$\frac{z_1}{z_2} = e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha.$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2z\cos\alpha+z^2} &= \sqrt{1-ze^{i\alpha}}\sqrt{1-ze^{-i\alpha}} \\ &= \sum_0^\infty (-1)^m\cdot\binom{\frac{1}{2}}{m} z^m e^{im\alpha}\cdot\sum_0^\infty (-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n} z^n e^{-in\alpha} \\ &= \sum\sum (-1)^{m+n}\binom{\frac{1}{2}}{m}\binom{\frac{1}{2}}{n} z^{m+n} e^{i(m-n)\alpha}.\end{aligned}$$

Vertauscht man m und n und nimmt das Mittel, so folgt:

$$\sqrt{1-2z\cos\alpha+z^2}=\sum\sum(-1)^{m+n}\binom{\frac{1}{2}}{m}\binom{\frac{1}{2}}{n}z^{m+n}\cos(m-n)\alpha$$

oder, anders geschrieben $[m+n=p,\ n=p-m]$:

$$\sqrt{1-2z\cos\alpha+z^2}$$

$$=\sum(-1)^p z^p\cdot\left\{\sum\binom{\frac{1}{2}}{m}\binom{\frac{1}{2}}{p-m}\cos(p-2m)\alpha\right\}\begin{pmatrix}p=0,1,2,3\ldots\infty\\ m=0,1,2,3\ldots p\end{pmatrix}.$$

Setzt man die Werte von $\binom{\frac{1}{2}}{m}$ ein und berücksichtigt, daß $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$ ist, so folgt:

$$\sqrt{1-2z\cos\alpha+z^2}=1-z\cos\alpha-z^2\left(\tfrac{1}{4}\cos 2\alpha-\tfrac{1}{4}\right)$$
$$-z^3\left(\tfrac{1}{8}\cos 3\alpha-\tfrac{1}{8}\cos\alpha\right)-z^4\left(\tfrac{5}{64}\cos 4\alpha-\tfrac{1}{16}\cos 2\alpha-\tfrac{1}{64}\right)\cdots$$

Die Reihen für $\sqrt{1-ze^{-i\alpha}}$ und $\sqrt{1-ze^{-i\alpha}}$ konvergieren nur, wenn der Modul von z kleiner als 1 ist. Also konvergiert auch die gefundene Reihe nur in diesem Falle.

§ 28.

1. Nach zweimaligem Differenzieren, wenn stets $\sin^2\varphi$ durch $1-\cos^2\varphi$ ersetzt wird, ergibt sich die Rekursionsformel:

$$4k(n-k)A_{n-2k}=-(n-2k+2)(n-2k+1)A_{n-2(k-1)}$$

und hieraus, da (wie leicht zu zeigen) $A_n=2^{n-1}$ ist

$$\cos n\varphi=2^{n-1}\cos^n\varphi-2^{n-3}\frac{n}{1!}\cos^{n-2}\varphi$$
$$+2^{n-5}\frac{n(n-3)}{2!}\cos^{n-4}\varphi-2^{n-7}\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}\cos^{n-6}\varphi$$
$$+2^{n-9}\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}\cos^{n-8}\varphi+\cdots$$

(n darf gerade und ungerade sein).

Die Reihe ist so lange fortzusetzen, als die Exponenten von $\cos\varphi$ nicht negativ werden, also bis $A_1\cos\varphi$ oder bis A_0.

2. Man erhält wie in 1.:

$$4k(n-k)B_{n-2k}=-(n-2k+2)(n-2k+1)B_{n-2(k-1)}.$$

Diesmal ist $B_n=+2^{n-1}$ oder $B_n=-2^{n-1}$, je nachdem $\frac{n}{2}$ gerade oder ungerade ist. Also

$$\cos n\varphi = (-1)^{\frac{n}{2}}\left[2^{n-1}\sin^n\varphi - 2^{n-3}\frac{n}{1!}\sin^{n-2}\varphi + 2^{n-5}\frac{n(n-3)}{2!}\sin^{n-4}\varphi\right.$$
$$\left. - 2^{n-7}\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}\sin^{n-6}\varphi + \cdots\right] \quad (n \text{ darf nur gerade sein}).$$

3. Man erhält:

$$4k(n-k)C_{n-2k-1} = -(n-2k+1)(n-2k)C_{n-2k+1}.$$

Es ist $C_{n-1} = +2^{n-1}$ oder $C_{n-1} = -2^{n-1}$, je nachdem $\frac{n-1}{2}$ gerade oder ungerade ist; daher:

$$\cos n\varphi = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\varphi\left[2^{n-1}\sin^{n-1}\varphi - 2^{n-3}\frac{n-2}{1!}\sin^{n-3}\varphi\right.$$
$$+ 2^{n-5}\frac{(n-3)(n-4)}{2!}\sin^{n-5}\varphi$$
$$\left. - 2^{n-7}\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}\sin^{n-7}\varphi + \cdots\right]$$

(n darf nur ungerade sein).

4. $$\sin n\varphi = \sin\varphi\left[2^{n-1}\cos^{n-1}\varphi - 2^{n-3}\frac{n-2}{1!}\cos^{n-3}\varphi\right.$$
$$+ 2^{n-5}\frac{(n-3)(n-4)}{2!}\cos^{n-5}\varphi$$
$$\left. - 2^{n-7}\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}\cos^{n-7}\varphi + \cdots\right]$$

(n darf gerade und ungerade sein).

$$\sin n\varphi = (-1)^{\frac{n}{2}+1}\cos\varphi\left[2^{n-1}\sin^{n-1}\varphi - 2^{n-3}\frac{n-2}{1!}\sin^{n-3}\varphi\right.$$
$$+ 2^{n-5}\frac{(n-3)(n-4)}{2!}\sin^{n-5}\varphi$$
$$\left. - 2^{n-7}\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}\sin^{n-7}\varphi + \cdots\right]$$

(n darf nur gerade sein).

$$\sin n\varphi = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[2^{n-1}\sin^n\varphi - 2^{n-3}\frac{n}{1!}\sin^{n-2}\varphi\right.$$
$$+ 2^{n-5}\frac{n(n-3)}{2!}\sin^{n-4}\varphi$$
$$\left. - 2^{n-7}\frac{n(n-3)(n-4)}{3!}\sin^{n-6}\varphi + \cdots\right]$$

(n darf nur ungerade sein).

5. a) $-4{,}2486 + 3{,}0661i$; b) $2{,}25069 - 0{,}39442i \pm 2k\pi i$;

c) $\pm 2{,}6339i \pm 2k\pi$; d) $\pm 2{,}76865i + \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$;

e) $0{,}14384i \pm (k + \frac{1}{2})\pi$; f) $-0{,}125651 \pm k\pi$.

§ 29.

1. $$Z = X + iY = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$
$$X = e^x \cos y, \quad Y = e^x \sin y.$$
$$X^2 + Y^2 = e^{2x}, \quad Y = X \operatorname{tg} y.$$

Den Parallelen in der xy Ebene zur y Achse ($x =$ constans) entsprechen in der XY Ebene konzentrische Kreise um den Ursprung, Radius $= e^x$. Den Parallelen zur x Achse entsprechen die Radien dieser Kreise, Richtungswinkel $= + y$. Die Abbildung der xy Ebene auf die XY Ebene ist eindeutig, aber die umgekehrte Abbildung ist unendlich vieldeutig, da eine Änderung von y um $\pm 2k\pi$ keine Änderung von $Z = X + iY$ zur Folge hat. Jeder Streifen der xy Ebene zwischen zwei Parallelen zur x Achse im Abstande 2π wird einmal auf der XY Ebene vollständig abgebildet.

2. $$\frac{\partial X}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Also sind 3. und 4. in [238] wirklich erfüllt.

3. $$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{3 - 7i\sqrt{3}}{6\left(x - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)} + \frac{3 + 7i\sqrt{3}}{6\left(x - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)}$$

$$f^p(x) = \frac{d^p f(x)}{(dx)^p} = (-1)^p p! \left[\frac{1}{(x+1)^{p+1}} + \frac{3 - 7i\sqrt{3}}{6\left(x - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^{p+1}}\right.$$
$$\left. + \frac{3 + 7i\sqrt{3}}{6\left(x - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^{p+1}}\right] = (-1)^p p! \left[\frac{1}{(x+1)^{p+1}}\right.$$
$$\left. + \frac{(3 - 7i\sqrt{3})\left(x - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^{p+1} + (3 + 7i\sqrt{3})\left(x - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^{p+1}}{6(x^2 - x + 1)^{p+1}}\right].$$

Der Zähler des zweiten Bruches wird reell, wenn die Potenzen nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt werden.

§ 30.

1. $$\sqrt[n]{a} = z; \quad x = 1, z, z^2, \ldots z^{n-1}, z^n;$$
$$\Delta x = z - 1, \quad z(z-1), \quad z^2(z-1), \quad z^3(z-1) \cdots z^{n-1}(z-1)$$
$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \lim \sum \frac{\Delta x}{x} = (z-1)\left[\frac{1}{1} + \frac{z}{z} + \frac{z^2}{z^2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{z^{n-1}}\right]$$
$$= (z-1)n = \lim_{(n=\infty)} \left[\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)n\right] = \ln a.$$

2. $x = 1, \quad 1 + \frac{a-1}{n}, \quad 1 + 2\frac{a-1}{n}, \ldots 1 + q\frac{a-1}{n},$

$$1 + (q+1)\frac{a-1}{n}, \ldots .$$

$$\int_1^a \frac{dx}{x^2} = \lim \sum_{q=0}^{q=n-1} \frac{\Delta x}{x_q x_{q+1}} = \lim \frac{a-1}{n} \sum \frac{1}{x_q x_{q+1}}$$

$$\frac{1}{x_q x_{q+1}} = \frac{(x_{q+1} - x_q)\frac{n}{a-1}}{x_q x_{q+1}} = \frac{n}{a-1}\left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_{q+1}}\right)$$

$$\sum \frac{1}{x_q x_{q+1}} = \frac{n}{a-1}\left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n}\right] = \frac{n}{a-1}\left[1 - \frac{1}{a}\right]$$

$$\int_1^a \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{a}.$$

3. $x = 0, \quad \frac{b}{n+1}, \quad 2\frac{b}{n+1} \cdots; \quad \Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \frac{b}{n+1}$

$$\int_0^b x^p\, dx = \lim \sum x^p \Delta x = \lim \left(\frac{b^{p+1}}{(n+1)^{p+1}} \cdot \sum_{z=0}^{z=n} z^p\right)$$

$$= b^{p+1} \lim \left(\frac{\sum z^p}{n^p} \cdot \frac{n^p}{(n+1)^p}\right) = b^{p+1} \cdot \frac{1}{p+1} \cdot 1 = \frac{b^{p+1}}{p+1}.$$

4. $x = 1, \quad 1 + \frac{a-1}{n}, \quad 1 + 2\frac{a-1}{n}, \ldots;$

$$\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 \cdots = \frac{a-1}{n}$$

$$\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim \sum \frac{\Delta x}{\frac{1}{2}(\sqrt{x_q} + \sqrt{x_{q+1}})} = 2\frac{a-1}{n} \cdot \sum \frac{\sqrt{x_{q+1}} - \sqrt{x_q}}{x_{q+1} - x_q}$$

$$= 2\sum(\sqrt{x_{q+1}} - \sqrt{x_q}) = 2(\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0}) = 2(\sqrt{a} - \sqrt{1})$$

$$= 2(\sqrt{a} - 1).$$

§ 31.

1. $e^x \cdot f(x) + C.$ **2.** $-\cos x \cdot f(x) + C.$

3. Es sei

$$0 < \lim |(x-a)| f(x) < \infty.$$

Setze

$$(x-a) \cdot f(x) = \psi(x), \quad f(x) = \psi(x) : (x-a)$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{\psi(x)}{x-a}\,dx.$$

Man integriere zwischen zwei Grenzen, die beide kleiner oder beide größer als a sind. Dann ist nach dem zweiten Mittelwertsatz:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \psi(x_m)\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x-a} = \psi(x_m)\ln\frac{x_2-a}{x_1-a}.$$

Es sein x_1 und x_2 beide unendlich wenig von a verschieden, aber so, daß $x_2 - a : x_1 - a$ unendlich groß wird. Dann bleibt $\psi(x_m)$ nach Voraussetzung endlich und von 0 verschieden, während der zweite Faktor $= \ln\infty = \infty$ wird. Also wird das Integral unendlich für $x = a$.

Daß für $\lim (x-a) f(x) = 0$ das Integral sowohl endlich, als auch unendlich werden kann, lehren die folgenden beiden Beispiele:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \text{also} \quad (x-0)\cdot f(x) = \sqrt{x}, \quad \lim_{(x=0)} (x-0) f(x) = 0.$$

$$\int f(x)\,dx = \int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

Das Integral bleibt endlich für $x = 0$

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x}, \quad (x-0) f(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad \lim_{(x=0)} (x-0) f(x) = \frac{1}{\ln 0} = 0$$

$$\int f(x)\,dx = \int\frac{dx}{x\ln x} = \int\frac{d\ln x}{\ln x} = \ln(-\ln x) + C.$$

Das Integral wird unendlich für $x = 0$.

4. $\sin x\, f(x) + C$. **5.** $\sqrt{x}\,\operatorname{arc}(\sin = x) + C$.

§ 32.

1. Mantel $= M = \int 2\pi y\, ds = 2\pi\int y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$$= 2\pi\int y\,dy\sqrt{1 + 4\frac{y^2h^2}{a^4}} = \frac{\pi a^4}{6h^2}\Bigg|_{y=0}^{y=a}\sqrt{1 + 4\frac{y^2h^2}{a^4}}^{\,3}$$

$$= \pi\frac{a^4}{6h^2}\left(\sqrt{1 + 4\frac{h^2}{a^2}}^{\,3} - 1\right) = \frac{\pi a}{6h^2}\left(\sqrt{a^2 + 4h^2}^{\,3} - a^3\right).$$

Für $\lim h = 0$ folgt zunächst $0 : 0$. Aber nach Anwendung von [188]:

$$M = \frac{\frac{\pi a}{6}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}\cdot 8h}{2h\,(h=0)} = \pi a^2,$$

wie es sein muß.

$\Big($Oder $u^3 - v^3 = (u^2 - v^2)\dfrac{(u^2 + uv + v^2)}{u + v}$ und Fortheben von h^2 im Zähler und Nenner.$\Big)$

2. Große Achse x Achse, kleine Achse y Achse. Es wird nicht y sondern x eliminiert (am besten)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \quad x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}, \quad dx=-\frac{a}{b}\frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}},$$

$$e^2=a^2-b^2, \quad \varepsilon=\frac{e}{a}$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dy\,\frac{\sqrt{b^4+e^2y^2}}{b\sqrt{b^2-y^2}}; \quad O=2\pi\int x\,ds$$

$$=\frac{2\pi a}{b^2}\int dy\sqrt{b^4+e^2y^2} \quad [284]$$

$$=\frac{2\pi a}{b^2}\left[y\frac{\sqrt{b^4+e^2y^2}}{2}+\frac{b^4}{2e}\ln\left(\sqrt{b^4+e^2y^2}+ey\right)\right]_{y=-b}^{y=+b}$$

$$=2\pi a^2\left[1+\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right].$$

Für Kugel ist $b=a$, $\varepsilon=0$. Zunächst $O=0:0$, dann aber [188]: $O=4\pi a^2$.

Man kann aber auch (für schwache Abplattungen sehr geeignet) Reihenentwicklungen anwenden [210_4] und erhält dann:

$$O=4\pi a^2\left(1-\frac{\varepsilon^2}{1\cdot 3}-\frac{\varepsilon^4}{3\cdot 5}-\frac{\varepsilon^6}{5\cdot 7}-\cdots\right).$$

3. Große Achse x Achse, kleine Achse y Achse; $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$$ds=\frac{dx\sqrt{a^4-e^2x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}; \quad \text{setze} \quad \varepsilon=\frac{e}{a}, \quad \varepsilon_1=\frac{e}{b}, \quad \varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1+\varepsilon_1^2}}$$

$$O=2\pi\int y\,ds=\frac{2\pi b}{a^2}\int dx\sqrt{a^4-e^2x^2} \quad [284]$$

$$O=\frac{2\pi b}{a^2}\left[\frac{x\sqrt{a^4-e^2x^2}}{2}+\frac{a^4}{2e}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{ex}{a^2}\right)\right]_{x=-a}^{x=+a}$$

$$=2\pi b^2\left[1+\frac{1}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc}(\sin=\varepsilon)\right]$$

$$=2\pi b^2\left[1+\frac{1+\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1}\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\varepsilon_1)\right].$$

Für Kugel ist $a=b$, $\varepsilon_1=0$. Zunächst $O=0:0$, dann aber [188] $O=4\pi b^2$.

Man kann aber auch Reihenentwicklungen anwenden [211_1] und erhält:

$$O=4\pi b^2\left[1+\frac{\varepsilon_1^2}{1\cdot 3}+\frac{\varepsilon_1^4}{3\cdot 5}+\frac{\varepsilon_1^6}{5\cdot 7}+\cdots\right].$$

4. Fläche $=F$, Bogenlänge $=s$ (beides vom Scheitel aus, von $x=0$) [64] Fig. 25

$F =$ Fläche $TQPS = \int y\,dx = h \int \mathfrak{Kof}\,\frac{x}{h}\,dx = h^2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{h}$

$s =$ Bogen $SP = \int \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int \sqrt{1 + \mathfrak{Sin}^2\,\frac{x}{h}}\,dx = \int \mathfrak{Kof}\,\frac{x}{h}\,dx$

$= h\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{h}.$

In Fig. 25 ist $F = 2\Delta RQP$; $s = \frac{F}{h} = RP.$

5. Zerlege den Kegel in unendlich viele Kreisscheiben, Radius $= y$, Abstand von der Spitze $= x$, so $y = \frac{xr}{h}$, Masse oder Volumen des Kegels $M = \frac{\pi r^2 h}{3}$

a) $T = \int \frac{\pi y^4 dx}{2}$ [256] VI) $= \frac{\pi r^4}{2h^4}\int_0^h x^4\,dx = \frac{\pi r^4 h}{10} = M \cdot \frac{3}{10} r^2.$

b) $T_1 = \int \frac{\pi y^4}{4}\,dx + \int \pi y^2 x^2 dx$ (vgl. IV) [256] und [266]

$T_1 = M\frac{3}{20}r^2 + \pi r^2 \frac{h^3}{5} = M\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{3}{5}h^2\right).$

c) $T_2 = T_1 - M\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = M\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{3}{80}h^2\right).$

§ 33.

1. ($\cos\alpha$ und $\cos\varphi$ zu vertauschen). Der Integrand wird für die obere Grenze unendlich. Die Simpsonsche Formel würde daher $t = \infty$ ergeben. Aus demselben Grunde versagt die Reihenentwicklung für die obere Grenze.

Nach Ausführung der Substitution erhält ψ die Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Ihre Durchführung ergibt

$$t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \quad \left(k = \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Der Integrand wird nicht mehr unendlich. Da $|k^2\sin^2\psi| < 1$, so folgt ohne Einschränkung:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1} k^2\sin^2\psi + \binom{-\frac{1}{2}}{2} k^4\sin^4\psi$$

$$- \binom{-\frac{1}{2}}{3} k^6\sin^6\psi \ldots.$$

Setzt man für die Binomialkoeffizienten ihre Werte und integriert dann mit Benutzung der angegebenen Formel $[291_3]$, so folgt:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2 k^8 + \cdots\right].$$

2. Es sei $J = h(\alpha y_0 + \beta y_1 + \gamma y_2 + \delta y_3)$. Da dies bis auf Glieder dritten Grades des Integranden richtig sein soll, so integriere man etwa für $x = 0$ bis $x = 3$, also $h = 3$ und setze y der Reihe nach $= 1, x, x^2, x^3$, dann wird der Reihe nach $J = 3, \frac{9}{2}, 9, \frac{81}{4}$. Also nach Division durch 3:

$$\left.\begin{array}{rl} 1 = & \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ \frac{3}{2} = & \quad\ \beta + 2\gamma + 3\delta \\ 3 = & \quad\ \beta + 4\gamma + 9\delta \\ \frac{27}{4} = & \quad\ \beta + 8\gamma + 27\delta \end{array}\right\} \alpha = \delta = \tfrac{1}{8}, \quad \beta = \gamma = \tfrac{3}{8}.$$

Setzt man dagegen $y = ax^4$, dann wird der genaue Wert $J = \frac{a x^5}{5} = \frac{243}{5} a$. Die Formel des Cotesius würde ergeben

$$J = \frac{3a}{8}(0 + 3 + 3 \cdot 2^4 + 3^4) = \frac{99}{2} a.$$

Differenz $= -\frac{9}{10} a = -\frac{h^5}{270} a$, daher allgemein der Fehler (schätzungsweise)

$$= -\frac{h^5 f''''(x)}{270 \cdot 24} = -\frac{h^5 f''''(x)}{6480}.$$

Bei fünf Ordinaten erhält man ebenso:

$$\left.\begin{array}{rl} 1 = & \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon \\ 2 = & \quad\ \beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon \\ \frac{16}{3} = & \quad\ \beta + 4\gamma + 9\delta + 16\varepsilon \\ 16 = & \quad\ \beta + 8\gamma + 27\delta + 64\varepsilon \\ \frac{256}{5} = & \quad\ \beta + 16\gamma + 81\delta + 256\varepsilon \end{array}\right\} \alpha = \varepsilon = \tfrac{7}{90}, \quad \beta = \delta = \tfrac{32}{90}, \quad \gamma = \tfrac{12}{90}.$$

Man findet, daß die Formel auch noch für $y = x^5$ stimmt. Allgemein ergibt sich der Fehler (schätzungsweise)

$$= -\frac{h^7}{2688} \frac{f''''''(x)}{6!} = -\frac{h^7 f''''''(x)}{1935360}.$$

3. $$O = \int 2\pi x \, ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi 5 \cos\varphi \sqrt{25 \sin^2\varphi + 9\cos^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= 20\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sqrt{17 - 8\cos 2\varphi}\, d\varphi.$$

Integrand $= \cos\varphi \sqrt{17 - 8\cos 2\varphi}$. Man teile etwa in $3 \cdot 2 = 6$ Intervalle. Man erhält:

3,0000; 3,0654; 3,1225; 2,9155, 2,2913, 1,2661, 0,0000

und nach Simpson:

$$O = 74{,}730\pi.$$

Der genaue Wert ist (vgl. zweite Übung § 32)

$$O = 50\pi(1 + \tfrac{9}{40}\ln 9) = \pi(50 + \tfrac{90}{4}\ln 3) = 74{,}719\pi.$$

Die Anzahl der Intervalle hat also nur für vier Stellen ausgereicht!

§ 34.

1. Nach Einführung von Polarkoordinaten [61 9] δ und $\varphi(r = 1)$ ist eine Fläche auf der Kugel (vgl. auch [270]):

$$\iint \cos\delta\, d\delta\, d\varphi = \int d\varphi \sin\delta = \varphi. \quad \text{Mittelwert von } \sin\delta.$$

Man betrachte ein sphärisches Dreieck, sehe aber zunächst α und a als unendlich klein an, so daß b und c sehr wenig verschieden voneinander sind und $\beta + \gamma$ sehr wenig von 180^0 abweicht. Lege die z-Achse nach Ecke A so ist die obere Grenze von δ stets $= 90^0$. Die untere Grenze ist unendlich wenig von $\frac{\pi}{2} - b$ oder $\frac{\pi}{2} - c$ verschieden, also der obige Mittelwert unendlich wenig von $\cos b$ oder $\cos c$. Es wird $\varphi = \alpha$, daher bis auf Größen höherer Ordnung

$$J = \alpha(1 - \cos b) = \alpha - \alpha\cos b.$$

Die Formel von Gauß oder Delambre:

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{a}{2} = \cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

ergibt links bis auf Größen höherer Ordnung

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}$$

und rechts bis auf Größen höherer Ordnung

$$\cos b\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}\cos b,$$

daher:

$$J = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Dies gilt zunächst, wenn ein Winkel α unendlich klein ist. Zerlegt man ein beliebiges Dreieck von A aus in unendlich viele solche Dreiecke, so ergibt die zweite Integration leicht die allgemeine Richtigkeit der Formel.

2. Führe Polarkoordinaten ϱ und φ ein, wie in [270], lege x Achse und y Achse durch die Mitte des Quadrates parallel zu den Seiten, integriere über eines der acht Dreiecke, in welche das Quadrat durch die x Achse, y Achse und die Diagonalen geteilt wird und multipliziere mit 8. Die Integration nach ϱ ist sehr einfach, ebenso die Grenzen $\varrho = 0$, $\varrho = \frac{a}{2\cos\varphi}$.

Man erhält:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{8}{3}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4\cos^2\varphi}}^{\,3}\, d\varphi;$$

$$O = 2\pi r^2 - 8r\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4\cos^2\varphi}}\, d\varphi.$$

Die zweite Integration aber macht recht viel Arbeit. Man setze z. B. die Wurzel $= r \operatorname{tg}\varphi \cdot u$, so wird der Integrand rational, so daß nach § 35 integriert werden kann. Zuletzt ergibt sich, wenn $\alpha = a : 2r$ gesetzt wird:

$$V = \frac{2}{3} r^3 \Big[\pi + (6\alpha - 2\alpha^3) \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$
$$+ 2\alpha^2\sqrt{1 - 2\alpha^2} - 4 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha^2)}}\right)\Big]$$

$$O = 2r^2\left[\pi + 4\alpha \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right) - 4 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\sqrt{2(1-\alpha^2)}}\right)\right].$$

(Zwei Proben: 1) Setze α unendlich klein, so muß sich bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung ergeben:

$$V = r \cdot a^2 = 4r^3\alpha^2; \quad O = a^2 = 4r^2\alpha^2.$$

2) Setze $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so die Ecken des Quadrates auf dem Grundkreis der Halbkugel, also von dieser vier halbe Kalotten mit der Höhe

$$h = r - \frac{a}{2} = r\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

abzuziehen.)

§ 35.

1. $\delta = 0, \quad \gamma = -\alpha; \quad \displaystyle\int \frac{\alpha + \beta x - \alpha x^2}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{A - \frac{\beta}{2} + \alpha x + A x^2}{1 + x^2}.$

2. Es sei

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\, dx = \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}, \quad \text{also} \quad \frac{\varphi_1(x) f_1'(x) - f_1(x)\varphi_1'(x)}{(\varphi_1(x))^2} \equiv \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Man darf $f_1(x)$ und $\varphi_1(x)$ als relativ prim annehmen, da ein etwaiger gemeinsamer Faktor vorher gehoben werden könnte. Es sei $x - x_1$ ein p-facher Faktor von $\varphi_1(x)$, also kein Faktor von $f_1(x)$ und ein $(p-1)$facher Faktor von $\varphi_1'(x)$ [161]. Folglich kann im Bruch links nur die $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenzen $(x-x_1)$ im Zähler und Nenner gehoben werden. Bleibt also im Nenner immer noch die $p+1^{\text{te}}$, also mindestens die 2te Potenz von $x - x_1$.

3. $$F = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2} = \frac{1}{2}a^2\int \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d(\operatorname{tg}\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}$$
$$= \Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} - \frac{a^2}{6(1+\operatorname{tg}^3\varphi)} + C = \frac{a^2}{6}.$$

§ 36.

1. $$V = \pi\int\limits_{-a}^{+a} = 2\pi\int\limits_0^a y^2 dx = 2\pi\int\limits_0^a\left(-x^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{a^2+8x^2}\right)dx$$
$$= 2\pi\Bigg[_{x=0}^{x=a} -\frac{x^3}{3} - \frac{a^2x}{2} + \frac{ax\sqrt{a^2+8x^2}}{4} + \frac{a^3\sqrt{2}}{16}\ln\left(2\sqrt{2}\,\frac{x}{a} + \sqrt{1+\frac{8x^2}{a^2}}\right) + C\Bigg]$$
$$= \pi a^3\left[-\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right].$$

2. $$\begin{matrix}x_1{}^2\\x_2{}^2\end{matrix} = -y^2 + \frac{a^2}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{a^2-8y^2}, \quad |y| \leqq \frac{a}{4}\sqrt{2}.$$
$$V = \pi\int\limits_{-\frac{a}{4}\sqrt{2}}^{+\frac{a}{4}\sqrt{2}} = 2\pi\int\limits_0^{\frac{a}{4}\sqrt{2}}(x_1{}^2 - x_2{}^2)\,dy = 2\pi\int a\sqrt{a^2-8y^2}\,dy$$
$$= 2\pi\Bigg[_{y=0}^{y=\frac{a}{4}\sqrt{2}}\frac{ay\sqrt{a^2-8y^2}}{2} + \frac{a^3\sqrt{2}}{8}\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y\,2\sqrt{2}}{a}\right) + C\Bigg] = \pi^2\frac{a^3\sqrt{2}}{8}.$$

3. $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^9} = \frac{x}{7\sqrt{1+x^2}^7} + \frac{6x}{35\sqrt{1+x^2}^5} + \frac{8x}{35\sqrt{1+x^2}^3} + \frac{16x}{35\sqrt{1+x^2}} + C$$
$$= \frac{35x + 70x^3 + 56x^5 + 16x^4}{30\sqrt{1+x^2}^7} + C.$$

4. $$\int\sqrt[5]{(1-x)^{-12}(1+x)^2}\,dx = \int\frac{dx}{(1-x)^2}\cdot\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}^2}$$
$$= \frac{5}{14}\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}^7} + C.$$

5. $$\int\limits_1^0\frac{dx}{\sqrt[7]{(1-x)^{11}(1+x)^3}} = \int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt[7]{\frac{1+x}{1-x}}}$$
$$= \Bigg|_{-1}^{0}\frac{7}{8}\sqrt[7]{\frac{1+x}{1-x}^4} + C = \frac{7}{8}.$$

§ 37.

1. $$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt[3]{(1+e^x)^3(1-e^x)}} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1-e^{x^2}}{1+e^x}} + C.$$

2. zweimal $[289_1]$, dann dreimal $[289_3]$, zuletzt $J_{+1,-1}$ in [288]

$$\int \frac{\cos^{11}x}{\sin^5 x}\,dx = -\frac{\cos^{10}x}{4\sin^4 x} + \frac{5}{4}\frac{\cos^8 x}{\sin^2 x} + \frac{5}{3}\cos^6 x + \frac{5}{2}\cos^4 x$$
$$+ 5\cos^2 x + 10 \ln \sin x + C.$$

3. Man führe wie in [200] den Winkel α ein, also $x = l\cos^3\alpha$, $y = l\sin^3\alpha$

$$F = \int dF = \frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx) = \frac{3}{2}l^2\int_0^{2\pi} = 6\,l^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha$$

$F = \frac{3}{8}\pi l^2 = \frac{3}{8} \cdot$ umbeschriebener Kreis,

$$s = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 12\,l\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha = 6\,l.$$

4. Grenzen für y sind 0 und $\frac{\pi}{2}$. Man erhält schließlich

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 y}{2}}}$$
$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} \cdots\right]$$

vgl. erste Aufgabe § 33.

5. Führe Polarkoordinaten ein, so $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$,

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\varphi)^2} = \pm \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi.$$

Im ersten Quadranten geht φ von 0 bis $\frac{\pi}{4}$, also:

$$s = 4a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \quad \left(2\varphi = \frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$s = \pi\sqrt{2}\,a\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} + \cdots\right].$$

§ 38.

1. $\int x e^x \sin^3 x\,dx = \frac{3}{4}\int x e^x \sin x\,dx$

$$-\frac{1}{4}\int x e^x \sin 3x\,dx \quad \left(\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\right).$$

Die teilweise Integration ergibt:

$$\int x e^x \sin kx\,dx = \frac{x e^x \sin kx - k x e^x \cos kx}{1+k^2} - \frac{1}{1+k^2}\int e^x \sin kx\,dx + \frac{k}{1+k^2}\int e^x \cos kx\,dx,$$

also nach [295], wenn man $k=1$, $k=3$ setzt nnd dann zusammenzieht:

$$\int x \sin^3 x\, e^x\,dx = \frac{3 x e^x \sin x}{8} + \frac{(3-3x)e^x \cos x}{8}$$

$$-\frac{10x + 8 e^x \sin 3x}{400} + \frac{(30x-6)e^x \cos 3x}{400} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{3}\ln(a+x) - \frac{1}{6}\ln(a^2-ax+a^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2x-a}{a\sqrt{3}}\right)\right] + C;$

nach a differenziert und durch $-3a^2$ dividiert

$$\int \frac{dx}{(a^3+x^3)^2} = \frac{1}{a^5}\left[\frac{2}{9}\ln(a+x) - \frac{1}{9}\ln(a^2-ax+x^2) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{2x-a}{a\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{3a^4}\left[\frac{1}{3(a+x)} - \frac{2a-x}{6(a^2-ax+x^2)} - \frac{x}{2(a^2-ax+x^2)}\right] + C.$$

Setzt man $a=1$ und ordnet die beiden letzten Glieder anders, so entsteht in der Tat wieder $D)$ in [279].

3. In A könnte man z. B. $\cos\varphi = u$ setzen, dann erhielte der Integrand die Form $f\left(u, \sqrt{a^2+bu^2}\right)$; besser aber setzt man:

$$\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi} = z.$$

Es wird dann:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-z}{1+z} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{\cos\varphi - \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi + \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + C$$

$$= \ln\left(\cos\varphi - \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right) - \ln\sin\varphi + C'.$$

In $B)$ setzt man entsprechend:

$$\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-k^2}\sin\varphi} = z.$$

Es wird dann:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}\ln\frac{\sqrt{1-k^2}\sin\varphi + \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-k^2}\sin\varphi - \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left[\ln\left(\sqrt{1-k^2}\sin\varphi + \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right) - \ln\cos\varphi\right] + C'.$$

4. Die gesuchte Rekursionsformel beruht auf Umkehrung der folgenden Differentialformel:

$$\frac{d\left[\sin^{2n+1}\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right]}{d\varphi}$$

$$=\frac{(2n+1)\sin^{2n}\varphi-2(n+1)(1+k^2)\sin^{2(n+1)}\varphi+(2n+3)k^2\sin^{2(n+2)}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Wird sie integriert und berücksichtigt, daß $\sin^{2n+1}\varphi\cos\varphi$ sowohl für $\varphi=0$, als für $\varphi=\frac{\pi}{2}$ verschwindet, so folgt:

$$(2n+1)J_n-2(n+1)(1+k^2)J_{n+1}+(2n+3)k^2J_{n+2}=0,$$

also für $n=0$ und $n=1$:

$$J_0-2(1+k^2)J_1+3k^2J_2=0;\quad 3J_1-4(1+k^2)J_2+5k^2J_3=0;$$

$$J_3=-\frac{4}{15}\cdot\frac{1+k^2}{k^4}J_0+\frac{8+7k^2+8k^4}{15k^4}J_1.$$

§ 39.

1. (Lies x-Achse statt y-Achse.) Die Kreisschar hat die Gleichung:

$$x^2+y^2-2\lambda x+\frac{\lambda^2a^2}{a^2-b^2}-b^2=0;\quad\text{also}\quad 2x+2yy'-2\lambda=0$$

und nach Elimination von λ:

$$x^2+y^2-2x(x+yy')+\frac{(x+yy')^2a^2}{a^2-b^2}-b^2=0.$$

2. Die Kreisschar hat die Gleichung:

$$x^2+y^2+2x\frac{\lambda^3}{p^2}-2y\left(p+\frac{3\lambda^2}{2p}\right)-\frac{3\lambda^4}{4p^2}=0;\quad 2x+2yy'+\frac{2\lambda^3}{p^2}-2y'\left(p+\frac{3\lambda^2}{2p}\right)=0$$

(λ ist Abszisse des Berührungspunktes mit der Parabel). Aus beiden Gleichungen wäre λ zu eliminieren, was eine rein algebraische, hier allerdings recht umständliche Aufgabe ist.

3. $(x+y-1)^5e^{\frac{2x-4}{x+y-1}}=k$[1]), **4.** $y=\frac{1}{\sqrt[3]{ke^{-3x}+\frac{1}{3}-x}}$,

5. $$\frac{y}{\sin\tau}=h;\quad\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}=h;\quad dx=-dy\frac{\sqrt{h^2-y^2}}{y}$$

$$x+C=-\sqrt{h^2-y^2}+\frac{h}{2}\ln\left(\frac{h+\sqrt{h^2-y^2}}{h-\sqrt{h^2-y^2}}\right).$$

Die Kurve ist eine durch den Scheitel gehende Evolvente der Kettenlinie. Vgl. Fig. 25 in [64] und 4te Aufgabe in § 32.

1) Lies in Aufgabe $+5y-1$ statt $-5y+8$.

§ 40.

1. a) $y'' = 0$, b) $3(y'')^2 y' - (1 + y'^2) y''' = 0$.

2. Der Versuch führt nach Division durch x^k auf die Gleichung n^{ten} Grades für k

$$A + Bk + Ck(k-1) \cdots + L \cdot k(k-1) \cdots (k-(n-1)) = 0.$$

Ihre Wurzeln seien $k_1, k_2 \ldots k_n$, so allgemeine Lösung:

$$y = \alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \cdots + \alpha_n x^{k_n}.$$

3. $$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{x^7}{20}.$$

4. $$y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} (\ln x)^2$$

(zwei erschwerende Umstände gegen 3). Erstens die Gleichung für k hat die Doppelwurzel $k = 2$. Zweitens der Exponent im Störungsglied ist auch $= 2$.

5. Die Differentialgleichung wird:

$$\lambda(x) \frac{z''}{z} + \lambda'(x) \frac{z'}{z} - \lambda(x) \frac{z'^2}{z^2} = f(x) + \varphi(x) \lambda(x) \cdot \frac{z'}{z} + \psi(x) (\lambda(x))^2 \frac{z'^2}{z^2}.$$

Die beiden letzten Glieder links und rechts heben sich, wenn $\lambda(x) = -1 : \psi(x)$ gesetzt wird. Man erhält:

$$f(x) \cdot (\psi(x))^2 z - [\varphi(x) \psi(x) + \psi'(x)] z' + \psi(z) z'' = 0.$$

§ 41.

1. Die einfachste Lösung gibt das dritte Keplersche Gesetz, wenn man das Fallen vom jetzigen Abstand ohne Anfangsgeschwindigkeit bis zur Erde als Beschreiben der Hälfte einer gänzlich abgeplatteten Ellipse mit der Halbachse $\frac{r}{2}$ betrachtet. Also:

$$28^2 : (2t)^2 = r^3 : \left(\frac{r}{2}\right)^3 = 8 : 1; \quad 14 : t = 2\sqrt{2} : 1$$

$$t = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2}\sqrt{2} = 4{,}9497.$$

Der Mond würde in (rund) fünf Tagen auf der Erde sein. Dasselbe Ergebnis folgt selbstverständlich auch, wenn man t durch ein bestimmtes Integral ausdrückt und dieses auswertet.

2. Der Ansatz:

$$y = Ae^{kx}, \quad z = Be^{kx}; \quad u = Ce^{kx}$$

führt (nach Division durch e^{kx}) auf die drei Gleichungen:

$$-(3+k)A + 7B - 3C = 0; \quad -6A + (12-k)B - 5C = 0;$$
$$-12A + 22B - (9+k)C = 0.$$

Das System hat drei Lösungen:

$$k_1 = 0, \qquad A_1 : B_1 : C_1 = 1 : 3 : 6,$$
$$k_2 = +1, \quad A_2 : B_2 : C_2 = 1 : 1 : 1,$$
$$k_3 = -1, \quad A_3 : B_3 : C_3 = 1 : 2 : 4.$$
$$y = K_1 + K_2 e^x + K_3 e^{-x}; \qquad z = 3K_1 + K_2 e^x + 2K_3 e^{-x};$$
$$u = 6K_1 + K_2 e^x + 4K_3 e^{-x}$$

K_1, K_2, K_3 drei willkürliche Konstanten.

§ 42.

1. Die Umformung ergibt nach Division durch $e^{k(x+y)}$

$$u(1+2k) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

also am besten

$$k = -\frac{1}{2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$u = f(x-y); \quad z = e^{-\frac{1}{2}(x+y)} f(x-y)$$

$f(x-y)$ ist eine willkürliche (jedoch differenzierbare) Funktion von $(x-y)$.

2. Man versuche etwa dieselbe Substitution. Man erhält:

$$u(1+(a+b)k) + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$k = -\frac{1}{a+b}, \quad a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u = f(bx-ay), \quad z = e^{-\frac{x+y}{a+b}} f(bx-ay).$$

3. Kugelbündel:

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By-1=0; \quad z = \sqrt{1-2Ax-2By-x^2-y^2}$$

$$p = -\frac{A+x}{z}, \quad q = -\frac{B+y}{z}, \quad A = -pz-x, \quad B = -qz-y.$$

Eingesetzt ergibt die partielle Differentialgleichung:

$$-2pxz - 2qyz + z^2 - x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

4. $$p = \frac{1}{z}\left(-x + \frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad q = \frac{1}{z}\left(-y + \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Nach Einsetzen in die zu 3) gefundene partielle Differentialgleichung ergibt sich identisch $0 = 0$.

Ahrens, Dr. **W.**, in Magdeburg, mathematische Unterhaltungen und Spiele. 2., vermehrte und verbesserte Auflage. In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb. I Band. Mit 200 Figuren im Text. 1910. n. *M.* 7.50. [2 Bd. in der Presse].

——— Kleine Ausgabe: Mathematische Spiele. Mit einem Titelbild und 69 Figuren. [VI u. 118 S.] 8. 1907. Geh. n. *M.* 1.—, in Leinwand geb. n. *M* 1.25.

——— Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 8.—

Burkhardt, Dr. **H.**, Professor an der Technischen Hochschule München, Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Mit 38 Textfiguren. [XII u. 252 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M* 6.—

Cesàro, Dr. **E.**, weil. Professor der Mathematik an der Königl. Universität Neapel, elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlr. Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausg. von Dr. G. Kowalewski, Prof. an der Univ. Bonn. Mit 97 Figuren [IV u. 894 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M* 15.—

Czuber, Hofrat Dr. **E.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Auflage in 2 Bänden.
I. Band. Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung Kollektivmaßlehre. Mit 18 Figuren im Text. [X u. 410 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. *M* 12.—
II. — [Erscheint Ostern 1910.]

——— Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. In 2 Bänden. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage. gr. 8. In Leinwand geb.
I. Band. Differentialrechnung. Mit 115 Figuren im Text. [XIV u. 560 S.] 1906. n. *M* 12.—
II. — Integralrechnung. Mit 87 Figuren im Text. [VIII u 532 S.] 1906. n. *M* 12.—

v. Dantscher, Dr. **V.**, Professor an der Universität Graz, Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen. [VI u. 79 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. *M* 2.80, in Leinwand geb. n. *M* 3.40.

Dingeldey, Geh. Hofrat Dr. **F.**, Professor an der Techn. Hochschule zu Darmstadt, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung. In 2 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb. I. Teil: Aufgaben zur Anwendung der Differentialrechnung. Mit 99 Fig. [V u. 202 S.] 1910. n. *M.* 6.—

Durège, Dr. **H.**, weil. Professor an der Universität Prag, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. In 5. Auflage neu bearbeitet von Dr. L. Maurer, Professor an der Universität Tübingen. Mit 41 Fig. [X u. 397 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. *M* 9.—, in Leinw. geb. n. *M* 10.—

——— Theorie der elliptischen Funktionen. In 5. Auflage neu bearbeitet von Dr. L. Maurer, Professor an der Universität Tübingen. Mit 36 Figuren im Text. [VIII u. 436 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. *M* 10.—, in Leinw. geb. n. *M* 11.—

Fisher, Dr. **J.**, Professor an der Yale University New Haven, U. S. A., kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung („Infinitesimalrechnung"). Deutsch nach der 3. englischen Auflage von N. Pinkus. Mit 11 Textfiguren. [VI u. 72 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M* 1.80.

Forsyth, Dr. **Andrew Russell**, F. R. S., Professor am Trinity College zu Cambridge, Theorie der Differentialgleichungen. I. Teil: Exakte Gleichungen und das Pfaffsche Problem. Autorisierte deutsche Ausgabe von H. Maser. [XII u. 378 S.] gr. 8. 1893. Geh. n. *M* 12.—

Genocchi, Dr. **Angelo**, weiland Professor an der Universität Turin, Differentialrechnung und Anfangsgründe der Integralrechnung. Herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisierte deutsche Übersetzung von Dr. G. Bohlmann in Berlin und A. Schepp, weiland Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit einem Vorwort von A. Mayer, Professor an der Universität Leipzig. [VII u. 399 S.] gr. 8. 1899. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

Goursat, Dr. **E.**, Professor an der Universität Paris, Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Gehalten an der Faculté des Sciences zu Paris. Bearbeitet von C. Bourlet. Autorisierte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit einem Begleitwort von S. Lie. [XII u. 416 S.] gr. 8. 1893. Geh. n. *M* 10.—

Stolz, Dr. **O.,** weiland Professor an der Universität Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 3 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb. n. ℳ 27.—

I. Teil. Reelle Veränderliche und Funktionen. Mit 4 Figuren im Text. [X u. 460 S.] 1893. Geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 9.—

II. — Komplexe Veränderliche und Funktionen. Mit 33 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] 1896. Geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 9.—

III. — Die Lehre von den Doppelintegralen. Eine Ergänzung zum I. Teile des Werkes. Mit 41 Figuren im Text. [VIII u. 296 S.] 1899. Geh. n. ℳ 8.—, in Leinw. geb. n. ℳ 9.—

——— und Dr. **J. A. Gmeiner,** Professor an der Universität Innsbruck, Einleitung in die Funktionentheorie. 2., umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text. [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 15.—

Auch in 2 Abteilungen:

I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 6.—
II. — Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. S. 243—598.] 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 9.—

Tannery, J., Professor an der Universität Paris, Direktor der École normale supérieure zu Paris, Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. P. Klaess Gymnasiallehrer in Echternach (Luxemburg.) Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 184 Textfiguren. [XII u. 339 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 7.— in Leinwand geb. n. ℳ 8.—

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausgegeben von Felix Auerbach. Mit einem Bildnis Lord Kelvins. I. Jahrgang 1909/10. [XLIV u. 450 S.] 8. 1909. In Leinwand geb. n. ℳ 6.—

Tesař, L., Professor an der k. k. Staatsrealschule im XX. Bezirke von Wien, Elemente der Differential- und Integralrechnung. Mit 83 Textfiguren. [VIII u. 128 S.] gr. 8. 1906. Kart. n. ℳ 2.20.

Thiele, Dr. **T. N.,** em. Professor der Astronomie an der Universität Kopenhagen, Präsident des Vereins dänischer Aktuare, Interpolationsrechnung. [XII u. 175 S.] 4. 1909. Geh. n. ℳ 10.—

Thomae, Geheimer Hofrat Dr. **J.,** Professor an der Universität Jena, Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen. Mit 10 Figuren. [VI u. 182 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. ℳ 7.80.

Vivanti, Dr. **G.,** Professor an der Universität Pavia, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch herausgegeben von Dr. A. Gutzmer, Professor an der Universität Halle a. S. [VI u. 512 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—

Weber, Dr. **E. von,** Professor an der Universität Würzburg, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. [XI u. 622 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

Weber, Dr. **H.,** und Dr. **J. Wellstein,** Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band: Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. n. ℳ 9.60.

II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Textfiguren. [XII u. 596 S.] 1907. n. ℳ 12.—

III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und R. H. Weber (Rostock). Mit 358 Textfiguren. [XIII u. 666 S.] 1907. n. ℳ 14.—

Webster, A. G., Ph. D., Professor of Physics, Clark University, Worcester, Mass., partial differential Equations of mathematical Physics. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN.

Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur). Von Dr. **Ernst Pascal**, ord. Professor an der Universität Neapel. Deutsche Ausgabe von A. Schepp in Wiesbaden. In 2 Teilen. 2., neubearbeitete Auflage. gr. 8.

I. Teil: **Die Analysis.** Unter Mitwirkung von H. Pascal sowie Ph. Furtwängler, A. Guldberg, H. Hahn, E. Jahnke, H. Jung, A. Loewy, H. E. Timerding, herausgegeben von Dr. **P. Epstein**, Professor an der Universität Straßburg i. E. [ca. 800 S.] 1909. In Leinwand geb. ca. n. ℳ 12.— [Erscheint im Herbst 1909.]

II. — **Die Geometrie.** Unter Mitwirkung von E. Pascal sowie L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, Fr. Dingeldey, E. Enriques, G. Giraud, H. Graßmann, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Mollerup, J. Neuberg, U. Perazzo, O. Staude, E. Steinitz, H. Wieleitner und K. Zindler herausgegeben von Dr. **H. E. Timerding**, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig. [ca. 900 S.] 1910. In Leinwand geb. ca. n. ℳ 14.— [Erscheint Ostern 1910.]

Der Zweck des Buches ist, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, daß der Leser imstande ist, sich in ihr zu orientieren, und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann.

Für den Studierenden der Mathematik soll es ein „Vademekum" sein, in dem er, kurz zusammengefaßt, alle mathematischen Begriffe und Resultate findet, die er während seiner Studien sich angeeignet hat oder noch aneignen will.

Die Anordnung der verschiedenen Teile ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe: zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln (ohne Beweis) aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Größen bilden, und schließlich ein kurzer Hinweis auf die Literatur über die betreffende Theorie gebracht.

Repertorium der angewandten Mathematik. Hrsg. von **H. E. Timerding** unter Mitwirkung mehrerer Fachgelehrten. gr. 8. Geb. [Erscheint im Herbst 1910.]

Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. Von Dr. **W. Ahrens** in Magdeburg. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 8.—

„Ich kann mir nicht anders denken, als daß dieses Buch jedem Mathematiker eine wahre Freude bereiten wird. Es ist zwar keineswegs bestimmt und auch nicht geeignet, in einem Zuge durchgelesen zu werden, und doch, als ich es zum ersten Male in die Hände bekam, konnte ich mich gar nicht wieder davon losreißen, und seit ich es unter meinen Büchern stehen habe, ziehe ich es gar oft hervor, um darin zu blättern." **(Friedr. Engel, Literarisches Zentralblatt.)**

„Der Verfasser der „Mathematischen Unterhaltungen" hat uns mit einem neuen, überaus fesselnden und originellen Werke überrascht, welches man als einen mathematischen „Büchmann" bezeichnen könnte, wenn es nicht neben aphoristischen Bemerkungen auch längere Briefe und Auseinandersetzungen brächte. Beginnt man zu lesen, so möchte man das Buch nicht aus der Hand legen, bis man zum Ende gelangt ist, und dann werden viele wieder von vorn beginnen. Jedem wird es Neues bringen, möge er noch so belesen sein ... gerade das vorliegende Buch gibt einen tiefen Einblick in das Ringen der Geister, und manchem wird durch manche kurze, treffende Bemerkung ein Licht über ganze Gebiete der Wissenschaft aufgehen.... Ein alphabetisches Sach- und Namenregister erleichtert die Orientierung." **(Professor Dr. Holzmüller in der Zeitschrift für lateinlose Schulen.)**

Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Von Dr. **W. Ahrens** in Magdeburg. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. ℳ 10.— [2. Auflage unter der Presse.]

„Eine solche mit Sachkenntnis und mit wohltuender Eleganz geschriebene Darstellung dieser eigentümlichen Materie darf sowohl bei dem Mathematiker als auch bei dem Laien auf Interesse zählen, der sich gern mit Zahlen und geometrischen Figuren abgibt, weil ihm ihre schönen und oft merkwürdigen Eigenschaften Vergnügen, gewiß ein Vergnügen der reinsten Art, bereiten. Sie darf des Interesses insbesondere dann sicher sein, wenn sie mit solcher Sachkenntnis gearbeitet und mit wohltuender Eleganz geschrieben ist wie die vorliegende. Der Verfasser derselben wollte sowohl den Fachmann, den der theoretische Kern des Spieles interessiert, als den mathematisch gebildeten Laien befriedigen, dem es sich um ein anregendes Gedankenspiel handelt; und er hat den richtigen Weg gefunden, beides zu erreichen." **(Professor Czuber in der Zeitschrift für das Realschulwesen.)**

Himmel und Erde. Illustrierte naturwissenschaftliche Monatsschrift, herausgegeben von der Gesellschaft Urania Berlin, redigiert von Dr. **P. Schwahn.** XXI. Jahrgang. 1909. Jährlich 12 Hefte. Vierteljährlich n ℳ 3.60.

Sich fernhaltend von einer seichten Popularität, die nur der Halbbildung dient, unterrichtet „Himmel und Erde" in wissenschaftlich einwandfreier, aber dennoch jedem Gebildeten verständlicher Weise den Leser über alle Fortschritte auf dem Gebiete der Naturwissenschaft und Technik. Seit den mehr denn zwei Dezennien ihres Bestehens erfreut sich die Zeitschrift der ständigen Mitarbeit der besten Namen aus allen Fachgebieten. Der reiche Bilderschmuck, der jedem Hefte beigegeben ist, und die gediegene Ausstattung machen das Blatt zu einem Schmuck für jede Bibliothek. Jedes Heft enthält eine Anzahl reich illustrierter größerer Aufsätze von namhaften Fachgelehrten, die entweder fundamentale Fragen der Naturwissenschaft und Technik oder biographische Würdigungen schöpferischer Geister auf dem Gebiete moderner Naturerkenntnis behandeln. An die größeren Aufsätze schließen sich Mitteilungen über wichtige Entdeckungen und Erfindungen, über naturwissenschaftliche und technische Kongresse, über die jeweiligen Himmelserscheinungen, außerdem Besprechungen der hervorragendsten neuen Werke auf naturwissenschaftlichem Gebiete sowie eine sorgfältig durchgearbeitete Bücherschau. So wird es dem Leser gewährleistet, daß er den Überblick nicht verliert und einerlei, ob er selbst forschend tätig ist oder mitten im praktischen Leben steht, Fühlung mit den Errungenschaften unseres naturwissenschaftlichen Zeitalters behält.